UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

SITUACIÓN ADIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS EN UN JUEGO COMPUTARIZADO.

ALEJANDRO GUINAND CALDERÓN

Universidad del Quindío

Facultad de Ciencias de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Armenia - Quindío

2022

SITUACIÓN ADIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS EN UN JUEGO COMPUTARIZADO.

Trabajo de Grado como requisito para optar por el título de:

Licenciado en Matemáticas

Director

Mgs. Ed. Julián Andrés Rincón Penagos

Trabajo de grado bajo la modalidad de Informática Educativa

Grupo de estudio y desarrollo de software (GEDES)

Universidad del Quindío

Facultad de Ciencias de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Armenia - Quindío

2022

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a Dios que me permitió llevar a cabo este estudio y realizar mi trabajo.

A mis padres que me brindaron su apoyo incondicional y fueron la fuerza que tuve para lograr esta gran meta.

Al Profesor Julián Andrés Rincón que a través de todo su conocimiento me acompaño durante todo este proceso importante.

A cada uno de los profesores del programa que hicieron parte de mi formación personal.

Alejandro Guinand Calderón

Resumen

En esta propuesta de investigación se implementó un juego computarizado sobre el cual se resuelven ejercicios (ejercicios de graficación y modelación) para el aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas. Este objetivo se logró a través del diseño de una situación adidáctica para la modelación y graficación de funciones polinómicas generando una secuencia didáctica que utilizó un juego computarizado como medio a través de la ejercitación de ejercicios, específicamente, se alcanzó el desarrollo de este objetivo analizando los resultados obtenidos del análisis preliminar y la implementación de una secuencia didáctica llevada a una metodología cualitativa como lo es la Ingeniería Didáctica.

Palabras clave: TIC, Función Polinómica, Modelación, Enseñanza, Aprendizaje, Resolución de ejercicios, Juego Computarizado, Software Educativo, Situación Didáctica, Ingeniería Didáctica.

Índice general

[1]Descargar o ver en: `https://www.geogebra.org/graphing`
[2]Descargar o ver en: `https://graphsketch.com/`
[3]Descargar o ver en: `https://rechneronline.de/function-graphs/`
[4]Descargar o ver en: `https://www.wolframalpha.com/`

Capítulo 1

Introducción

La enseñanza de las matemáticas, particularmente del cálculo, es fortalecida por el uso de la tecnología, afirma Salat (2013) que el uso de las herramientas de computación ha pasado a formar parte de la cultura del hombre como parte de un proceso histórico y cultural que marca una nueva etapa del desarrollo. Por otra parte, a través de la historia se han determinado métodos para modelar y graficar funciones polinómicas y que al día de hoy son muy usadas en las aplicaciones de la ingeniería y de la misma matemática (De León, 2020).

En este sentido, se inicia diciendo que, una función polinómica representa un modelo en el cual están inmersas soluciones para una misma variable (Stewart, 2012), y que desde la enseñanza de la matemática no es fácil hacerlo, por tal razón el uso de las TIC permite explorar nuevas alternativas, Cuetos y col. (2020) argumentan que las TIC ofrecen nuevas oportunidades de aprendizaje en una sociedad interconectada, en el caso de esta investigación su uso se ha hecho fundamental para la modelación y graficación de las funciones polinómicas.

Actualmente son muchas las investigaciones (Sarmiento, 2004; Castro, Guzmán y Casado, 2007; Pizarro, 2009; Arguedas, Coto y Trejos, 2010; Arango, 2013; Morales y Peña, 2013; Salat, 2013; Pérez, 2015; Rodríguez, Romero y Vergara, 2017; Rincón, 2018) que estudian las diferentes formas de enseñar Matemática y cómo se produce el aprendizaje por parte de los alumnos . Pizarro (2009), enuncia que:

> *En esta búsqueda de nuevas metodologías, la inclusión de tecnologías y el aporte que éstas realizan a la visualización de diferentes conceptos es muy amplia. Esto se debe a que permiten que se desarrollen actividades desde más de un sistema de representación, es decir, no sólo desde el enfoque algebraico, sino que también logren visualizar el concepto desarrollado. (Pizarro, 2009, p. 9).*

Por otra parte, es importante que el docente de matemáticas tenga un dominio tanto en la disciplina como en la metodología pedagógica y didáctica, en palabras de Pérez:

> *Tampoco son útiles las teorías didácticas o el conocimiento de herramientas didácticas si no conoce primero quien tiene que aprender, cuáles son sus intereses por el conocimiento, en qué condiciones puede estudiar en casa, cuál es su nivel de atención, en qué entorno cultural y social se desenvuelve o, en el caso que nos ocupa, las destrezas que pueda tener en el uso de las herramientas TIC. (Pérez, 2015, p. 3).*

