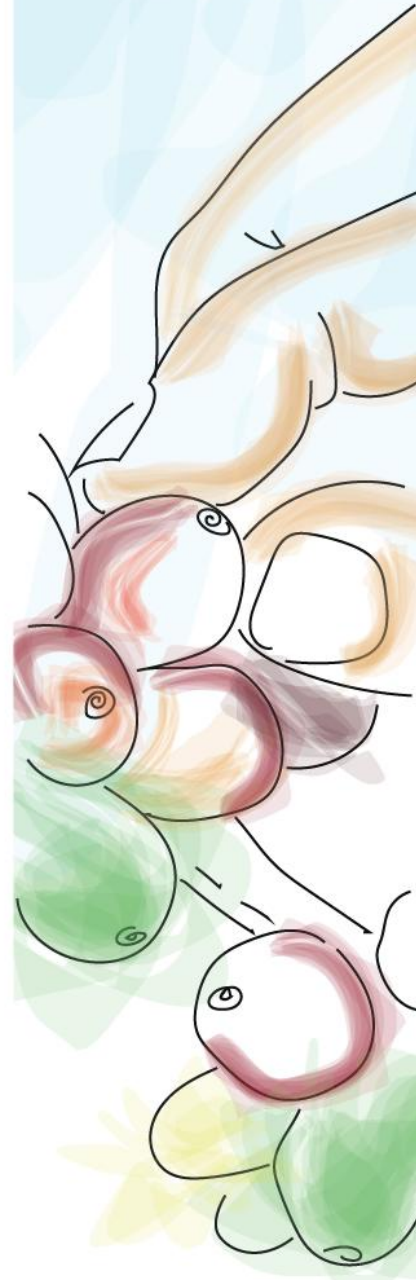




# MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE FERMENTACIÓN DEL CAFÉ.

Jhonny Ancizar Tapiero Trejos  
Universidad del Quindío



# MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE FERMENTACIÓN DEL CAFÉ.

JHONNY ANCIZAR TAPIERO TREJOS

DIRECTOR:  
MSC. ROSA MARÍA MÉNDEZ PARRA

MODALIDAD:  
TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:  
MATEMÁTICA APLICADA

ÁREA DE PROFUNDIZACIÓN:  
MATEMÁTICA APLICADA GRUPO DE INVESTIGACIÓN: SEMINARIO INTERDISCIPLINARIO  
GRUPO EN MATEMÁTICA APLICADA - SIGMA

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO  
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
ARMENIA - QUINDÍO - COLOMBIA



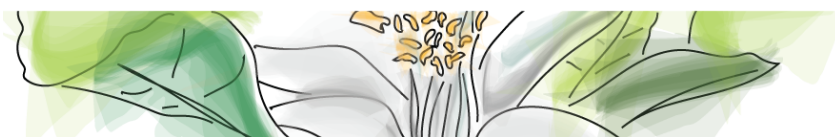
*Septiembre de 2023*

## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Dios y a mis padres Zoraida Trejos Ramirez y Dotmael Tapiero por todo el apoyo brindado durante mi formación personal y profesional, a mis hermanos Ditmer Andres Tapiero Trejos, Diana Paola Tapiero Trejos, y en especial a Prince Katerine Tapiero Trejos por su comprensión e incentivo constante e incondicional a lo largo de mis estudios, agradezco a mi pareja Luisa Fernanda Castro Hernandez por acompañarme en este camino.

Gracias a la Universidad del Quindío por haberme permitido formarme en ella, a mi directora Rosa María Méndez Parra por la paciencia, dedicación y orientación en todos los momentos que necesité.

Por último quiero agradecer a todas aquellas personas que aportaron en mi proceso académico, tales como profesores, tutores, directores y compañeros.



## Resumen

El café es uno de los productos más representativos a nivel mundial y nacional; es por esto que el proceso de fermentación del café es primordial para su producción. La fermentación del café es un proceso metabólico en el cual los microorganismos presentes tales como las levaduras, las bacterias y algunos hongos mediante un proceso de oxidación de los azúcares se transforman en productos tales como etanol, ácido láctico, ácido acético y dióxido de carbono etc. En la actualidad existen diferentes tipos de fermentación entre los cuales encontramos la butírica, alcohólica, fórmica, metánica, láctica y maloláctica.

En Colombia el proceso de fermentación se puede generar de diversas maneras en sistemas abiertos o cerrados, también se puede producir fermentaciones sólidas, mixtas y húmedas, en las cuales interviene elementos claves en su proceso de los cuales se tiene la temperatura, el Ph, el sustrato, azúcares y la actividad del agua.

Con el presente trabajo de investigación, se elaboró y analizó un modelo matemático que describe elementos presentes en la fermentación del café, entre estos, se identificaron los microorganismos de mayor presencia, levaduras y bacterias, los cuales permanecen en constante crecimiento, en el periodo de 18 horas de fermentación, al que fueron sometidas varias muestras de café de la variedad caturra, obteniendo como resultado la certeza de que las levaduras y las bacterias no decrecen, puesto que las temperaturas registradas en el experimento fueron en un nivel óptimo, es decir estuvieron entre  $17^{\circ}\text{C}$  y  $23^{\circ}\text{C}$ , en este rango de temperatura no se registran muertes de ninguna de las dos especies, las levaduras mostraron semejanza con curvas senoidales, es decir, en las primeras 4 horas de fermentación crecen, de las 4 a las 16 horas toma un comportamiento constante, para después volver a crecer. En el caso de las bacterias su comportamiento es creciente a lo largo de las 18 horas de fermentación.

### Palabras Clave:

Azúcares, bacterias, café, ecuación, fermentación, levaduras.



# Abstract

Coffee is one of the most representative products worldwide and nationally; This is why the coffee fermentation process is essential for its production. Coffee fermentation is a metabolic process in which the microorganisms present such as yeasts, bacteria and some fungi, through a process of oxidation of sugars, are transformed into products such as ethanol, lactic acid, acetic acid and carbon dioxide, etc. . Currently there are different types of fermentation among which we find butyric, alcoholic, formic, metanic, lactic and malolactic.

In Colombia, the fermentation process can be generated in various ways in open or closed systems. Solid, mixed and wet fermentations can also be produced, in which key elements intervene in the process, such as temperature, Ph, substrate, sugars and water activity.

With the present research work, a mathematical model that describes elements present in the fermentation of coffee, among these, the microorganisms of greater presence, yeasts and bacteria, which remain in constant growth, in the period of 18 hours of fermentation, to which were some samples of coffee of the Caturra variety, obtaining as a result the certainty that the yeasts and bacteria do not decrease, since the temperatures recorded in the experiment were at an optimal level, that is, they were between 17°C and 23°C. In this temperature range, no deaths were recorded in either species. The yeasts showed similarity to sinusoidal curves, that is, in The first 4 hours of fermentation they grow, from 4 to 16 hours they behave constantly, and then grow again. In the case of bacteria, their behavior increases throughout the 18 hours of fermentation.

## **Keywords:**

Sugars, bacteria, coffee, equation, fermentation, yeasts.



# Tabla de Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Planteamiento del problema</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Justificación</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Marco Conceptual</b>	<b>12</b>
4.0.1	Ecuación diferencial (ED) . . . . .	12
4.0.2	Modelado Matemático de algunas especies . . . . .	15
4.1	El cultivo del café y el proceso de fermentación . . . . .	20
4.1.1	Reacciones físicas y químicas en un proceso de fermentación . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Modelo propuesto</b>	<b>37</b>
5.0.1	Bases teóricas para el modelo propuesto . . . . .	40
5.0.2	Modelo propuesto . . . . .	46
5.0.3	Simulaciones . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Objetivos</b>	<b>57</b>
6.0.1	Objetivo General . . . . .	57
6.0.2	Objetivos Específicos . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Metodología</b>	<b>58</b>
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>9</b>	<b>Trabajos futuros</b>	<b>61</b>
<b>10</b>	<b>Resultados Esperados</b>	<b>62</b>

## 11 Bibliografía







# 1. Introducción

El café es uno de los productos que por muchos años ha sido fundamental en la economía de diferentes países, principalmente en Colombia su importancia histórica y económica le han catalogado como el principal fruto de representación nacional y a su vez, uno de los principales productos presentes en los mercados mundiales.

Entre las bebidas más consumidas a nivel mundial, el café ocupa un puesto privilegiado debido a su demanda. Nuestro país goza de producir el café más suave del mundo, por lo tanto para poder contar con este estatus es preciso conocer a profundidad toda la cadena productiva de su industrialización, esto con el fin de consolidar una bebida de óptima calidad, potenciando la economía nacional, y beneficiando todos los actores que intervienen en la producción, desde quien lo siembra hasta el que lo distribuye (27).

Teniendo en cuenta lo anterior, la producción de café en el ámbito nacional presenta un nivel elevado en todo el territorio colombiano, comprometiendo a 590 municipios y los departamentos de la zona andina del país. En este sentido cabe resaltar que el café es un artículo fundamental para la economía nacional, ya que este producto es una de los principales generadores de empleo en gran parte del territorio (25).

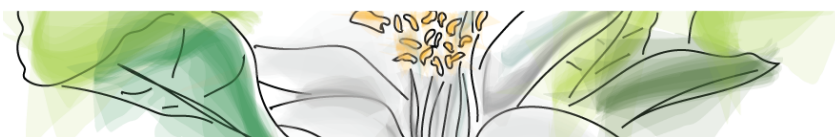
Por otra parte, se reconoce que la calidad de una taza de café está influenciada por diversos factores externos al proceso de fermentación (la temperatura, el suelo, el manejo de las plagas, técnicas agrícolas empleadas para su recolección y procesamiento), como también a factores internos (la microbiota responsable de la fermentación que contribuye a mejorar las características sensoriales y otras cualidades de la taza de café) (41).



En el proceso del beneficio del café un factor fundamental que constituye la variabilidad de la calidad del producto es conocido como la fermentación, en la cual se generan cambios bio-químicos, que producen las levaduras y las bacterias por medio de la oxidación de los azúcares, produciendo energía trifosfato de adenosina (ATP) y etanol, entre otras sustancias.

Alrededor del mundo existen fenómenos físico-químicos que forman parte de la composición orgánica de los diversos organismos presentes en un ecosistema, entre los cuales encontramos las plantas y los animales, que mediante cambios estructurales a nivel biológico, sufren transformaciones o degradaciones que a su vez, producen otros tipos de sustancias químicas. Un estudio a nivel biológico y microbiológico nos permite analizar a profundidad lo que ocurre en este tipo de fenómenos, apoyados en modelos matemáticos (algunos basados en ecuaciones diferenciales), con los cuales se pueden estudiar y proponer conjeturas en relación a los mismos.

El presente trabajo se centrará en uno de los eslabones de la cadena productiva del café llamado fermentación, el cual es considerado un aspecto fundamental en todo este proceso. La fermentación es una técnica conocida y empleada a lo largo del tiempo, por medio del cual se pueden transformar o conservar diferentes productos alimenticios.





## 2. Planteamiento del problema

El proceso de fermentación del café es tan delicado, que al no tener control sobre el mismo, implicaría daños o defectos en la bebida de café, los cuales pueden afectar su textura, sabor y olor. De igual manera se debe tener un conocimiento adecuado para el manejo de las plagas y el tiempo de fermentación entre otros factores que puedan impactar directamente el proceso, de aquí se deriva el planteamiento del problema de este trabajo de investigación, el cual busca, proponer un modelo matemático que permita dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo es la dinámica de algunas de las reacciones químicas presentes en el proceso de fermentación del café, y cuáles son los microorganismos presentes en dichas reacciones?



### 3. Justificación

El café es hoy día la bebida de mayor consumo en el mundo, después del agua, aunque presenta grandes diferencias entre países los consumidores; desde hace años se viene consolidando el mercado de cafés de alta calidad, especiales y orgánicos, que exigen productos diferenciados (22). El desarrollo de este trabajo va a brindar bases teóricas para que el proceso de fermentación del café se realice pensando en obtener una bebida de excelente calidad.

La calidad de muchos productos se obtiene de manera empírica, culturalmente esto es válido y se ha presentado en el cultivo de café; con el surgimiento de los cafés especiales y buscando ubicar en el mercado un producto excelso, se requiere tener una fundamentación teórica que permita conocer los procesos que conduzcan a la industrialización del fruto.

La importancia de la fermentación del café radica en que gracias a ella, el sabor natural del grano puede ser recreado, alterado o manipulado, buscando obtener una bebida agradable al paladar del consumidor, potenciando aspectos tales como, los sabores, ofrecer distintos perfiles de un mismo café, refinar la dulzura, la acidez y el cuerpo (41).





## 4. Marco Conceptual

Matemáticamente existen fenómenos físicos y químicos que se pueden estudiar mediante ecuaciones diferenciales ya sean parciales u ordinarias, que permiten realizar un análisis acerca de la investigación que se desea desarrollar. Por otra parte, este tipo de ecuaciones son utilizadas al momento establecer algunos modelos matemáticos que faciliten el estudio de los fenómenos presentes en el entorno.

A continuación se estudiarán conceptos matemáticos básicos, que ayudan al estudio y análisis del proceso de fermentación del café y posteriormente se presentan las bases teóricas de este fenómeno.

### 4.0.1 Ecuación diferencial (ED)

A continuación se dan las definiciones básicas de lo que es una ecuación diferencial, se describen los tipos de ecuaciones diferenciales que existen y algunas soluciones analíticas que se pueden encontrar.

El lector interesado puede consultar en la bibliografía citada, los conceptos sobre los cuales desee ahondar, igualmente, sobre los métodos más comunes para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales.

**Definición 1.** *Llamamos ecuación diferencial (ED) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas (24).*

Si la ED involucra derivadas respecto a una sola variable independiente, la ecuación diferencial recibe el nombre de ecuación diferencial ordinaria (EDO), por el contrario si involucra derivadas parciales respecto a dos o más variables, la ecuación en este caso recibe el nombre

de ecuación en derivadas parciales (EDP).

Ejemplo:

$$2 \frac{dy}{dx} + 4y = 7 \quad (4.1)$$

$$(x^2 - y)dx + (5siny)dy = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} = \alpha^2 \left[ \frac{\partial^2 f(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(t, x, y)}{\partial y^2} \right] \quad \text{Ec. de difusión del calor} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Ec. de Laplace} \quad (4.4)$$

Como las ecuaciones (4.1) y (4.2) involucran derivadas de funciones de una sola variable independiente, entonces ellas son ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que las ecuaciones (4.3) y (4.4) contienen derivadas parciales, por lo tanto son ecuaciones diferenciales parciales.

**Definición 2.** *El orden de una ecuación diferencial lo establece la derivada de mayor orden presente en la ecuación (12).*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dy} = \ln x \quad \text{EDO de orden 2} \quad (4.5)$$

**Definición 3.** *Una ecuación diferencial ordinaria y lineal, de orden n, tiene la siguiente forma:*

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (4.6)$$



Para identificar una EDO lineal, es muy importante tener en cuenta que la variable dependiente y sus derivadas tienen como exponente 1 y los coeficientes  $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$  de la ecuación dependen solo de  $x$ , al igual que la función  $g(x)$ , si sucede lo contrario se dice que la EDO no es lineal.

A continuación algunos ejemplos de EDO lineales:

$$x^3 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (4.7)$$

$$\frac{dy}{dx} + y = \text{sen}(x) \quad (4.8)$$

### Solución de una ecuación diferencial

**Definición 4.** Se dice que una función definida en un intervalo  $I$ , es solución de una ED en el intervalo, si al sustituir dicha función en la ecuación diferencial se obtiene una identidad.

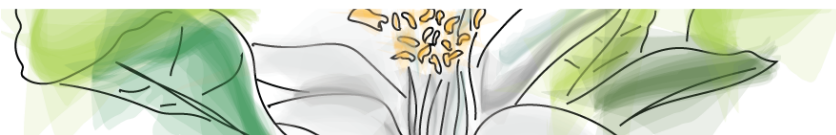
Existen tres tipos de soluciones de ecuaciones diferenciales, la solución general, que es la función que contiene todas las soluciones de la ecuación diferencial; la solución particular es la que está asociada a un problema de valor inicial (es una condición que se adiciona a la ED); la solución singular es la que no se puede obtener a partir de la familia de soluciones de la ED, (se aclara que no todas las ED tienen una solución singular).

Ejemplo: consideremos la siguiente EDO:

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0 \quad (4.9)$$

La ecuación diferencial ordinaria (4.9), tiene como solución general la función:

$$y = \left( \frac{x^2}{4} + c \right)^2 \quad (4.10)$$





En el caso de la solución particular añadiremos la condición inicial a (4.9),  $y(0) = 0$ , por lo tanto, la función:

$$y = \frac{x^4}{16}, \quad (4.11)$$

es una solución particular de (4.9). Sin embargo, se puede observar que la función  $y = 0$  es una solución singular, ya que no existe algún valor del parámetro  $c$  en (4.10), para la cual se obtenga  $y = 0$ . Note que esta función también es solución trivial de la ecuación diferencial.

### Teorema de existencia y unicidad

El teorema de existencia y unicidad garantiza la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal en un intervalo dado.

#### Teorema

Sean  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  y  $g(x)$  continuas en un intervalo  $I$ , sea  $a_n(x) \neq 0$ , para toda  $x$  del intervalo si  $x = x_0$  es cualquier punto del intervalo, existe una solución en dicho intervalo  $I$  (46).

## 4.0.2 Modelado Matemático de algunas especies

En el mundo se presentan diferentes fenómenos físico-químicos, que generan interrogantes a la hora de encontrar explicaciones o razones lógicas de su fundamento, teniendo en cuenta esto, se puede recurrir a modelos matemáticos, que ayuden visualizar diferentes escenarios de acuerdo a lo que se estudia.

Un modelo matemático busca representar algunas características del objeto de estudio, más no se pretende producir una copia exacta del mismo, por ejemplo, en procesos biológicos se estudian sistemas que evolucionan con el tiempo, pero en muchas o casi la totalidad de ocasiones se ven afectados por otras variables presentes en el fenómeno de estudio, así dependiendo de estas características se generan modelos matemáticos que permiten obtener resultados de los estudios que se deseen realizar (5).

Varios textos de fundamentación matemática describen una diversidad de modelos matemáticos aplicados a procesos biológicos, por ejemplo (8) dedica todo el libro al estudio del fenómeno de difusión (lo cual es aplicable en varios aspectos de la vida) y a las respectivas ecuaciones matemáticas que permiten su estudio. Por otra parte, (11) trata ampliamente, una variedad de modelos matemáticos aplicados en la biología, algunos basados en ecuaciones diferenciales para el estudio de fenómenos continuos que el autor detalla. También (23) describe ecuaciones matemáticas que ayudan a modelar procesos biológicos. Los tres autores citados son apenas un pequeño ejemplo de estudios sobre el uso de la matemática en fenómenos biológicos.



A manera de ejemplo, de un estudio biológico, se tiene que la población de conejos de Wyoming que dependen del número de coyotes, de leones de montaña, de lince y de roedores que sirven como alimento alternativo para los depredadores presentes en dicho sistema, otro de los factores que influyen, es el clima, que es el productor de diferentes enfermedades que afectan la población de conejos (5).

Una vez elaborado un modelo matemático, se deben comparar las predicciones propuestas con los datos del sistema, si estas concuerdan tendremos seguridad en que las hipótesis planteadas al crear el modelo son razonables y se pueden usar para realizar predicciones acerca del fenómeno de estudio, en el caso contrario si no concuerdan se deben hacer ajustes en dichas hipótesis (5). La figura 4.1 ilustra un esquema que permite plantear un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales.

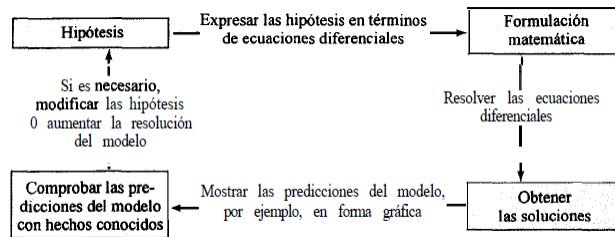


Figure 4.1: Esquema para formular un modelo matemático. (46).

### Modelo de crecimiento poblacional

Partiendo de la idea de un modelo matemático, se estableció el modelo de crecimiento de poblaciones, también llamado modelo Malthusiano, en honor al economista Thomas Robert Malthus, en el cual se asume que la población crece proporcionalmente con el número de individuos presentes en dicha población, este supuesto se considera coherente si se tratan de poblaciones de animales u organismos, los cuales están en ambientes con condiciones adecuadas para su desarrollo y en el cual sus recursos sean ilimitados, incluyendo la ausencia de posibles depredadores que afecten a la población (42).

El modelo establece dos variables para el crecimiento poblacional:

- $t$ : tiempo (variable independiente).
- $p$ : población (variable dependiente).



Considerando que la derivada  $\frac{dp}{dt}$ , determina la rapidez del crecimiento de la población, la cual es proporcional al número de individuos, esto es:

$$\frac{dp}{dt} = kp \tag{4.12}$$

Donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Considerando que la población crece en todo instante, entonces si  $k > 0$ , se tiene que  $p'(t) > 0$  para todo  $t$ . En relación con la solución de (4.12), lo que se busca es una función en la cual su derivada sea múltiplo constante de sí misma, teniendo en cuenta que la función exponencial cumple este tipo de propiedades, tomamos la siguiente función  $p(t) = ce^{kt}$  (42), así:

$$\frac{dp}{dt} = c(e^{kt}k) = k(ce^{kt}) = kp(t)$$

De esta forma, cualquier función exponencial de la forma  $p(t) = ce^{kt}$  es solución de la ecuación (4.12). Para obtener una familia de soluciones de la ecuación  $\frac{dp}{dt} = kp$ , simplemente se necesita que  $c$  varíe en todo el dominio de la función  $p(t) = ce^{kt}$  la cual representa una familia de soluciones como se ilustra en la figura 4.2.

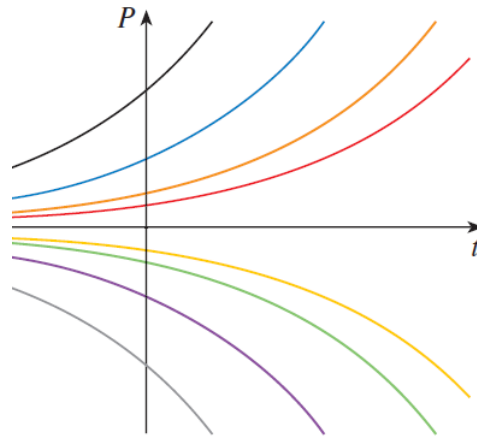


Figure 4.2: Familia de soluciones de la ecuación (12), para distintos valores de  $c$

Considerando que las poblaciones tiene valores positivos, se buscan valores de  $c > 0$ , y consecuentemente interesa el tiempo  $t$ , mayor al tiempo  $t_0$ . Es decir  $t > t_0$ ,  $t = 0$ ,  $p(0) = ce^{k0} = c$ , esto significa que la constante  $c$  representa la población inicial  $p(0)$ .



Estimando que la ecuación (4.12), establece el crecimiento poblacional en virtud de que la población se desarrolla en un medio donde se garantice que los recursos sean ilimitados, pero esta premisa no siempre es verdadera para las poblaciones de estudio, (42), la figura 4.3 ilustra la situación que se acaba de describir.

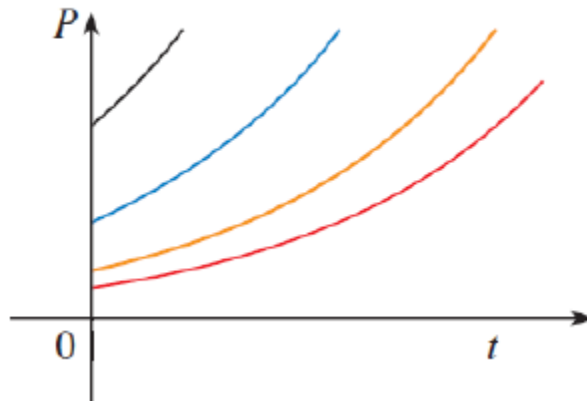


Figure 4.3: Soluciones crecientes para la ecuación (4.12) (42).

En otro tipo de poblaciones, se evidencia que el tipo de crecimiento no sigue un comportamiento exponencial, al inicio tienen un comportamiento creciente, pero en virtud a las condiciones del medio, el número de individuos llega a un punto donde se estabiliza, este punto en que el modelo entra en estabilidad es conocido como la capacidad de carga  $K$  del medio. Por otra parte, cuando la población excede a  $K$ , comienza a decrecer hacia  $K$  (42).

De esto se desprenden dos nuevos supuestos:

- $\frac{dp}{dt} \simeq kp$  si  $p$  es pequeña, al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional a  $p$ .
- $\frac{dp}{dt} < 0$  si  $p > K$  ( $p$  decrece tendiendo a  $K$ )

Una ecuación que se ajusta perfectamente a estas dos situaciones expuestas es la siguiente:

$$\frac{dp}{dt} = kp \left( 1 - \frac{p}{K} \right) \quad (4.13)$$



Cuando  $p$  es pequeña a comparación de  $K$ , se aproxima mucho a 0, esto quiere decir que  $\frac{dp}{dt} \approx kp$ , en caso de que  $p > K$ , implica que  $1 - \frac{p}{K}$  es negativo, por lo tanto  $\frac{dp}{dt} < 0$ , esta ecuación es conocida como la ecuación diferencial logística, propuesta por el biólogo matemático belga Pierre Verhulst como un modelo de crecimiento poblacional (42).

### Ecuación diferencial logística o de Verhulst.

La ecuación diferencial logística se caracteriza por ser un reajuste del modelo de crecimiento biológico planteado por Malthus, el cual ajusta mejor en el estudio de dinámicas de poblaciones de algunas especies, ya que considera otros factores que intervienen en el desarrollo de las mismas, así se tiene:

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(1 - \frac{p}{K}\right)$$

Donde  $p$  representa el tamaño de la población en cualquier instante  $t$ ,  $k$  la tasa de crecimiento y  $K$  es el punto máximo donde la población se encuentra en equilibrio. Es decir la capacidad de carga del medio; dicha ecuación es de tipo creciente exponencial en el momento que  $p$  es muy pequeño en comparación con  $K$ , como se muestra en la figura 4.4 (26).

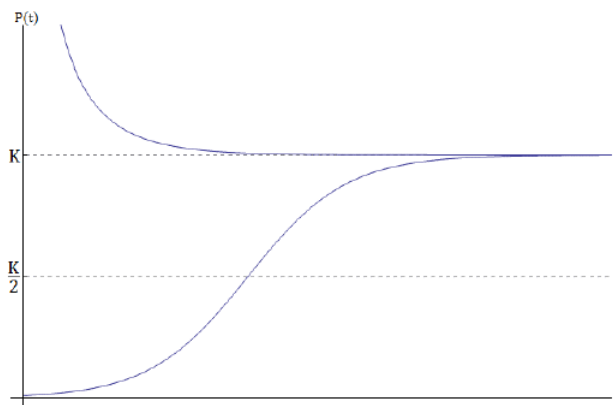
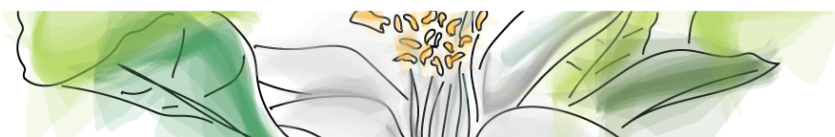


Figure 4.4: Gráfica del comportamiento del modelo poblacional logístico.

Observamos que la ecuación es asintótica en  $K$ , cuando  $p > k/2$ , la función entra en un comportamiento de desaceleración, es decir, relentiza su crecimiento. Note que la ecuación (4.13) muestra dos puntos de equilibrio en  $p = 0$  y  $p = k$ .



## 4.1 El cultivo del café y el proceso de fermentación

Para la realización de este trabajo, se describirán diferentes conceptos que intervienen directamente en la calidad del café y en el proceso de fermentación del mismo.

Es pertinente resaltar que la calidad de cualquier producto que se deriva de cultivos agrícolas va ligada en gran parte a conocer su ciclo de vida, desde la siembra hasta su cosecha. En el caso del café que es un fruto de tipo vegetal, sustenta un período de vida y de productividad con características diferentes a otro tipo de frutos, en este proceso se pueden encontrar una serie de fases que determinan el desarrollo de la planta y sus órganos.

En primer lugar se tiene la etapa vegetativa, la cual comprende el estado de germinación del fruto hasta la floración del mismo, en Colombia la fase vegetativa del cafeto, más puntualmente el estado en el cual la planta forma sus raíces, hojas, nudos y ramas se desarrollan en 3 tiempos los cuales están segmentados de la siguiente manera: en los dos primeros meses se tiene el estado de germinación a transplante, entre cinco y seis meses se tiene el estado de almácigo y por último se tiene la siembra definitiva a la primera floración que está comprendida al rededor de 11 meses, como se muestra en la figura 4.5 (1).

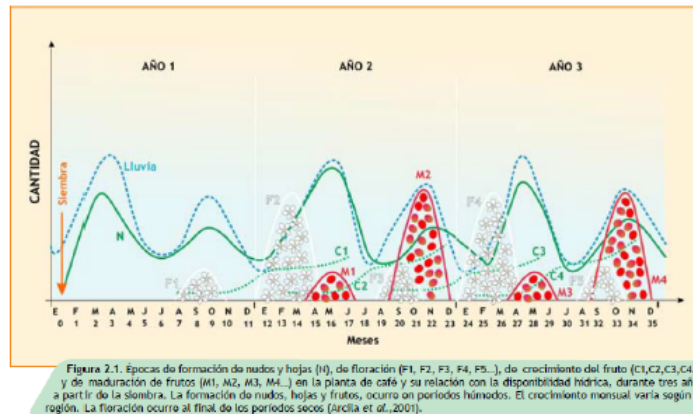
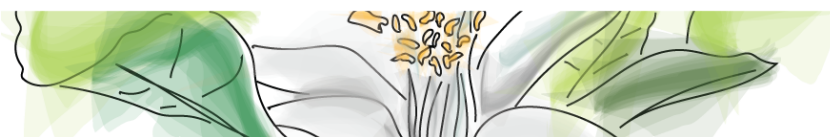


Figure 4.5: Fases del desarrollo del café.





## 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

La siguiente fase es la del desarrollo reproductiva del café reseñada en la figura 4.6, inicia en cuanto aparecen las primeras flores en el fruto, es conocido como el período de floración de la planta, se dice que esta fase se ve influenciada por la luz del día en un fenómeno conocido como (fotoperiodo), de igual manera se ve afectada por el agua, la temperatura y la época de la siembra (1).

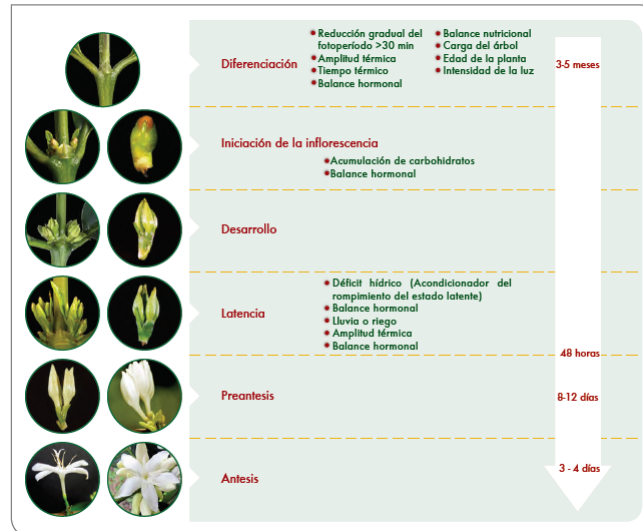
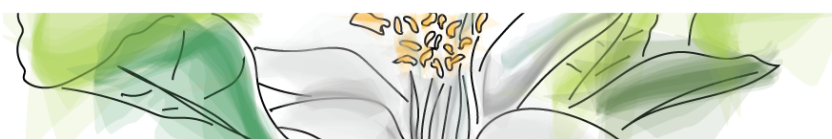


Figure 4.6: Etapa de floración del fruto del café.  
 (17)

El cafeto es conocido como una planta perenne, esto quiere decir que su producción máxima está alrededor de los 6 y 8 años de edad, el ciclo de vida varía de 20-25 años, dependiendo del sistema del cultivo, debido a esto se conoce como el período de senescencia del cafeto, en el cual la planta baja su productividad considerablemente por causa del deterioro del fruto, y su rentabilidad decrece de manera continua.

En el desarrollo de una buena taza de café es muy importante conocer los elementos que están relacionados con el beneficio del mismo, y en particular con su proceso de fermentación, los fenómenos ambientales, las etapas de producción y post-producción son fundamentales para obtener cafés de muy buena calidad.

En la actualidad la calidad y el control de los alimentos es fundamental en el desarrollo productivo de diferentes naciones, es por esto que la regulación de los alimentos, va enfocada a proteger la salud y el bienestar de los consumidores, promover el comercio de los alimentos, razón por la cual es prioritario enfocarse en los procesos químicos y biológicos presentes en la comercialización de este tipo de productos. Es claro que en la industrialización de los alimentos los procesos involucrados, deben ejecutarse de manera apropiada y no alterar las etapas de producción, para obtener un producto de altísima calidad (14).



## 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

Como ejemplos tenemos: el vinagre, un producto que se caracteriza por ser un elemento esencial en diferentes tipos de dieta, se obtiene mediante la fermentación mixta del vino, por medio de las levaduras acetobacter (Fermentos acéticos). Por otro lado, el yogurt, en este caso las bacterias que se utilizan en la fermentación láctica producen energía, estos organismos transforman la lactosa de la leche en glucosa y posteriormente en ácido láctico (4).

### Aspectos claves en la calidad del café

A continuación se describirán aspectos relacionados con la calidad del café, los cuales involucran elementos de los que no se han hablado, por esta razón se describirá inicialmente lo que es la fermentación y el mucílago del café.

La fermentación del café es un proceso metabólico que utiliza el azúcar bien sea en ausencia de oxígeno (anaeróbico), o en el caso contrario con presencia de oxígeno (aeróbico), dicho proceso es fundamental en la remoción del mucílago en el beneficio del café (27).

El grano del café está compuesto por varios elementos, entre ellos el mucílago, ver figura 4.7, el mucílago de café también conocido como mesocarpio, está constituido por una capa gruesa de tejido esponjoso de aproximadamente 0.5 mm de espesor rico en azúcares (44), es de aspecto viscoso, y es el resultado de la degradación de los granos. Es necesario resaltar que las propiedades físicas y químicas del café están ligadas a la variedad y la especie del fruto. Por otra parte, el mucílago de café está compuesto principalmente por agua (82,4%), proteína (8,9%), azúcar reductor (4,1%), pectados (0,91%) y ceniza (0,7%) (27).

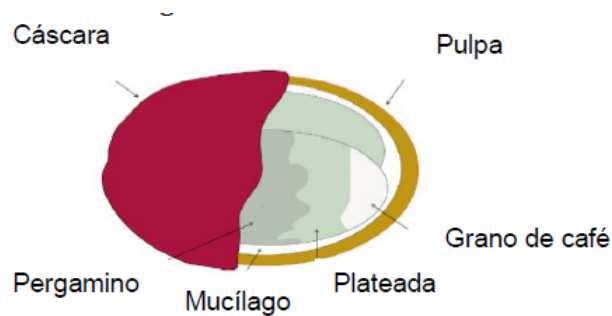


Figure 4.7: Composición del fruto del café.  
 (44)

Es pertinente resaltar que el mucílago se genera de forma discontinua, esto significa que, depende de la producción de granos de café, y de el grado de maduración del mismo, el cual encuentra su capacidad máxima en el momento en que el fruto está en un estado, ni tan maduro ni mucho menos verde.



En un proceso de fermentación de café, el mucílago, es el componente principal en el beneficio del mismo, ya que, en el se encuentran los microorganismos necesarios tales como las levaduras, bacterias y algunos hongos, que por medio de la degradación del mismo, se obtienen productos tales como etanol, ácido láctico, ácido acético, y dióxido de carbono, entre otros.

En consecuencia a lo ya expuesto, se va a profundizar en el tema de estudio que es el proceso de fermentación del café. Es importante conocer que en el mercado mundial del café se establecen diferencias entre productos de alta calidad y productos de baja calidad, es primordial reconocer los procesos que determinan la calidad del café, estos métodos van encaminados a encontrar diferencias que influyan en su producción, entre los cuales podemos encontrar cafés procesados por vía húmeda o por vía seca (15). No obstante, algunos autores consideran un tercer proceso de fermentación para el café llamado semiseco (27).

La mala utilización de estos métodos del procesamiento del café pueden generar factores de riesgo para el producto, en el caso del café procesado en ambientes húmedos, se pueden presentar afectaciones debido al mal manejo del agua, al nivel de contaminación de la misma, en el caso del café producido por vía seca pueden presentarse problemas por las condiciones ambientales o por la mala manipulación del grano (15).

Según (33), las buenas prácticas en el beneficio del café son indispensables para obtener bebidas de excelente calidad, fortalecen los procesos y potencian el producto final. Algunas recomendaciones en este sentido son:

- **Manejo de plagas:** se recomienda no hacer uso de insecticidas, solventes u otros químicos que puedan contaminar el fruto y dañar el proceso de fermentación.
- **Recibo de la cereza:** proceso en el cual el café pasa por diferentes recipientes, primero el fruto es recibido en una tolva la cual debe permanecer limpia, se recomienda evitar el uso de tanques con sifón, pues esto implica la utilización de más agua que pueden generar contaminación en el proceso.
- **Recolección del fruto:** en este punto es recomendable cosechar solo granos maduros, en el caso de los granos verdes producen el defecto fermento, acre o sucio, los sobremaduros producen bebidas con un sabor a vinagre y fermento, por último, los negros ocasionando los defectos acre y carbonoso.
- **Despulpado del café cereza:** entre las recomendaciones más importantes se tiene que despulpar el café inmediatamente después del cosechado y del recibido, no sobrepasar los tiempos del fruto cosechado sin despulpar y procesar, calibrar de manera adecuada la despulpadora para evitar granos semidespulpados o partidos, lavar la despulpadoras evitando contener restos de procesos anteriores.



#### 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

- **Fermentación del mucílago del café:** como se ha descrito anteriormente es la etapa más importante del proceso por este motivo se debe tener en cuenta cada una de las recomendaciones que se plantean, primero controlar los tiempos de la fermentación, pues si se sobrepasa ocasionaría una sobrefermentación y causaría defectos en el sabor y en el olor de la bebida, se deben mantener limpios los tanques en los cuales se va a realizar el proceso.
- **Lavado:** primero se recomienda utilizar la mínima cantidad de agua, debe ser agua limpia para evitar posibles defectos como sucio y fermento, como última medida se debe separar los granos defectuosos, la espuma y flotes.
- **Secado:** el proceso del secado se debe realizar inmediatamente después del lavado del café, es recomendable secar el fruto de manera aislada evitando el contacto con animales u otros elementos que puedan contaminar el mismo, de igual manera controlar la humedad donde se realice el proceso, no secar el café con residuos del mucílago o semidespulpados, por último agitar el fruto con frecuencia para así obtener un secado uniforme.
- **Almacenamiento:** procurar no almacenar el café junto con sustancias químicas, fertilizantes, solventes o cualquier otro elemento que pueda contaminar el fruto.

Según (29), la calidad del café se puede afectar negativamente por los aspectos que a continuación se describen:

- **Broca:** principalmente es el causante de pérdidas económicas alrededor de la producción de café, su manejo debe de ser adecuado en el momento de realizar su respectivo beneficio, puesto que el fruto presenta alteraciones físicas y químicas que deterioran el grano produciéndole perforaciones y ocasionando un mal aroma y un mal sabor dependiendo del daño producido.
- **Contaminado:** este defecto se origina por el uso de contaminantes, solventes y otros productos químicos que afectan el fruto de manera directa, en este punto el grano presenta compuestos extraños en el café, un olor fuerte a químico y un sabor el cual describen como imbebible. Uno de los contaminantes más comunes presentes en el beneficio del café es el fenol, que se genera por medio de microorganismos, este defecto puede ocasionar ese sabor a yodado o a fármaco en la bebida.
- **Fermento:** se origina por las malas prácticas durante el beneficio del café, este defecto se produce en diferentes grados tales como, agrio, fruta, cebolla, rancio y stinker (nauseabundo).



### Fermentación del café

La necesidad de preservar alimentos y producir bebidas, ha sido un factor fundamental en el desarrollo de satisfacer las necesidades de las personas, esto produjo formalizar procesos de fermentación, con el fin de generar productos con olores, sabores y texturas más agradables para su consumo.

La fermentación es un proceso químico en el cual se producen líquidos y gases. Es un proceso que se realiza inmediatamente después de cosechar los granos; existen tres métodos diferentes de fermentación del café (seco, húmedo y semisecco). El tiempo de fermentación varía dependiendo del tipo de procesamiento, la cantidad, la variedad del café y las condiciones ambientales.

El principal objetivo durante este proceso es remover la capa de mucílago que es rica en polisacáridos, la fermentación puede tener un impacto positivo en los atributos de la calidad del café.

Microorganismos como levaduras, bacterias y hongos presentes en los granos del café, permiten que se generen sustancias como etanol, ácido láctico, ácido butírico, entre otras, durante el proceso de fermentación del grano.

Teniendo en cuenta que (13), establece que en el proceso de fermentación del café algunos organismos pectinolíticos están asociados con la degradación de la pulpa y el mucílago, lo que produce alcohol, ácidos y otros compuestos metabólicos que interfieren en la calidad final de la bebida.

### Variables del proceso de fermentación del café

En el proceso de fermentación del café existen diversas variables que conforman los diferentes componentes cinéticos que permiten establecer las velocidades de la degradación del sustrato y la formación de los productos.

Según (33), en los procesos de degradación y fermentación, interviene diferentes variables entre las cuales encontramos, el sustrato, las levaduras, bacterias, tanques fermentadores, mucílago, la temperatura, acidez, pH, variedad del tipo de café, tipos de fermentación, condiciones del suelo, prácticas agrícolas etc. A continuación se reseñan las principales variables que se tienen en cuenta en este trabajo (31).

- **Sustrato:** es el elemento principal en el proceso de fermentación del café, su composición físico-química está formada por los granos de café despulpados en el cual se encuentra el mucílago que se fermenta. En el beneficio del fruto es importante tener en cuenta que el mucílago que se deriva de los granos despulpados, varía y su calidad depende de la frescura y los controles en el proceso.



- Temperatura:** es un factor fundamental en el proceso de fermentación, los microorganismos fermentadores del café son mesófilos, el crecimiento de las levaduras está ligado a las condiciones ambientales que estén en un rango de  $5^{\circ}\text{C}$  y  $39^{\circ}\text{C}$ , si la temperatura sobrepasa los  $50^{\circ}\text{C}$ , las levaduras mueren. De igual manera las bacterias lácticas se ven afectadas por el medio en que se desarrolle la fermentación, tiene la capacidad de reproducirse desde los  $0^{\circ}\text{C}$ , con un óptimo entre los  $25^{\circ}\text{C}$  y  $30^{\circ}\text{C}$  respectivamente. Como se resaltó anteriormente la temperatura es primordial en el proceso, en primer lugar el mucílago. (debido a su composición química y orgánica) se fermenta de manera natural, por otro lado las condiciones ambientales de las zonas cafeteras pueden influir de manera directa en dicho proceso dependiendo de la temperatura del medio.
- Azúcares:** existen dos tipos de azúcares que están presentes en la fermentación del café, tenemos de tipo reductor y de tipo no reductor. En el primer caso de azúcares reductores son fermentados por las levaduras y las bacterias, produciendo etanol, ácido láctico entre otros compuestos, por otra parte los no reductores son degradados por hidrólisis y por la fermentación de los azúcares reductores, entre los cuales encontramos la sacarosa.
- pH:** en primer lugar el  $pH$  es una variable que permite medir el nivel de acidez en una fermentación, en este caso la del café. El nivel del  $pH$  depende del grado de madurez del grano, de la manipulación del mismo, del tiempo de recolección y el despulpado. Algunos autores recomiendan interrumpir el proceso de fermentación para un  $pH$  comprendido entre 3,7 y 4,1.
- Actividad del agua ( $a_w$ ):** todas las reacciones que involucren procesos químicos, físicos, microbiológicos, etc, necesitan una cierta cantidad mínima de agua que impida el deterioro de los alimentos involucrados, o favorezca la conservación de los mismos. La cantidad mínima es llamada actividad de agua ( $a_w$ ), la cual se define como la razón entre la presión parcial del vapor de agua sobre el alimento  $P_a$  y la presión de vapor de saturación del agua pura a la misma temperatura  $P_{a0}$

$$a_w = \frac{P_a}{P_{a0}}, \quad 0 \leq a_w \leq 1 \quad (4.14)$$

### Tipos de fermentación

Según (30) existen diferentes tipos de fermentación que se desarrollan dependiendo de las condiciones ambientales, los organismos presentes y el sustrato. Entre los principales tipos de fermentación se encuentran la propiónica, butírica, la alcohólica, fórmica, metánica, láctica, maloláctica entre otros. A continuación se detallan las que están relacionadas con la fermentación del café.





## 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

- **Alcohólica:** es producida por levaduras que al entrar en contacto con el oxígeno realizan la respiración, crecen y oxidan completamente la glucosa y así se obtiene (trifosfato de adenosina) ATP (molécula portadora de energía para todas las formas de vida), pero en otros tipos de condiciones como la anaerobiosis, estos organismos fermentan azúcares, como la glucosa y algunas la lactosa.
- **Láctica:** en la fermentación láctica se distinguen dos tipos de bacterias lácticas, las homofermentativas y las heterofermentativas según los productos obtenidos. Las homofermentativas generan una pequeña cantidad de alcohol, anhídrido carbónico y acetoína dependiendo de la cantidad de oxígeno, por otra parte, está bacteria produce el 90% de ácido láctico a partir de la glucosa.

Por el contrario, las heterofermentativas generan ácido láctico, alcohol y ácido acético o anhídrido carbónico. A partir de diferentes bacterias se generan otro tipos de componentes, como en el caso de la *Leuconostoc Mesenteroides* que fermenta la glucosa a alcohol, ácido láctico y anhídrido carbónico, pero convierte la ribosa en ácido acético y ácido láctico. La bacteria *lactobasillus Brebys*, vease figura 4.8, *L. Fermenti* y también la *Bidobacterium* producen ácido láctico, alcohol y ácido acético. En síntesis, el producto final de esta fermentación es la obtención de ácido láctico a partir de azúcares.

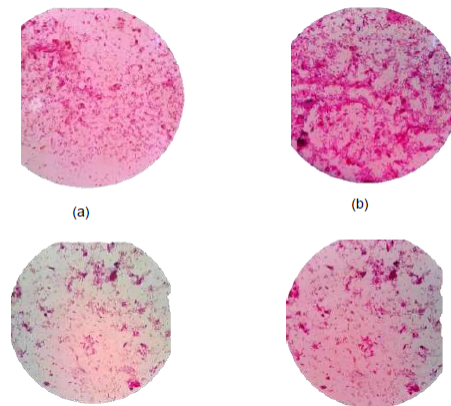


Figure 4.8: Bacterias del tipo *lactobasillus*. Tomado de:  
 (20)

### Elementos del proceso de fermentación

Para una mayor comprensión de los procesos de degradación, se detallan algunos elementos básicos y claves de la fermentación.



**Microorganismos:** son seres microscópicos que tienen un rol importante en la degradación del mucílago de café. Estos comprenden levaduras, bacterias, hongos y algunas algas. Estos microorganismos contribuyen al equilibrio ambiental y fuera de eso generan procesos de degradación en diferentes organismos (30).

**Nutrientes:** son sustancias químicas necesarias para que los organismos se degraden, provocando un fenómeno conocido como el metabolismo biosíntesis o también llamado catabolismo o anabolismo, de este proceso se obtiene la energía necesaria para el crecimiento y funcionamiento de los organismos.

Por otra parte, los nutrientes se dividen en diferentes compuestos en los cuales se encuentran proteínas, lípidos, carbohidratos, vitaminas, sales minerales y agua.

**Enzimas:** son sustancias químicas orgánicas encargadas de la biocatálisis, es decir, la aceleración de las reacciones químicas en las células y la disminución de la energía de activación, estas enzimas las elaboran los organismos vivos entre los cuales encontramos los humanos, los animales, los vegetales y los microorganismos (30).

### Métodos de fermentación del café

El fruto del café puede ser procesado por tres métodos de fermentación diferentes, conocidos como seco, semiseco y húmedo, en este orden de ideas, en el procesamiento seco los granos del fruto del café enteros se secan al sol en planchones debidamente dispuestos, en este método se recomienda no retirar la pulpa de café. Por el contrario, en el café procesado por vía húmeda, el fruto de café es debidamente despulpado y depositado en un tanque con agua para dejarlo fermentar entre 24 y 48 horas; finalmente, el proceso semiseco es una combinación de los dos métodos anteriores, es decir los granos de café se despulpan y se deja directamente al sol para que se genere el proceso de fermentación (9). No obstante, en la actualidad se experimenta con los tiempos de fermentación del café logrando obtener bebidas de alta calidad.

Adicionalmente, se ha desarrollado una herramienta para mejorar el proceso de fermentación del café, este procedimiento fue implementado por el Centro Nacional de Investigaciones de Café (CENICAFÉ), debido a que los granos pasan por los estados de despulpado y lavado para su fermentación, estas dos etapas tiene un efecto en la densidad de la masa del fruto, que es básicamente producida por el mucílago que rodea los granos de café, el cual representa aproximadamente entre 20% ó 30% del peso del fruto despulpado (25).

El método conocido como fermaestro se obtiene a partir de la utilización de un dispositivo en forma de cono truncado recto con una tapa en lámina plástica, cerrada por todos los lados con perforaciones que permiten que el mucílago degradado sea expulsado y los granos de café permanezcan dentro del dispositivo, cabe destacar que para que el método de fermaestro tenga un resultado óptimo el aparato en forma de cono se debe llenar al ras con el fruto, procurando que todo el recipiente quede lleno y posteriormente ser depositado en el tanque fermentador sobre la masa de café despulpado como se muestra en la figura 4.9 (25).





Figure 4.9: Método de fermentación: fermaestro.  
 (25).

Por último, cuando se va acercando al final del proceso de fermentación se remueve el dispositivo de la masa y se deja caer tres veces sobre la base mayor, desde una altura de 3cm para que los granos se acomoden dentro del mismo (25).

En el proceso de evaluación de este método, se encontraron ventajas al momento de implementar esta herramienta, como primera medida se tiene que el dispositivo es fácil de usar y controla de manera adecuada el proceso de fermentación, por otro lado, este artefacto genera más precisión en el proceso y se evitan reprocesos, como el lavado.

#### 4.1.1 Reacciones físicas y químicas en un proceso de fermentación

Como se ha descrito anteriormente, los procesos de fermentación establecen cambios tanto en el forma y apariencia del grano, como en su composición orgánica, es por esto que es pertinente conocer tales cambios para posteriores análisis.

Básicamente en este proceso, ocurren transformaciones de los componentes que dan forma a la fermentación del café, en primer lugar las bacterias del mucílago por medio de sus enzimas naturales oxidan los azúcares produciendo energía a partir de la molécula de trifosfato de adenosina (ATP), entre los cuales se encuentran el etanol, ácido láctico, ácido acético y dióxido de carbono (31).

Por otra parte, se obtiene otro tipo de alcoholes entre los cuales están propanol, butanol, ácidos como el succínico, fórmico, butírico y sustancias olorosas tales como aldehídos, cetonas y ésteres. De igual manera, ocurren cambios en la textura del café entre los cuales están el color, el olor, la densidad y la acidez, esto provocado por la degradación de los lípidos del mucílago (15).



#### 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

De la misma forma en que hay beneficios en el proceso de fermentación del café, también se pueden tener resultados contrarios, si se sobrepasan los tiempos de fermentación, se realizan mezclas del sustrato, se desconoce el proceso, o en su defecto no se le presta atención a cada una de sus etapas, se pueden generar afectaciones como las ya mencionadas.

La composición química del mucílago de café se produce antes y después del proceso de fermentación del mismo, generando diferentes características, de las cuales se tiene sabores y olores dependiendo de los microorganismos presentes.

En (37) los autores, mostraron que las levaduras del tipo *Saccharomyces cerevisiae* vease figura 4.10, *Candida parapsilosis* y *Pichia guillermondii*, generaron bebidas de calidad y con sabores y olores característicos, entre los cuales encontramos acaramelados y sabor a frutas.

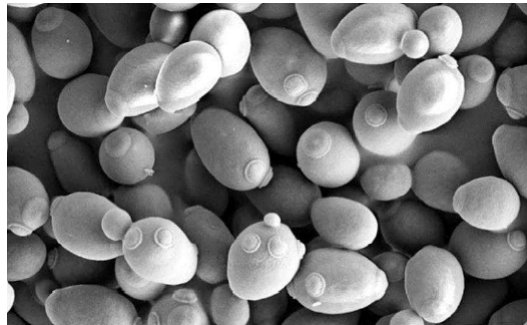


Figure 4.10: Levadura del tipo *Saccharomyces cerevisiae*. Tomado de:  
(2).

De otra manera (9), establece que las cepas *Pichia fermentans* y *Saccharomyces sp* producen bebidas con elevados índices de tipos fructuosos y mantecosos, presentando un aroma a fermentado. La *Pichia fermentans*, también produce bebidas de alta calidad, con sabor a vainilla, y un aroma a flora.

#### Cinética química en el mucílago de café

**Cinética:** es el estudio que permite analizar los cambios en la velocidad y del mecanismo de una reacción en un organismo. En el sustrato, el cual es formado por el mucílago que altera su composición química y física, tales cambios se producen por etapas, en una primera fase la degradación del mucílago de café se da de manera lenta sin cambios acelerados, en una segunda etapa la fermentación se da de forma más acelerada y por último llegando a una fase final donde la degradación ha alcanzado su punto máximo, luego los componentes del sustrato no varían y la degradación disminuye (31).



Por medio de los estudios cinéticos, se establecen modelos matemáticos que describen el fenómeno que se desea analizar, esto se determina mediante ecuaciones que relacionan la degradación del fruto con factores variables tales como el tiempo, la temperatura, entre otros. Para obtener mejores resultados en un estudio de componentes cinéticos es necesario tener claridad en cada concepto que interviene en el proceso, las ecuaciones de datos experimentales, las velocidades de degradación y los tiempos de producción del producto y producciones máximas del mismo.

La cinética química proporciona las bases teóricas que permiten estudiar las reacciones químicas presentes en el proceso de fermentación del mucílago. No obstante, antes de establecer como por medio de la cinética se modela el proceso de fermentación del café, es importante conocer algunos conceptos que son de relevancia en la modelación de reacciones de este tipo (3).

**Estequiometría:** las ecuaciones estequiométricas representan reacciones químicas, es principalmente una relación cuantitativa, que se produce entre la iteración del reactivo y el producto.

**Reacciones monomoleculares:** como su nombre lo indica son reacciones químicas que se caracterizan por tener solo una molécula en el reactante.

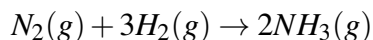
Ejemplo:



Donde *A* representa el reactante, *B* y *C*, son los productos obtenidos a través de la reacción.

Ejemplo:

A continuación se ilustra la ecuación estequiométrica que representa el proceso de formación del  $NH_3$  (amoníaco) es dada por:



Cuya interpretación molecular se representa en la figura 4.11:



#### 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

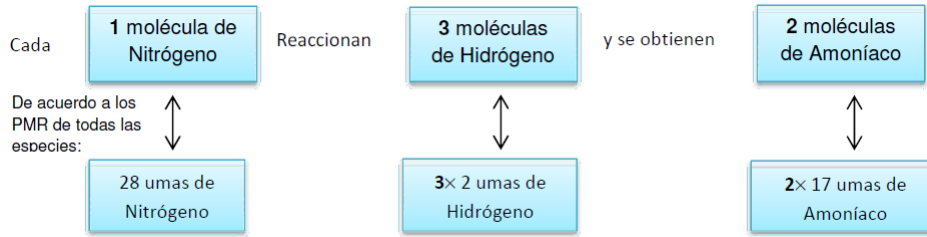
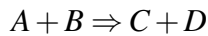


Figure 4.11: Interpretación molecular de una reacción química (amoníaco).  
(34).

**Reacciones bimoleculares:** es aquella reacción química en la cual un par de moléculas del reactivo idénticas o diferentes se mezclan para obtener un producto o un número de moléculas de producto. Este proceso también es conocido como reacciones de asociación.

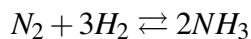
Ejemplo:



Donde  $A$  y  $B$  son los reactantes,  $C$  y  $D$  el producto de la reacción.

En este caso como es una reacción biomolecular se tiene que  $A$  y  $B$  representan los reactivos,  $C$  y  $D$  los productos formados.

Ejemplo:



Donde un volumen de nitrógeno reaccionan con 3 volúmenes de hidrógeno, para producir dos volúmenes de amoníaco, cabe resaltar que en esta reacción el nitrógeno y hidrógeno son los reactivos y el amoníaco el producto (16).

**Ecuación de velocidad:** este tipo de ecuaciones se consideran una reacción química donde  $A$  representa el reactivo que al degradarse proporciona dos productos  $B$  y  $C$ .

La figura 4.12, representa el decrecimiento de la concentración  $A$ , a medida que transcurre el tiempo.





## 4.1. EL CULTIVO DEL CAFÉ Y EL PROCESO DE FERMENTACIÓN

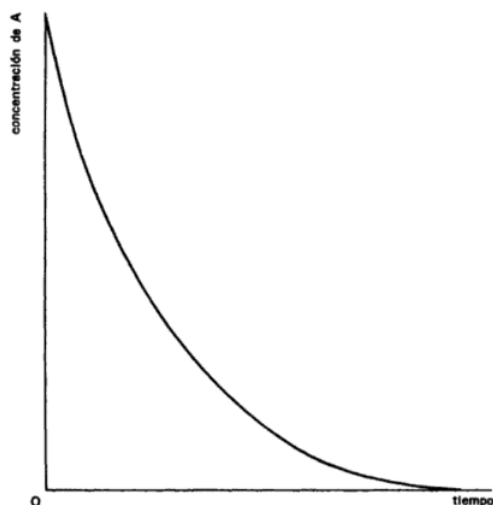


Figure 4.12: concentración del Reactivo A vs el tiempo de reacción.  
 (3).

La velocidad de reacción en cualquier instante del tiempo ( $t$ ) está caracterizada por la pendiente de la curva en algún momento del tiempo transcurrido es decir:

$$Velocidad = -\frac{dA}{dt} \quad (4.15)$$

Claramente se puede evidenciar que la  $\frac{dA}{dt} < 0$ , es decir la velocidad de reacción es igual a la velocidad de decrecimiento de la concentración de A en el tiempo.

Por otra parte, se tiene la formación del producto, que en otras palabras está dada por la velocidad de crecimiento de B o C, respecto al tiempo  $t$ , definido como:

$$Velocidad = \frac{dB}{dt} = \frac{dC}{dt} \quad (4.16)$$

En estudios cinéticos la velocidad de las reacciones químicas están dadas por una relación entre la degradación o descomposición de un reactivo respecto a la velocidad de formación de un producto, en este sentido es pertinente establecer que la velocidad de reacción sufre cambios durante el transcurso de la reacción, es decir, la velocidad inicialmente es máxima, al transcurrir el tiempo de la reacción, está empieza a decrecer, lo que implica que la velocidad de reacción dependa de la concentración de los reactivos, así la concentración A de la figura 4.12 decrece, provocando que la velocidad de reacción también decrezca (3).



$$Velocidad = \alpha(A)^n \quad (4.17)$$

De donde  $n$  representa una constante que se conoce como orden de reacción, relacionando la concentración presente y la velocidad de reacción se obtiene:

$$-\frac{dA}{dt} = K_v(A)^n \quad (4.18)$$

$K_v$  es conocido como una constante de velocidad, y se caracteriza por ser una constante para cada reacción a cada temperatura. De la ecuación (4.18), se puede establecer la velocidad de reacción no depende de la formación de los productos, por el contrario depende de la variación de la concentración de los reactivos (3).

Algunas de las variables que se miden en los procesos de fermentación del café son los azúcares totales (AZT), azúcares reductores (AZR), porcentaje de alcohol y el porcentaje de acidez total expresado como ácido acético, en el mucílago de café.

En (32) se establece ecuaciones estequiométricas, donde se plantea el balance de las reacciones y posteriormente la degradación del sustrato y la formación de los productos en el sistema de fermentación del mucílago del café, el proceso fue producido de manera natural, es decir, sin adiciones al sustrato ni alimentación posterior al sistema, sin retirar productos, a excepción del  $CO_2$  que salió de manera natural. A continuación se presenta el planteamiento de los balances y ecuaciones de degradación del sustrato y formación de productos, según estudios, realizados por la autora.

A continuación se ilustran las ecuaciones estequiométricas de dos tipos de fermentación del café, la fermentación alcohólica y las fermentaciones lácticas.

- **Fermentación alcohólica:**



Donde el sustrato formado por los azúcares reductores ( $C_6H_{12}O_6$ ) representa el reactivo, que al interactuar con las levaduras generan productos tales como energía ( $ATP$ ), etanol ( $2CH_3CH_2OH$ ) y dióxido de carbono ( $2CO_2$ ). La expresión (4.19) nos dice que las levaduras al reaccionar con la glucosa, producen etanol, dióxido de carbono y trifosfato de adenosina ( $ATP$ ).



• **Fermentaciones Lácticas:**



Para esta reacción química el sustrato ( $C_6H_{12}O_6$ ) representa el reactivo que al contacto con las bacterias lácticas producen energía ( $ATP$ ) y ácido láctico ( $2CH_3CHOHCOOH$ ).



En la ecuación estequiométrica (4.21), de igual manera el sustrato que representa el reactivo es ( $C_6H_{12}O_6$ ) que por medio de las bacterias producen, energía ( $ATP$ ), ácido láctico ( $CH_3CHOHCOOH$ ), etanol ( $CH_3CH_2OH$ ) y ( $CO_2$ ).

Es preciso resaltar que las degradaciones y las formaciones de los productos en la fermentación del café dependen del crecimiento y el metabolismo de las levaduras y las bacterias del mucílago. En estudios realizados por (32), se establece una función de decrecimiento para el caso de la degradación de los azúcares totales y reductores en función del tiempo, la cual está representada de la siguiente manera:

$$s(t) = \frac{S_{max}}{1 + be^{k_s t}} \quad (4.22)$$

Donde:

- $s(t)$ : concentración del sustrato, en este caso conformado por azúcares totales (AZT) y azúcares reductores (AZR) dependientes del tiempo, presentes en el mucílago de café.
- $S_{max}$ : % concentración máxima del sustrato.
- $b$ : coeficiente adimensional, que expresa la relación entre la diferencia de la concentración  $S_{max}$  estimada y la concentración real disponible en el tiempo cero, dividido entre la concentración real disponible en el tiempo cero.
- $k_s$ : coeficiente de la velocidad de degradación del sustrato.
- $t$ : tiempo expresado en horas.



De esta función se desprende la expresión cinética con respecto al cambio de las velocidades en la degradación del sustrato en el mucílago de café:

$$-\frac{ds}{dt} = \frac{k_s S_{max} b e^{k_s t}}{(1 + b e^{k_s t})^2} \quad (4.23)$$

Por otra parte, en el caso de la formación de los productos, la investigación de (32), tomó como partida la ecuación logística de crecimiento poblacional de Verhulst, de esta manera consideró que la formación de productos se asimila al crecimiento de organismos, que en las primeras horas es exponencial pero que en algún momento en el tiempo no continua creciendo y por el contrario alcanza un valor máximo, en la cual la concentración pasa a ser constante, así se tiene:

$$p(t) = \frac{p_{max} p_0 e^{k_p t}}{p_0 (e^{k_p t} - 1) + p_{max}} \quad (4.24)$$

De donde:

- $p(t)$ : concentración del producto, alcohol o acidez, en un tiempo determinado.
- $p_0$ : concentración inicial del producto.
- $p_{max}$ : % concentración máxima del producto.
- $k_p$ : constante de velocidad de formación del producto.
- $t$ : tiempo expresado en horas.

Por lo anterior, la función que representa el cambio de las velocidades de formación de productos, es dada por:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k_p (e^{k_p t}) p_{max} (p_{max} - p_0) p_0}{(e^{k_p t} p_0 + p_{max} - p_0)^2} \quad (4.25)$$





## 5. Modelo propuesto

El modelo propuesto pretende mostrar cómo es la dinámica de interacción entre las bacterias y las levaduras, que son los microorganismos con mayor presencia en la fermentación del café; para llegar a este modelo primero se estudiaron elementos claves, como es la tasa de crecimiento intrínseca de microorganismos y el desarrollo teórico que diversos autores aportaron sobre la misma.

Se realizó un experimento con muestras de granos de café, de una finca ubicada en el casco urbano km 2 vía al Valle del municipio de Calarcá, departamento de Quindío-Colombia, de dichos datos se establecieron las pertinentes simulaciones.

El café se recolectó en horas de la mañana más exactamente a las 7:00 am, la variedad del café es Caturra; para la fermentación del café se utilizaron dos métodos ya descritos anteriormente, el primero fue una fermentación seca en 4 recipientes con aproximadamente 250g de café en bava debidamente despulpado, como se muestra en la figura 5.1.



Figure 5.1: Fermentación seca.



Por otra parte, en otros 4 recipientes se reprodujo una fermentación sumergida en la cual se introdujo la misma cantidad de café con  $125\text{mm}^3$  de agua, como se ilustra en la figura 5.2.

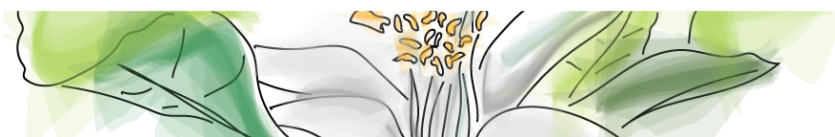


Figure 5.2: Fermentación sumergida.

Para cada una de las respectivas fermentaciones se tomaron medidas del  $pH$  y la temperatura, en diferentes momentos del tiempo, es decir, se establecieron registros con el phmetro (pH-98103) a temperatura ambiente, cada 20 minutos, las fermentaciones se definieron en tiempos determinados, 12,14,16 y 18 horas para cada tipo de fermentación.

A continuación se muestra los resultados de las temperaturas y el  $pH$ :

Para la fermentación sumergida de 14 horas los resultados obtenidos son:





<i>t</i>	<i>T</i>	<i>pH</i>	<i>t</i>	<i>T</i>	<i>pH</i>	<i>t</i>	<i>T</i>	<i>pH</i>
0:0	23°	5,48	4:40	19°	4,99	9:20	17°	4,61
0:20	21°	5,28	5:00	18°	4,98	9:40	17°	4,36
0:40	23°	5,29	5:20	18°	4,53	10:00	17°	4,31
1:00	23°	5,31	5:40	18°	5,83	10:20	17°	4,40
1:20	21°	5,27	6:00	18°	5,21	10:40	17°	4,36
1:40	21°	5,23	6:20	18°	4,93	11:00	17°	4,35
2:00	21°	5,19	6:40	18°	4,95	11:20	17°	4,43
2:20	21°	5,15	7:00	17°	4,96	11:40	17°	4,45
2:40	21°	5,20	7:20	17°	4,64	12:00	17°	4,46
3:00	20°	5,18	7:40	17°	4,70	12:20	17°	4,44
3:20	19°	5,14	8:00	17°	4,52	12:40	17°	4,49
3:40	19°	5,10	8:20	17°	4,54	13:00	17°	4,39
4:00	19°	5,06	8:40	17°	4,64	13:20	17°	4,45
4:20	19°	5,10	9:00	17°	4,56	13:40	17°	4,48
14:00	18°	4,42						

Donde:

t: tiempo T: temperatura *pH*: *pH* actual

A partir de los resultados expuestos en la toma de muestras de las fermentaciones sólidas y sumergidas en sus respectivos intervalos de tiempo, se practicaron regresiones ver figura 5.3 y 5.4 que nos permitieron establecer la correlación de las variables tiempo, *pH* y temperatura, de las cuales la que mejor ajuste tuvo fue la fermentación sumergida de 14 horas, se establecieron escenarios de *pH* vs tiempo y temperatura vs tiempo como se ilustra a continuación. Los otros datos de las simulaciones que no tuvieron un buen ajuste en el experimento están presentes en los anexos.

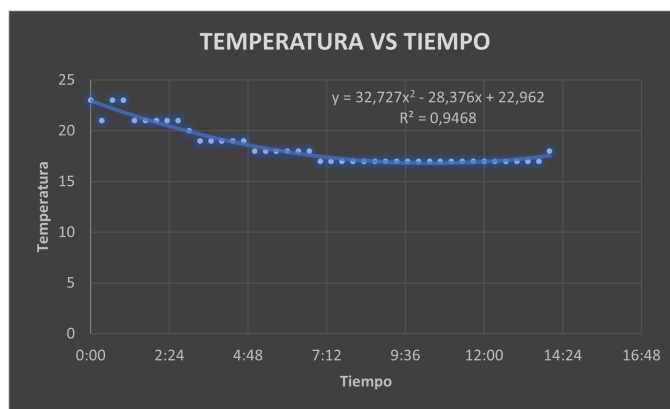


Figure 5.3: Relación temperatura ambiente vs tiempo en fermentación sumergida de café.



La figura 5.3 representa el comportamiento de la temperatura a lo largo del tiempo, generando una función de ajuste cuadrático descrita en la imagen, estableciendo un coeficiente de correlación de  $-0,855153525$ , mostrando una fuerte correlación entre la temperatura y el tiempo de fermentación.

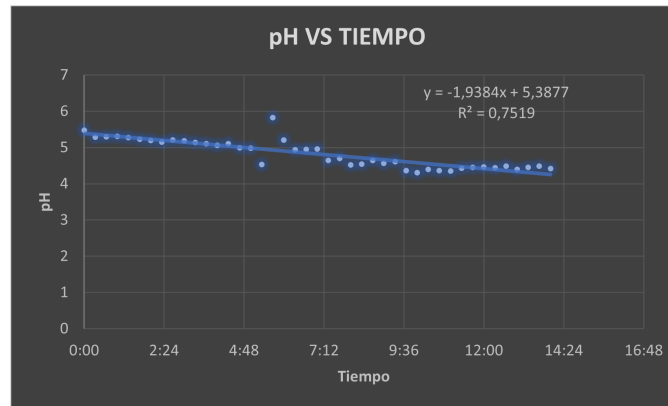


Figure 5.4: Relación entre el  $pH$  y tiempo de fermentación sumergida de café.

La figura 5.4 muestra la variación del  $pH$  en función del tiempo, con la cual se obtiene un ajuste lineal entre las dos magnitudes que muestran una excelente correlación del  $-0,867100643$  entre las dos magnitudes.

Dado que las regresiones anteriormente presentadas, no se ajustaban de manera adecuada al modelo matemático propuesto no se tuvieron en cuenta a la hora de realizar las respectivas simulaciones. No obstante, sirvieron para seleccionar el método de fermentación sumergida para el planteamiento del modelo.

### 5.0.1 Bases teóricas para el modelo propuesto

A continuación se describen los modelos matemáticos y las ecuaciones diferenciales que permiten concretar el modelo que se propone, sobre la dinámica poblacional de una cepa de levaduras.

Se inicia con algunos estudios que detallan el modelamiento de  $\mu$ , que representa la tasa de crecimiento específica de los microorganismos presentes, en este caso en el proceso de fermentación del café;  $\mu$  representa la velocidad a la cual cada individuo se replica, razón fundamental para estudiar este parámetro, que depende de las condiciones ambientales del cultivo de estudio. En particular el trabajo se centrará en la presencia de una cepa de levadura y una de bacteria, exactamente, las que mayor presencia tienen en la fermentación del café. Adicionalmente se detallan las ecuaciones que modelan  $\mu$ .



## Modelo según Monod (1940)

En 1940, Jacques Monod describió una ecuación que relaciona la tasa de crecimiento específica  $\mu$  con la concentración de sustrato limitante ( $S$ ), la cual se conoce en la actualidad como ecuación de Monod. En ella se describe las observaciones de experimentos que él realizó y donde percibió, que a bajas concentraciones de sustrato  $\mu$  variaba, mientras que a mayores concentraciones  $\mu$  era independiente de la concentración de sustrato(43), lo cual expresó matemáticamente, por medio de la siguiente ecuación :

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{k_s + S} \quad (5.1)$$

Con  $k_s$  una constante de saturación media y  $S$  es la concentración de sustrato limitante para la cual la velocidad específica de crecimiento es la mitad de  $\mu_{max}$ . Además,  $k_s$  es un parámetro que nos brinda información acerca de la afinidad de un microorganismo por un sustrato en particular, bajo determinadas condiciones de cultivo. El microorganismo será más afín a un sustrato cuanto menor sea el valor de  $k_s$  de ese sustrato en las condiciones de crecimiento.  $\mu_{max}$  es la máxima velocidad a la que puede crecer un microorganismo en determinadas condiciones de cultivo. Por lo tanto, es importante conocer como varía  $\mu_{max}$  con respecto de las condiciones de cultivo (43).

## Modelo según Kono (1969)

Por naturaleza, en el proceso de fermentación del café, las reacciones químicas que se generan a partir de la degradación del mucílago, permiten el desarrollo de varios microorganismos y la formación de ciertos productos, como ya se ha dicho antes, las bacterias, levaduras, hongos, presentes en el grano de café, al interactuar o reaccionar con el azúcar (presente en el mismo grano) generan productos energía, etanol, entre otros.

Según (21), proponen uno de los primeros modelos matemáticos que se tienen para las tasas de crecimiento de microorganismos y de formación de productos, ellas son:

$$\frac{dC_x}{d\theta} = \kappa_x \Phi C_x \quad (5.2)$$

$$\frac{dC_p}{d\theta} = \kappa_{p1} \Phi C_x + \kappa_{p2} (1 - \Phi) C_x \quad (5.3)$$



$C_x$  y  $C_p$  representan la concentración celular y concentración de producto, respectivamente;  $\kappa_{p1}$  y  $\kappa_{p2}$  son las constantes de la velocidad de producción;  $\kappa_x$  es la tasa de crecimiento constante y  $\Phi$  representa un coeficiente de actividad de crecimiento y presentan los valores de este coeficiente de crecimiento en las diferentes fases del proceso fermentativo.

### Modelo de Ratkowsky (1982)

El modelo de la raíz cuadrada de (35); no tiene fundamento biológico, se basa en la observación de que a temperaturas más bajas, la raíz cuadrada de la tasa específica de crecimiento es lineal frente a la temperatura.

$$\sqrt{\mu} = b(T - T_0) \quad (5.4)$$

Donde  $b$  es el parámetro de Ratkowsky ( $^{\circ}C/h^{-1}$ ),  $T_0$  es la temperatura mínima en la cual hay crecimiento de microorganismos y  $h^{-1}$  es el tiempo en horas.

La relación (5.4) se usó en cultivos de 43 cepas de bacterias, las cuales estaban en rangos de temperatura que oscilaban entre la temperatura mínima (la cual se llamará  $T_{min}$ ) en la cual se observa crecimiento de los microorganismos y por debajo de la temperatura óptima (la cual se llamará  $T_{opt}$ ), en la cual también se desarrollan las bacterias de estudio.

El modelo anterior deja de ser adecuado debido a que no contempla altas temperaturas, por lo cual (36); proponen un modelo empírico no lineal, capaz de describir el crecimiento bacteriano a temperaturas mayores a la óptima ( $T_{opt}$ ).

$$\mu = (b(T - T_{min})[1 - e^{c(T - T_{max})}])^2 \quad T_{min} \leq T \leq T_{max} \quad (5.5)$$

- $T_{min}$  y  $T_{max}$ : temperaturas mínimas y máximas, en las cuales la tasa de crecimiento es 0.
- $c$  y  $b$ : parámetros de Ratkowsky, el coeficiente de regresión de la tasa específica de crecimiento constante, vs la temperatura (inferior a  $T_{opt}$ ).
- $T_{min}$ : equivale al  $T_0$  de (29); la cual puede ser una temperatura conceptual sin significado metabólico en algunos casos.
- $T$ : temperatura en grados kelvin.



En (5.5), si  $T \leq T_{max}$ , la expresión  $\{1 - e^{c(T-T_{max})}\}$  es insignificante, así la ecuación (5.5) se reduce a (5.4). En tanto que si  $T$  se incrementa acercándose a  $T_{max}$ , la expresión  $\{1 - e^{c(T-T_{max})}\}$  toma importancia y finalmente, la tasa de crecimiento decae cuando  $T$  excede  $T_{opt}$  y haciéndose cero cuando  $T = T_{max}$ .

### Modelo de Zwietering (1990)

Posteriormente (47); desarrollan un método para combinar la calidad y cantidad de información que permita predecir el crecimiento de microorganismos en productos alimenticios. Si las variables involucradas en el estudio ( $pH$ ,  $a_w$ ,  $T$  y  $O_2$ ) no se encuentran en un valor óptimo, se genera una reducción en la tasa de crecimiento  $\mu$ . Los autores también plantean el siguiente modelo cinético, mediante una función que resulta ser el cociente entre el valor actual de la variable y el valor óptimo de la misma, (función que se construye para cada variable), con lo cual plantean el siguiente modelo cinético para  $\mu$  :

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu_{opt}} \quad (5.6)$$

Donde:

- $\mu$ : tasa de crecimiento actual ( $h^{-1}$ ).
- $\mu_{opt}$ : tasa de crecimiento óptima.
- $\gamma$ : factor de crecimiento actual.
- Si  $\mu = \mu_{opt} \rightarrow \gamma = 1$ .
- Si  $\mu < \mu_{opt} \rightarrow \gamma < 1$ .

Con estas dos consideraciones la función  $\gamma$  de crecimiento toma valores entre (0, 1). De la ecuación (5.6) se tiene que si  $\mu = \mu_{opt}$  la función factor de crecimiento  $\gamma$ , toma el valor de 1, y en caso en que el valor de  $\mu_{opt}$  es decir  $\gamma \in (0, 1)$  en c.o.c.

El autor (47), asume el supuesto de que el factor de crecimiento puede obtenerse a partir del producto de cada uno de los factores de las variables relacionadas, ya que, se ha mostrado que las mismas tienen efectos independientes sobre la tasa de crecimiento  $\mu$ . Por esta razón, los autores plantean funciones de factores de crecimiento asociadas a la temperatura,  $pH$ , actividad del agua y oxígeno.



Por lo anterior, la función  $\gamma$  de crecimiento es definida como:

$$\gamma = \gamma(T)\gamma(pH)\gamma(a_{\omega})\gamma(O_2) \quad (5.7)$$

Retomando las consideraciones anteriormente planteadas en la ecuación (5.6), si todas las variables involucradas toman sus valores óptimos, la tasa de crecimiento intrínseca  $\mu = \mu_{opt}$ , por el contrario si alguna de las variables toma valores menores a los mínimos o mayores a los máximos, respectivamente, entonces la función de crecimiento  $\gamma$  puede ser cero.

Tomando la ecuación (5.6), el factor  $\gamma(T)$  para la variable temperatura es propuesto como:

$$\gamma(T) = \frac{\mu}{\mu_{opt}} = \left[ \frac{(T - T_{min})\{1 - e^{c(T-T_{max})}\}}{(T_{opt} - T_{min})\{1 - e^{c(T_{opt}-T_{max})}\}} \right]^2 \quad (5.8)$$

De donde se tiene que conocidos los valores de las temperaturas mínimas, máximas y óptima, se puede encontrar el valor del parámetro  $c$  de Ratkowsky hallando la razón de cambio de la tasa intrínseca de crecimiento e igualando a cero.

$$\frac{d\mu}{dT} = 2b(T - T_{min})\{1 - e^{c(T-T_{max})}\}b\{1 - e^{c(T-T_{max})}\} - bc(T - T_{min})e^{c(T-T_{max})} \quad (5.9)$$

De la ecuación (5.8), se tiene que si  $T = T_{opt}$  la derivada es cero, ya que el factor  $\gamma(T)=1$ . Ahora al derivar la ecuación (5.9), como  $b \neq 0$  entonces,  $T_{min} \neq T_{max} \neq T_{opt}$ , así el primer factor no puede ser cero, luego  $\frac{d\mu}{dT} = 0$ , si cumple que:

$$1 - e^{c(T_{opt}-T_{max})} - c(T_{opt} - T_{min})e^{c(T_{opt}-T_{max})} = 0 \quad (5.10)$$

$$1 - (cT_{opt} - cT_{min} + 1)e^{c(T_{opt}-T_{max})} = 0 \quad (5.11)$$

A partir de la ecuación (5.11), ellos pudieron establecer el valor de  $c$ , que reemplazado en (5.8), permitió encontrar el valor de  $\gamma(T)$ .





Por último, para encontrar el valor del parámetro del  $pH$ , se propone un procedimiento similar, en ese caso en la ecuación (5.8) se reemplaza  $T$  por  $pH$ , así se tiene:

$$\gamma(pH) = \frac{\mu}{\mu_{opt}} = \left[ \frac{(pH - pH_{min}) \{1 - e^{c(pH - pH_{max})}\}}{(pH_{opt} - pH_{min}) \{1 - e^{c(pH_{opt} - pH_{max})}\}} \right]^2 \quad (5.12)$$

$$pH_{min} \leq pH \leq pH_{max}$$

### Modelo de Rosso (1995)

Según (40); proponen el modelo Cardinal Temperature and  $pH$  Model (CTPM) con el cual reducen los parámetros sin significado biológico, presentes en los modelos anteriores. Otro elemento tenido en cuenta por estos autores fue la observación experimental, según (45) la temperatura y el  $pH$  tienen efectos independientes sobre  $\mu_{max}$ , todo esto, lo expresaron con el siguiente modelo:

$$\mu_{max}(T, pH) = \mu_{opt} \tau(T) \rho(pH) \quad (5.13)$$

Donde  $\tau(T)$  es una función solo de temperatura y  $\rho(pH)$  es función solo de  $pH$ , las cuales fueron definidas de la siguiente manera:

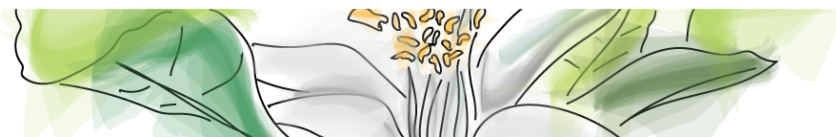
$$\mu_{max} = \begin{cases} 0 & \text{si } T < T_{min} \\ \mu_{opt} \tau(T), & \text{si } T_{min} < T < T_{max} \\ 0 & \text{si } T > T_{max} \end{cases} \quad (5.14)$$

Con  $\tau(t)$  definido como:

$$\tau(t) = \frac{(T - T_{max})(T - T_{min})^2}{(T_{opt} - T_{min}) [(T_{opt} - T_{min})(T - T_{opt}) - (T_{opt} - T_{max})(T_{opt} + T_{min} - 2T)]} \quad (5.15)$$

De manera más resumida  $\mu_{max}$  puede ser escrita como:

$$\mu_{max} = \mu_{opt} \tau(T)$$



Luego con respecto al  $pH$ , se propone una definición similar, la cual está dada por:

$$\mu_{max} = \begin{cases} 0 & \text{si } pH < pH_{min} \\ \mu_{opt}\rho(pH) & \text{si } pH_{min} < pH < pH_{max} \\ 0 & \text{si } pH > pH_{max} \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\rho(pH) = \frac{(pH - pH_{min})(pH - pH_{max})}{(pH - pH_{min})(pH - pH_{max}) - (pH - pH_{opt})^2} \quad (5.17)$$

En la literatura se tiene que otros autores tales como, (38), (18), (36) y (47), han propuesto diferentes modelos que permiten estudiar el efecto de todas o algunas de las siguientes variables: temperatura,  $pH$ , actividad del agua o concentraciones de sal en la tasa de crecimiento intrínseca  $\mu$ .

## 5.0.2 Modelo propuesto

Para la elaboración del modelo propuesto con el cual se dará cumplimiento al objetivo planteado en este trabajo, se observó que en la literatura revisada, se encontraron estudios que demostraban la influencia de algunas variables en la tasa de crecimiento de los microorganismos ( $\mu$ ) presentes en un proceso de fermentación.

Adicionalmente (32), propone dos ecuaciones diferenciales las cuales estudian las tasas de variación del sustrato y la formación de productos en un proceso de fermentación del café ver ecuaciones (4.23) y (4.25).

En este trabajo se presenta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, con el cual se modela la dinámica de interacción de las bacterias y las levaduras a lo largo del tiempo, en un proceso de fermentación de café. Para ello se escogió trabajar con la levadura conocida como *Saccharomyces Cerivecis* y la bacteria *Lactobacillus*, porque ellas son las cepas con mayor presencia en este proceso fermentativo.

Tomando la función de crecimiento logístico propuesta por Landsberg, y descrita por (32), para modelar el sustrato, de donde se desprende el modelo que estudia la degradación de los azúcares totales y reductores:



$$S(t) = \frac{S_{max}}{1 + be^{kst}}$$

Además, retomando algunas de las ecuaciones ya citadas, se tiene el siguiente modelo, para la población de levaduras:

Según Malthus 
$$\frac{dL}{dt} = \mu L \quad (5.18)$$

Según Monod 
$$\frac{dL}{dt} = \mu_{max} \frac{S(t)}{k_s + S(t)} L \quad (5.19)$$

Según Zwietering y Rosso 
$$\frac{dL}{dt} = \mu_{opt} \tau(T) \rho(pH) \frac{S(t)}{k_s + S(t)} L \quad (5.20)$$

En síntesis, el modelo propuesto para la interacción de bacterias y levaduras, tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = \mu_{opt} \tau(T) \rho(pH) \frac{S(t)}{k_s + S(t)} L \\ \frac{dB}{dt} = \mu_{opt} \tau(T) \rho(pH) \frac{S(t)}{k_s + S(t)} B + \alpha BL - \varepsilon B \\ L(0) = L_0 \\ B(0) = B_0 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Donde:

- $L$ : levaduras.
- $B$ : bacterias.
- $S(t)$ : concentración del sustrato.
- $\tau(T)$ : función de temperatura.
- $\rho(pH)$ : función del pH.
- $\mu_{opt}$ : valor intrínscico donde los organismos se reproducen óptimamente.



- $k_s$ : tasa de saturación media.
- $\alpha$ : proporción de bacterias que aprovechan los desechos de las levaduras.
- $\varepsilon$ : proporción de bacterias que mueren.
- $L_0$ : cantidad inicial de levaduras.
- $B_0$ : cantidad inicial de bacterias.

Bajo los siguientes supuestos:

- El sustrato es ilimitado (sólo después de las 72 horas empieza a decrecer).
- La temperatura y el  $pH$  tienen influencia independiente en  $\mu$ .
- Algunas bacterias son saprofitas (se alimentan de los desechos de las levaduras). Por esta razón, el sistema corresponde a una forma de interrelación biológica llamada comensalismo, esto es que una de las especies se beneficia de la otra sin que esta última salga perjudicada. El término  $\alpha BL$  es la expresión que permite acoplar el modelo de interacción entre levaduras y bacterias.
- Las bacterias y las levaduras no mueren por condiciones de  $pH$  y temperatura apropiados.

## Valores de los parámetros

### Función de temperatura y pH

Las funciones  $\tau(T)$  y  $\rho(pH)$ , son las definidas en las ecuaciones (5.15) y (5.17) respectivamente.

### Concentración del sustrato

Para establecer la cantidad de sustrato de café presente en el modelo propuesto, se usó la ecuación descrita por (31),  $S(t) = \frac{S_{max}}{1+be^{kst}}$ , de la cual se encuentran valores para la degradación de azúcares totales y reductores.



Con base en la investigación realizada por el autor (31), se establecen equivalencias con la cantidad de café que se fermentó para este trabajo, y de esta manera se encuentran los valores de  $S_{max}$ ,  $b$  y  $k_s$ , tanto para el sustrato formado por los azúcares totales (AZT) como los azúcares reductores (AZR).

Para el sustrato formado por los AZT, se tiene:

- $S_{max} = 1,36488\%$
- $b = 0,024252$
- $k_s = 0,009024$

Por lo tanto, la ecuación resultante para el sustrato es dada por:

$$AZT = \frac{1,36488}{1 + 0,024252e^{0,009024t}} \quad (5.22)$$

De manera similar, para el sustrato formado por AZR, se encontraron los siguientes valores:

- $S_{max} = 0,82908\%$
- $b = 0,016168$
- $k_s = 0,01034$

De esta manera se tiene que la ecuación resultante para el sustrato es dada por:

$$AZR = \frac{0,82908}{1 + 0,016168e^{0,01034t}} \quad (5.23)$$

Las simulaciones realizadas en este trabajo tuvo en cuenta el sustrato formado por los AZT, el cual presenta una velocidad de degradación mayor que el sustrato formado por AZR.



## Cantidad inicial de levaduras y bacterias

Para determinar la cantidad inicial de levaduras ( $L_0$ ) y la cantidad inicial de bacterias ( $B_0$ ), se partió de la literatura expuesta por (31), en la cual hace referencia a la cantidad de levaduras y bacterias presentes en una fermentación sumergida de café con 50% de agua, dicha cantidad oscila entre 1,5 y 4,9 millones de microorganismos de los cuales el 40% representan las levaduras y el 60% restante determinan las bacterias, es decir, por cada mililitro de mucílago, se encuentran en promedio 3,2 millones de colonias, de las cuales el 40% son levaduras y 60% son bacterias, de esta cantidad, la quinta parte corresponde a la levadura de la cepa *Saccharomyces Cerivecis*, y en el caso de las bacterias se optó por la cepa *Lactobacillus* que representa el 25% del total de las bacterias.

Teniendo en cuenta la cantidad de bacterias y levaduras presente en la investigación de (31) se hacen las conversiones equivalentes a los 250 gr de café caturro debidamente fermentado, le corresponden 47 mililitros de mucílago, en el cual hay presente aproximadamente 150,4 millones de colonias de microorganismos, de ellas, 60,16 millones representan las levaduras y por lo tanto en la cepa en la cual estamos interesados *Saccharomyces Cerivecis* corresponde a la quinta parte del total de levaduras, es decir 12,032 millones de levaduras. En el caso de las bacterias del total de colonia de microorganismos le corresponde 90,24 millones de bacterias, y teniendo en cuenta el tipo de bacteria predominante *Lactobacillus* representa el 25% y esto corresponde a 22,56 millones de bacterias.

## Tasa de crecimiento intrínseca

La tasa de crecimiento intrínseca denotada por  $\mu_{opt}$ , se tomó de (7), en esta investigación el valor de  $\mu_{opt} = 0,5/h$ .

### 5.0.3 Simulaciones

A continuación se detalla el modelo matemático, las condiciones iniciales y el valor de los parámetros para el desarrollo de las simulaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = \mu_{opt} \tau(T) \rho(pH) \frac{S(t)}{k_s + S(t)} L \\ \frac{dB}{dt} = \mu_{opt} \tau(T) \rho(pH) \frac{S(t)}{k_s + S(t)} B + \alpha BL - \varepsilon B \\ L(0) = L_0 \\ B(0) = B_0 \end{array} \right. \quad (5.24)$$





Para el caso de los AZT se tiene:

- $s(t) : AZT = \frac{1,36488}{1 + 0,024252e^{0,009024t}}$
- $k_s : 0,009024$
- $\mu_{opt} : 0.5/h$
- $\alpha : 0.25$
- $\varepsilon : 0.1$
- $L(0) : 12,032$  millones
- $B(0) : 22,56$  millones

Las simulaciones que muestran la dinámica de poblaciones de levaduras y bacterias, se trabajó en el software Matlab, a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden, que permite obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, se realizó un análisis de sensibilidad de los parámetros, tomando valores aleatorios, para  $\alpha$  y  $\varepsilon$ , de una distribución uniforme, variando entre 0 y 1. De esta manera se determino que  $\alpha = 0.25$  y  $\varepsilon = 0.1$  fueron los valores que mejor se ajustaron al proceso de fermentación del café y ilustraron el fenómeno conocido como comensalismo.

A continuación se ilustra el comportamiento de las levaduras en un proceso de fermentación del café de 18 horas:

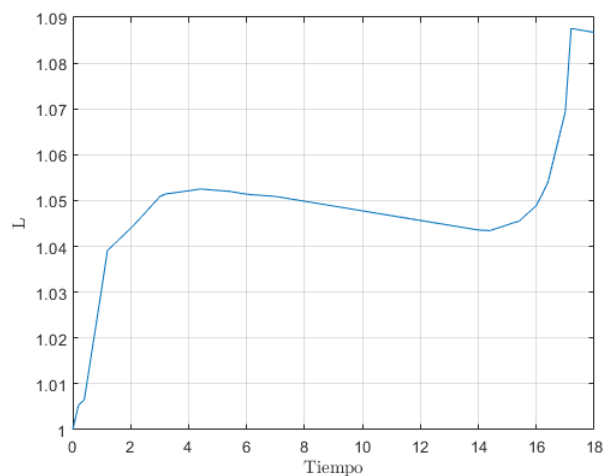


Figure 5.5: Comportamiento del crecimiento de la cepa levadura *Saccharomyces Cerivecis*



Se puede observar que el comportamiento se asemeja a las curvas sigmoideal, es decir, las levaduras crecen en las primeras 4 horas del proceso de fermentación del café, luego se estabilizan y decrecen una mínima cantidad, para finalmente volver a tener un crecimiento, después de las 14 horas de fermentación.

Por otro lado en el caso de las bacterias se tiene el siguiente gráfico:

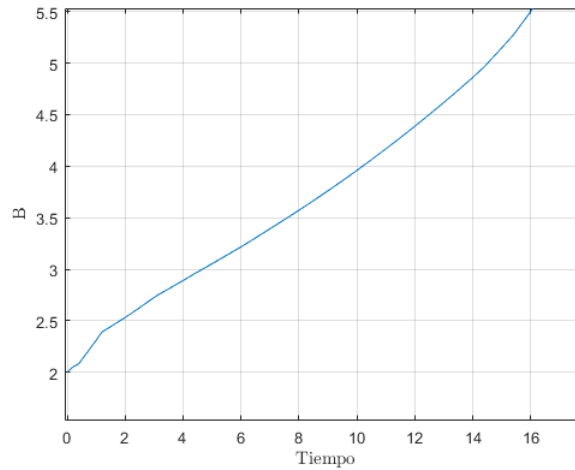


Figure 5.6: Comportamiento del crecimiento de la especie de bacterias *Lactobacillus*

De la gráfica se puede inferir que las bacterias tienen siempre un comportamiento creciente, evidenciando que las condiciones para su desarrollo no se ven afectadas durante el proceso de fermentación de 18 horas.

Por último la interacción entre la cepa de levadura *Saccharomyces Cerivecis* y la especie de bacteria *Lactobacillus* , tuvo el siguiente comportamiento:

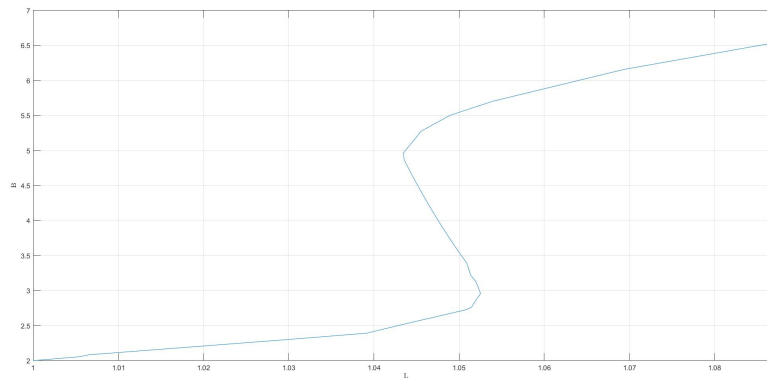


Figure 5.7: Dinámica de interacción entre *Saccharomyces Cerivecis* y *Lactobacillus*



El comportamiento en el crecimiento de la cepa *Saccharomyces Cerivecis* de levadura vs la cepa *Lactobacillus* de bacterias, evidencia la interacción biológica entre las dos especies, este proceso es conocido como comensalismo; ya que en ningún momento se observa que las levaduras detengan su crecimiento, o se vean afectadas por ser soporte alimenticios de las bacterias.

Con el fin de observar el impacto que tiene el parámetro  $\alpha$  sobre el término que acopla la interacción entre la levadura *Saccharomyces Cerivecis* y la bacteria *Lactobacillus*, se contemplaron más escenarios tomando valores para  $\alpha = 0.01$  y  $\varepsilon = 0$  obteniendo como resultado:

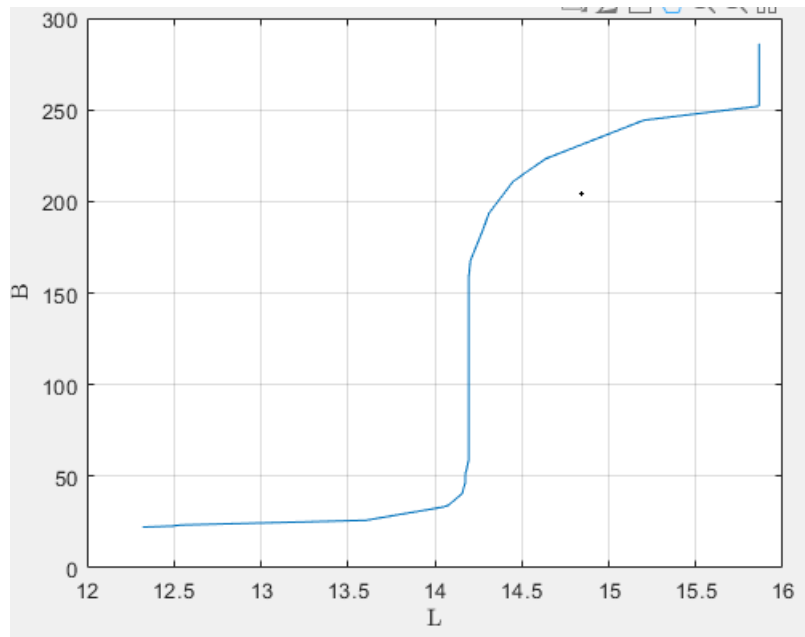


Figure 5.8: Dinámica de interacción entre *Saccharomyces Cerivecis* y *Lactobacillus* con  $\alpha=0,01$

En la figura (5,8), considerando el periodo de 18 horas de fermentación en el cual las bacterias no mueren, con  $\alpha = 0.01$ , se evidencia que tanto las levaduras y bacterias después de 14 horas de fermentación presentan un comportamiento exponencial hasta las 14,5 horas y luego su crecimiento es más lento.



Para el caso de  $\alpha = 0.02$  y  $\varepsilon = 0$  se obtuvo:

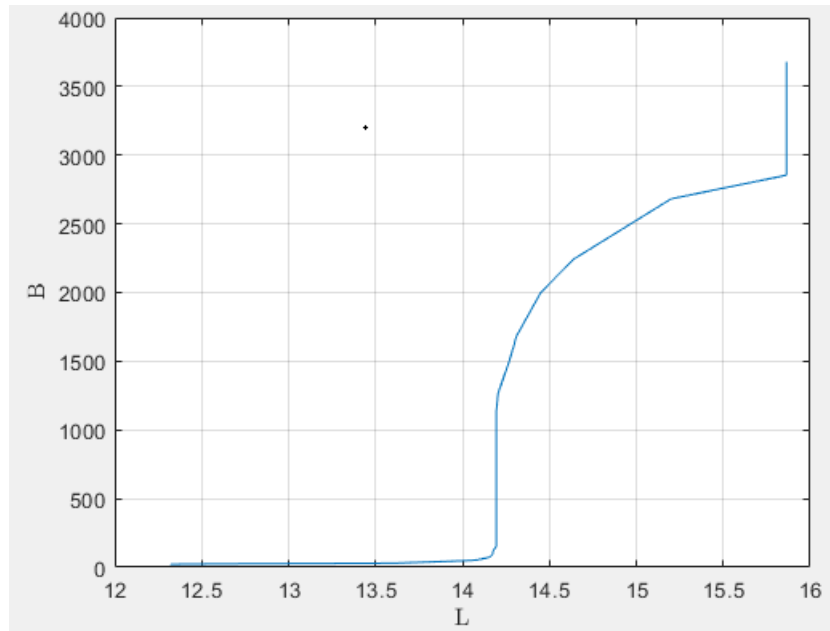


Figure 5.9: Dinámica de interacción entre *Saccharomyces Cerivecis* y *Lactobacillus* con  $\alpha=0,02$

En la figura (5,9), considerando  $\alpha = 0.02$ , se evidencia que las bacterias y las levaduras tienen un crecimiento mínimo hasta las 14 horas de fermentación y de hay hasta las 16 horas tiene un comportamiento logarítmico.



$\alpha = 0.1$  y  $\varepsilon = 0$  obteniendo como resultado:

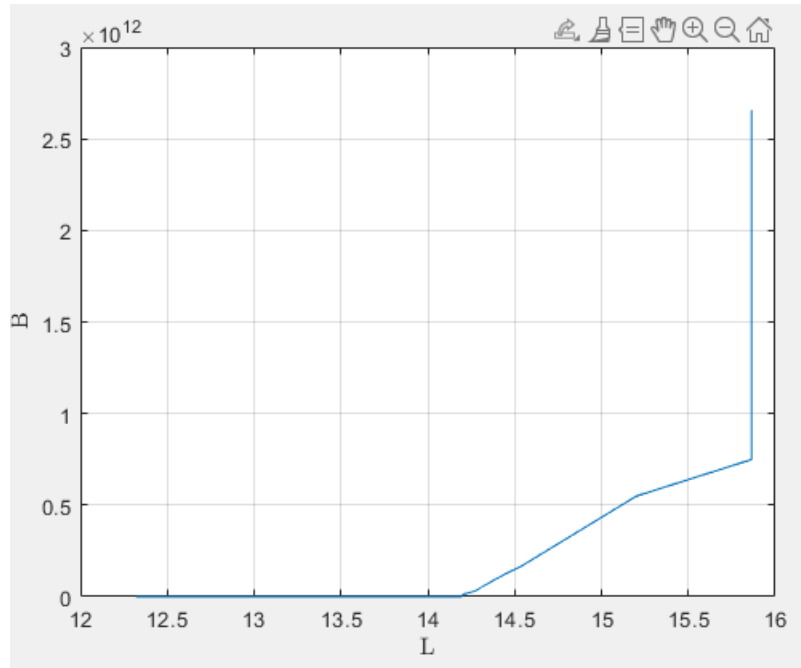


Figure 5.10: Dinámica de interacción entre *Saccharomyces Cerivecis* y *Lactobacillus* con  $\alpha=0,1$

En la figura 5,10 el creciento de las levaduras y bactiras en las 18 horas de fermentación es aún menor que en las figurras 5,8 y 5,9.



$\alpha = 0.25$  y  $\varepsilon = 0$  obteniendo como resultado:

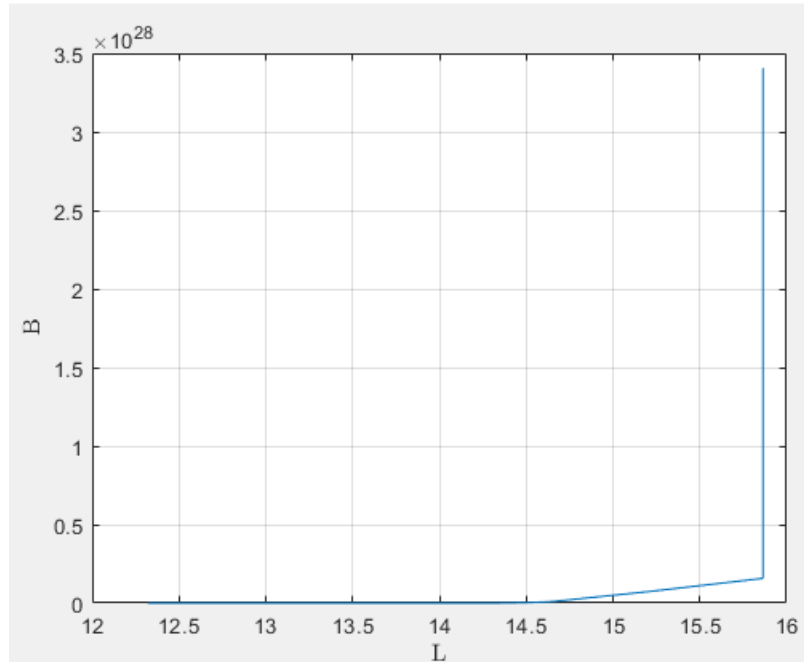


Figure 5.11: Dinámica de interacción entre *Saccharomyces Cerivecis* y *Lactobacillus* con  $\alpha=0,25$

En la figura 5,11 tomando a  $\alpha = 0,25$ , el crecimiento de las levaduras y bacterias es menor que en los otros resultados, de esta manera se evidencia que a un valor mayor de  $\alpha$ , el crecimiento de las bacterias y levaduras en un proceso de fermentación del café de 18 horas de duración es más lento.







## 6. Objetivos

### 6.0.1 Objetivo General

Construir y analizar un modelo matemático que describa alguno de los elementos presentes en el proceso de fermentación del café.

### 6.0.2 Objetivos Específicos

- Identificar las variables que intervienen en el proceso de fermentación del café.
- Estudiar las reacciones químicas, los cambios físicos y los microorganismos presentes en la fermentación del café.
- Proponer un modelo matemático que describa la dinámica de poblaciones de algunos microorganismos presentes en la fermentación del café.
- Apoyarse en métodos numéricos que desarrollen escenarios de simulación para analizar el comportamiento de las variables.



## 7. Metodología

Descripción del paradigma, del enfoque, del método de investigación y de las fases necesarias para la ejecución de la propuesta.

Se reconocen tres paradigmas: el empírico analítico, el histórico hermenéutico o interpretativo y el crítico-social; tres enfoques: cuantitativo, cualitativo o mixto; y un conjunto amplio de métodos: etnográfico, investigación-acción-participación, investigación colaborativa, estudio de casos, investigación evaluativa, investigación histórica, investigación experimental, investigación cuasi-experimental, investigación correlacional, etc.

De igual forma, implica, entre otros, describir la población, el contexto, las fases, los instrumentos, las técnicas, las formas para el análisis de la información y las actividades específicas para cumplir los objetivos establecidos.





## 8. Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo de investigación se produjeron a partir de la fermentación de café caturra y el tipo de fermentación usada. Los microorganismos identificados en el proceso de fermentación del café fueron las levaduras, bacterias y algunos hongos, por otra parte las variables que se estudiaron fueron principalmente la temperatura, azúcares, el sustrato y el pH.

Se evidenció que en el proceso de fermentación de café propuesto en este trabajo de investigación, los microorganismos presentes en este estudio subsisten, sin que afecte uno del otro, esta característica es conocida como sistema de tipo comensalismo en el cual las especies subsisten en el medio donde se desarrollan.

Por otro lado, las levaduras y las bacterias no decrecen, puesto que las temperaturas registradas en el experimento fueron en un nivel óptimo, es decir estuvieron entre 17°C y 23°C, en este rango de temperatura no se registran muertes de ninguna de las dos especies, las levaduras mostraron semejanza con curvas senoidales, es decir, en las primeras 4 horas de fermentación crecen, de las 4 a las 16 horas toma un comportamiento constante, para después volver a crecer. En el caso de las bacterias su comportamiento es creciente a lo largo de las 18 horas de fermentación.

Se construyó un modelo matemático fundamentado principalmente por investigaciones realizadas por diferentes autores, se pudo evidenciar el comportamiento de algunos microorganismos presentes en el proceso de fermentación del café, principalmente se estudió con más detalle la cepa de levadura *Saccharomyces Cerevisiae* y la cepa de bacteria *Lactobacillus*.

El método numérico utilizado para las simulaciones del modelo fue el de Runge-Kutta de cuarto orden, que permite obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales, ilustrando que a medida que el parámetro  $\alpha$  es mayor el crecimiento de la levadura *Saccharomyces*

*Cerivecis* y la cepa de bacteria *Lactobacillus* es más lento.





## 9. Trabajos futuros

Algunos trabajos que se pueden realizar a partir de este proyecto de investigación son:

- Considerar otra variedad de café para establecer modelos matemáticos que permitan evidenciar la dinámica de los microorganismos presentes en el proceso de fermentación del café.
- Realizar estudios en los cuales subsistan otros tipos de microorganismos presentes en el proceso de fermentación del café.
- Observar la dinámica de los microorganismos presentes en el proceso de fermentación, teniendo en cuenta otros tipos de temperaturas donde los microorganismos puedan tener otros tipos de comportamientos.
- Relacionar diferentes tipos de fermentación con una misma variedad de café y con otro tipo de variedades, para estudiar la influencia del proceso fermentativo en taza.
- Realizar estudios microbiológicos que permitan cuantificar valores más exactos para la cantidad de bacterias y levaduras de mayor presencia en un cultivo de fermentación.





## 10. Resultados Esperados

Con el desarrollo de la propuesta se espera obtener un modelo matemático sencillo que permita modelar alguna de las reacciones químicas o físicas presentes en el proceso de fermentación del café.

Socializar los resultados obtenidos con alguna comunidad académica relacionada con la temática tratada.

Ofrecer un documento en el cual se ofrezcan detalles de proceso de fermentación, a manera de documento base que ayude con el estudio al que se inicia en esta temática.





## **11. Bibliografía**



## Bibliografía

- [1] Arcila, J. (2007). Crecimiento y desarrollo de la planta de café. *Sistemas de producción de café en Colombia*, 21-60.
- [2] Arias Amaya, N. (2020). Determinación de las características fisicoquímicas y microbianas del mucílago del café para la bioproducción de alcohol y la simulación de su obtención con el Software Aspen Hysys y Aspen Plus.
- [3] Avery, H. E. (1982). *Cinética química básica y mecanismos de reacción*. Reverté.
- [4] Bailón, R. (2012). Fermentaciones Industriales. Universidad Nacional del Callao, Perú.
- [5] Blanchard, P. Devaney, R. Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. (Boston University).
- [6] Carmona, P. Dumar, A. Cardona, S. (2007). *Un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias*.
- [7] Castañeda, M. (2019). Estequiometría y cinética del crecimiento microbiano.
- [8] Crank, J. (1979). *The mathematics of diffusion*. Oxford university press.
- [9] De Melo Pereira, G. V., Soccol, V. T., y Soccol, C. R. (2016). Current state of research on cocoa and coffee fermentations. *Current Opinion in Food Science*, 7, 50-57.
- [10] Edwards, C. Penney, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*.
- [11] Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [12] Escobar, J. (2008). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en maple*. Universidad de Antioquia.

- [13] Evangelista, S. R., Silva, C. F., da Cruz Miguel, M. G. P., de Souza Cordeiro, C., Pinheiro, A. C. M., Duarte, W. F., & Schwan, R. F. (2014). Improvement of coffee beverage quality by using selected yeasts strains during the fermentation in dry process. *Food Research International*, 61, 183-195.
- [14] DE, A. D. C. Y. V., & DE MICROBIOLOGÍA, L. A. B. O. R. A. T. O. R. I. O. S. ORGANIZACIÓN DE LAS NACIONES UNIDAS PARA LA AGRICULTURA Y LA ALIMENTACIÓN(1992) (FAO).
- [15] Fajardo, I. Sanz, J. (2013). *La calidad física y el rendimiento del Café en los procesos de Beneficio Tradicional y Beneficio Ecológico (BECOLSUB)*. Cenicafé, 120-178.
- [16] Fernández, J. L. G. González, M. P. C. Alejandro, M. P. Q. (1991). *Química: estequiometría, estructuras, termoquímica, equilibrios, química orgánica*. McGraw-Hill.
- [17] Flórez, C. P., Ibarra, L. N., Gómez, L. F., Carmona, C. Y., Castaño, A., & Ortiz, A. (2013). Estructura y funcionamiento de la planta de café. Cenicafé.
- [18] González, N. Zamora, J. Pérez, C. Salazar, E. Pérez, E. Hernández, A. (2009). MODELACIÓN DE LA INFLUENCIA DEL pH Y LA TEMPERATURA EN LA VELOCIDAD DE CRECIMIENTO DE *Tsukamurella paurometabola*C-924. *Chemical Technology*, 29(1), 59-62.
- [19] Haile, M., & Kang, W. H. (2019). The role of microbes in coffee fermentation and their impact on coffee quality. *ournal of Food Quality*, 2019.
- [20] Hernández Ballesteros, G. K., & López Ríos, L. M. (2020). Identificación de las condiciones óptimas de crecimiento de cepas tipo *LACTOBACILLUS* en un proceso fermentativo de pulpa de café.
- [21] Kono, T., & Asai, T. (1969). Kinetics of fermentation processes. *Biotechnology and Bioengineering*, 11(3), 293-321.
- [22] Ladino-Garzón, W., Cortés-Macías, E. T., Gutiérrez-Guzmán, N., & Amorocho-Cruz, C. M. (2016). Calidad de taza de café (*Coffea arabica* L.) procesado en fermentación semi-seca. *Agronomía Colombiana*, 34(1 supl), S281-S283.
- [23] Landsberg, J. (1977). Some useful equations for biological studies. *Experimental agriculture*. 1(3) 273-286.
- [24] Malumbres, J. L. V. (1996). *Métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Universidad de la Rioja.
- [25] Martínez, A. Pavon, J. Sanz, J. (2013). Método Fermaestro: *Para determinar la finalización de la Fermentación del mucílago de café*. Centro nacional de investigaciones de café, Manizales-Colombia.





- [26] Mora Artillo, M. Á. D. (2015). Ecuaciones diferenciales ordinarias en la modelización de procesos demográficos naturales.
- [27] Muñoz, L. G. (2011). La inestabilidad climática: nueva realidad para la caficultura colombiana. *Ensayos sobre economía cafetera*, 27, 5-9.
- [28] Pérez, J. (2013). *Economía Cafetera Y Desarrollo Económico en Colombia*. Universidad de Bogotá, Bogotá-Colombia.
- [29] Puerta, G. (2001). *Comó garantizar la buena calidad de la bebida del café y evitar los defectos*. Centro nacional de investigaciones de café, Chinchina-Caldas.
- [30] Puerta, G. (2010). *Fundamentos del proceso de Fermentación en el Beneficio del Café*. Centro nacional de investigaciones de café, Chinchiná-Colombia.
- [31] Puerta, G. (2012). *Factores, procesos y controles en la Fermentación del Café*. Centro nacional de investigaciones de café, Manizales-Colombia.
- [32] Puerta, G. (2013). Cinética química de la fermentación del mucílago de café a temperatura ambiente. *Revista Cenicafé*.64(1): 42-59.
- [33] Puerta, G. J, Echeverry. (2015). *Fermentación controlada del café: Tecnología para agregar valor a la calidad*, Manizales-Colombia.
- [34] Puppo, M. C. Cerruti, C. F. Quiroga, A. V. (2017). Química General para Agronomía.
- [35] Ratkowsky, A. Lowry, R. Mcmeekin, T. Stokes, A. Chandler, R.(1983). Model for bacterial culture growth rate throughout the entire blokinetic temperature range. *Journal of Bacterioly*.154(3): 1222-1226.
- [36] Presser, K. A. Ross, T. Ratkowsky, D. A. (1998). Modelling the growth limits (growth/no growth interface) of Escherichia coli as a function of temperature, pH, lactic acid concentration, and water activity. *Applied and Environmental Microbiology*, 64(5), 1773-1779.
- [37] Ribeiro, L. S. Miguel, M. G. D. C. P. Evangelista, S. R. Martins, P. M. M. van Mullem, J. Belizario, M. H. Schwan, R. F. (2017). Behavior of yeast inoculated during semi-dry coffee fermentation and the effect on chemical and sensorial properties of the final beverage. *Food Research International*, 92, 26-32.
- [38] Garrido-Carralero, N. Sabadí-Díaz, R. Domenech-López, F. Hurtado-Vargas, R. Ribas-García, M. (2011). Metodología para la modelación matemática de procesos. Caso de estudio, fermentación alcohólica. ICIDCA. *Sobre los Derivados de la Caña de Azúcar*, 45(1), 37-47.
- [39] Rodríguez-León, J. A., de Carvalho, J. C., Pandey, A., Soccol, C. R., & Rodríguez-Fernández, D. E. (2018). Kinetics of the solid-state fermentation process. *In Current developments in biotechnology and bioengineering* (pp. 57-82). Elsevier.



- [40] Rosso, L., Lobry, JR, Bajard, S. y Flandrois, JP (1995). Modelo conveniente para describir los efectos combinados de la temperatura y el pH sobre el crecimiento microbiano. *Microbiología aplicada y ambiental* , 61 (2), 610-61.
- [41] Schawan, F. Fleet, G. (2014). *Cocoa and Coffee fermentations*. CRC Press.
- [42] Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable; trascendentes tempranas, Mexico. Cengage Learning. Séptima edición.
- [43] Torres, A. D. (1996). Evaluación de los parámetros cinéticos de la ecuación de Monod. *Ingeniería e investigación*, (33), 123-138.
- [44] Vega, M. Q., y Castro, Y. R. (2012). Estudio Preliminar de la Producción de Biogás a partir de la Digestión Anaerobia del Mucílago de Café utilizando Lodo Estiércol de Cerdo como Inóculo. *Universidad Industrial de Santander (UIS)* .
- [45] Zwietering, M. H. Wiltjes, T. De Wit, J. C. Van't Riet, K. (1992). A decision support system for prediction of the microbial spoilage in foods. *Journal of Food Protection*, 55(12), 973-979.
- [46] Zill, D. (1997). Ecuaciones diferenciales con aplicación de modelado. Loyola Marymount university.
- [47] Zwietering, M. Riet, K. Muermans, M. Rombouts, F. Wiltjes, T. (2001). Development and validation of a combined temperature, water activity, pH model for bacterial growth rate of *Lactobacillus curvatus*. *International journal of food microbiology*, 63(1-2), 57-64.





## Anexos

Para la fermentación sólida de 12 horas se obtuvo:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,35	4:20	19°	4,93	8:20	17°	4,81
0:20	21°	5,34	4:40	19°	4,97	8:40	17°	4,76
0:40	23°	5,30	5:00	18°	4,94	9:00	17°	4,70
1:00	23°	5,25	5:20	18°	5,83	9:20	17°	4,74
1:20	21°	5,19	5:40	18°	5,70	9:40	17°	4,43
1:40	21°	5,18	6:00	18°	5,55	10:00	17°	4,46
2:00	21°	5,18	6:20	18°	5,10	10:20	17°	4,48
2:20	21°	5,15	6:40	18°	5,41	10:40	17°	4,45
2:40	21°	5,13	7:00	17°	4,99	11:00	17°	4,55
3:00	20°	5,15	7:20	17°	4,94	11:20	17°	4,54
3:20	19°	5,14	7:40	17°	4,99	11:40	17°	4,55
3:40	19°	5,07	8:00	17°	4,89	12:00	17°	4,51
4:00	19°	5,03						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual



Para la fermentación sólida de 14 horas los resultados obtenidos son:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,35	4:40	19°	4,98	9:20	17°	4,61
0:20	21°	5,37	5:00	18°	4,94	9:40	17°	4,47
0:40	23°	5,31	5:20	18°	5,57	10:00	17°	4,48
1:00	23°	5,27	5:40	18°	5,62	10:20	17°	4,40
1:20	21°	5,22	6:00	18°	5,62	10:40	17°	4,42
1:40	21°	5,17	6:20	18°	5,19	11:00	17°	4,44
2:00	21°	5,18	6:40	18°	4,93	11:20	17°	4,48
2:20	21°	5,16	7:00	17°	4,98	11:40	17°	4,42
2:40	21°	5,14	7:20	17°	4,88	12:00	17°	4,51
3:00	20°	5,14	7:40	17°	4,98	12:20	17°	4,48
3:20	19°	5,13	8:00	17°	4,80	12:40	17°	4,47
3:40	19°	5,09	8:20	17°	4,69	13:00	17°	4,41
4:00	19°	5,03	8:40	17°	4,85	13:20	17°	4,52
4:20	19°	4,95	9:00	17°	4,62	13:40	17°	4,54
14:00	18°	4,49						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual



Fermentación sólida 16 horas:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,36	5:40	18°	5,59	11:00	17°	4,43
0:20	21°	5,38	6:00	18°	5,60	11:20	17°	4,52
0:40	23°	5,30	6:20	18°	5,07	11:40	17°	4,44
1:00	23°	5,26	6:40	18°	5,21	12:00	17°	4,51
1:20	21°	5,25	7:00	17°	4,99	12:20	17°	4,51
1:40	21°	5,17	7:20	17°	4,92	12:40	17°	4,47
2:00	21°	5,18	7:40	17°	4,98	13:00	17°	4,49
2:20	21°	5,16	8:00	17°	4,83	13:20	17°	4,54
2:40	21°	5,14	8:20	17°	4,72	13:40	17°	4,55
3:00	20°	5,13	8:40	17°	4,76	14:00	18°	4,49
3:20	19°	5,13	9:00	17°	4,61	14:20	18°	4,51
3:40	19°	5,09	9:20	17°	4,73	14:40	19°	4,55
4:00	19°	5,07	9:40	17°	4,45	15:00	19°	4,49
4:20	19°	4,99	10:00	17°	4,45	15:20	19°	4,47
4:40	19°	4,99	10:20	17°	4,49	15:40	20°	4,47
5:00	18°	4,95	10:40	17°	4,36	16:00	21°	4,47
5:20	18°	5,57						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual



Fermentación sólida 18 horas:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,43	6:00	18°	5,57	12:00	17°	4,50
0:20	21°	5,34	6:20	18°	5,21	12:20	17°	4,56
0:40	23°	5,27	6:40	18°	5,24	12:40	17°	4,46
1:00	23°	5,25	7:00	17°	4,96	13:00	17°	4,52
1:20	21°	5,19	7:20	17°	4,94	13:20	17°	4,56
1:40	21°	5,19	7:40	17°	4,88	13:40	17°	4,57
2:00	21°	5,19	8:00	17°	4,69	14:00	18°	4,50
2:20	21°	5,14	8:20	17°	4,77	14:20	18°	4,53
2:40	21°	5,12	8:40	17°	4,64	14:40	19°	4,56
3:00	20°	5,16	9:00	17°	4,58	15:00	19°	4,51
3:20	19°	5,14	9:20	17°	4,74	15:20	19°	4,48
3:40	19°	5,08	9:40	17°	4,40	15:40	20°	4,45
4:00	19°	5,01	10:00	17°	4,36	16:00	21°	4,46
4:20	19°	4,97	10:20	17°	4,36	16:20	21°	4,50
4:40	19°	4,95	10:40	17°	4,42	16:40	22°	4,48
5:00	18°	4,96	11:00	17°	4,43	17:00	23°	4,44
5:20	18°	5,92	11:20	17°	4,46	17:20	24°	4,41
5:40	18°	5,73	11:40	17°	4,47	17:40	24°	4,49
18:00	23°	4,45						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual



Para las fermentaciones de sumergidas se obtubieron los siguientes registros:

Fermentación sumergida 12 horas:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,46	4:20	19°	5,10	8:20	17°	4,53
0:20	21°	5,29	4:40	19°	4,99	8:40	17°	4,62
0:40	23°	5,33	5:00	18°	4,98	9:00	17°	4,62
1:00	23°	5,34	5:20	18°	4,70	9:20	17°	4,54
1:20	21°	5,27	5:40	18°	5,84	9:40	17°	4,35
1:40	21°	5,21	6:00	18°	5,18	10:00	17°	4,34
2:00	21°	5,20	6:20	18°	4,51	10:20	17°	4,41
2:20	21°	5,15	6:40	18°	4,92	10:40	17°	4,33
2:40	21°	5,22	7:00	17°	4,89	11:00	17°	4,37
3:00	20°	5,20	7:20	17°	4,62	11:20	17°	4,42
3:20	19°	5,15	7:40	17°	4,62	11:40	17°	4,46
3:40	19°	5,08	8:00	17°	4,54	12:00	17°	4,44
4:00	19°	5,05						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual



Fermentación sumergida 16 horas:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,42	5:20	18°	4,74	10:40	17°	4,33
0:20	21°	5,27	5:40	18°	5,86	11:00	17°	4,38
0:40	23°	5,29	6:00	18°	5,22	11:20	17°	4,43
1:00	23°	5,28	6:20	18°	4,72	11:40	17°	4,41
1:20	21°	5,27	6:40	18°	4,93	12:00	17°	4,43
1:40	21°	5,23	7:00	17°	4,93	12:20	17°	4,44
2:00	21°	5,21	7:20	17°	4,63	12:40	17°	4,46
2:20	21°	5,16	7:40	17°	4,61	13:00	17°	4,38
2:40	21°	5,18	8:00	17°	4,52	13:20	17°	4,46
3:00	20°	5,17	8:20	17°	4,58	13:40	17°	4,47
3:20	19°	5,13	8:40	17°	4,66	14:00	18°	4,43
3:40	19°	5,11	9:00	17°	4,66	14:20	18°	4,42
4:00	19°	5,06	9:20	17°	4,51	14:40	19°	4,54
4:20	19°	5,08	9:40	17°	4,37	15:00	19°	4,51
4:40	19°	4,99	10:00	17°	4,32	15:20	19°	4,43
5:00	18°	4,98	10:20	17°	4,36	15:40	20°	4,40
16:00	21°	4,41						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual



Fermentación sumergida 18 horas:

t	T	pH	t	T	pH	t	T	pH
0:0	23°	5,47	6:00	18°	5,10	12:00	17°	4,46
0:20	21°	5,24	6:20	18°	4,85	12:20	17°	4,40
0:40	23°	5,31	6:40	18°	4,94	12:40	17°	4,41
1:00	23°	5,30	7:00	17°	5,02	13:00	17°	4,38
1:20	21°	5,27	7:20	17°	4,68	13:20	17°	4,48
1:40	21°	5,24	7:40	17°	4,64	13:40	17°	4,50
2:00	21°	5,21	8:00	17°	4,53	14:00	18°	4,45
2:20	21°	5,17	8:20	17°	4,64	14:20	18°	4,48
2:40	21°	5,17	8:40	17°	4,64	14:40	19°	4,53
3:00	20°	5,17	9:00	17°	4,70	15:00	19°	4,49
3:20	19°	5,16	9:20	17°	4,60	15:20	19°	4,41
3:40	19°	5,11	9:40	17°	4,36	15:40	20°	4,40
4:00	19°	5,08	10:00	17°	4,30	16:00	21°	4,41
4:20	19°	5,07	10:20	17°	4,34	16:20	21°	4,49
4:40	19°	5,00	10:40	17°	4,34	16:40	22°	4,46
5:00	18°	4,98	11:00	17°	4,37	17:00	23°	4,41
5:20	18°	5,01	11:20	17°	4,41	17:20	24°	4,38
5:40	18°	5,81	11:40	17°	4,40	17:40	24°	4,51
18:00	23°	4,40						

Donde:

t: tiempo T: temperatura pH: pH actual







**Licenciatura en Matemáticas**

**Tel: (57) 6 735 9300 Ext**

**Carrera 15 Calle 12 Norte**

**Armenia, Quindío – Colombia**

[licenciaturaenmatematicas@uniquindio.edu.co](mailto:licenciaturaenmatematicas@uniquindio.edu.co)

**UNIQUEINDÍO**, en conexión territorial

Carrera 15 Calle 12 Norte Tel: (606) 7 35 93 00 Armenia - Quindío - Colombia

---

[www.uniquindio.edu.co](http://www.uniquindio.edu.co)