En este sentido, en la actualidad educativa se observa que muchas universidades y otras instituciones educativas ofrecen alternativas de profesionalización en ambientes virtuales de tal forma que ingresen una mayor cantidad de personas al medio educativo, procurando una mayor flexibilidad (Pérez, 2015). Según Arango (2013), en dicha estructura metodológica se hacen necesarias las herramientas tecnológicas y de comunicación. Pero no solo en la educación virtual son altamente relevantes las TIC, también en el diario vivir de los docentes universitarios que participan de una educación presencial, las herramientas informáticas permiten el acceso rápido y fácil a la información; por lo cual, el docente deberá ser participante activo en su implementación para obtener y desarrollar competencias determinadas y generales en el estudiante. Suarez (2020) afirma que, la UNESCO cree firmemente en las amplias oportunidades que podrían brindar estas tecnologías si su expansión y uso son correctos. Reforzar la integración del alumnado, apoyar el desarrollo de los docentes, y mejorar la calidad y la pertinencia del aprendizaje son algunos de los aspectos que, según esta institución, se verán favorecidos por ellas (Suarez, 2020).

Es así como, al momento en que se decide incorporar un software en la clase para desarrollar actividades de enseñanza-aprendizaje, se elige a su vez en forma directa o indirecta diferentes estrategias, tal como lo menciona Pizarro (2009) “Podemos pretender, por ejemplo, que los alumnos se ejerciten y practiquen, desarrollen actividades de simulación, las que a su vez se pueden planificar en forma individual o grupal”.

Lo anterior, lleva a pensar que la época actual requiere de estudiantes con nuevas competencias y destrezas que deben ser aprendidos por medio de procesos educativos; lo cual implica que la escuela y la universidad deben formar también a los docentes en nuevos escenarios pedagógicos como la virtualidad y en el manejo de nuevos instrumentos y métodos para mejorar o actualizar sus procesos educativos, es así como Arango argumenta que:

> *Para este proceso se requiere de otros docentes, expertos en pedagogía, en las disciplinas informáticas, diseño gráfico y audiovisual y de nuevas políticas educativas que posibiliten una educación con interacción de las TIC ya que: "La educación en la sociedad de la información ha de ser un factor de igualdad social y de desarrollo personal, un derecho básico y no únicamente un producto de mercado” (Arango, 2013)*

Por otra parte, la resolución de problemas juega un papel muy importante en la construcción de conocimientos del estudiante, Santos (2012) afirma que, todo matemático sabe que el empleo de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas demanda de un proceso de reflexión que va más allá de un cierto dominio teórico. Implica reconocer la estructura profunda de los conceptos y resulta muchas veces un proceso difícil para los estudiantes. En este sentido modelar una función polinómica implica conocer la estructura que la compone y cómo se puede llegar a un resultado confiable además de tener total claridad de los elementos necesarios para su correspondiente modelación, también, Stewart (2012) menciona que, las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos picos y valles; esto las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas.

Sin embargo en esta investigación los estudiantes se enfrentaron a una situación que para Pérez (2009) provoca una ambigüedad en su respectivo uso. Por un lado se tiene el concepto de problema y por otra parte de ejercicio. Pérez (2009) afirma que un planteamiento o cuestión es un ejercicio cuando su resolución hace intervenir pocos procesos mentales explícitos, y en su mayoría del mismo tipo. Por otra parte Pérez (2009) enuncia que, si tal cosa no ocurre la cuestión suele calificarse como problema.

En este sentido la intención de la investigación es presentar una secuencia de ejercicios que promueven la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de un juego computarizado de forma repetitiva, puesto que según Pérez (2009), cuando se conoce la directriz para resolver la cuestión se pierde el sentido de problema y se habla entonces de un ejercicio.

Pero, a través de la secuencia de ejercicios, se concibió un plan que apuntó hacia la resolución de situaciones que si bien inicialmente no se categorizan como problemas, plantean cuestiones alrededor del mismo ejercicio, posibilitando una reflexión continua por parte del estudiante. Es decir, el estudiante ya tiene en cierta medida la concepción de cómo graficar una función polinómica, así como de modelar la función a través de unos puntos de corte establecidos con el eje x, sin embargo, quedan otras cuestiones por estudiar, y estas son por ejemplo, cómo es el comportamiento de la gráfica cuando tiene grado par o grado impar, qué sucede si una función polinómica tiene un punto de corte que se repite varias veces, cómo se interpreta el valor del término independiente de la función polinómica, cuál es la relación del método de la ley de los signos con el comportamiento de la función.

Es decir que, a través de una lista de ejercicios mediante los cuales los estudiantes ya conocen su mecanismo de resolución surgen cuestiones interesantes que permiten a la investigación realizar un cuestionamiento reflexivo, tornándose en un ambiente propicio para estudiar las diferentes posturas de los estudiantes, y que a continuación se explicita en detalle cada uno de estos aspectos.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

En el análisis de referentes bibliográficos, se ha encontrado, que por ejemplo, Pérez (2015), se cuestiona acerca de lo siguiente: ¿Son las mismas herramientas TIC las que debemos utilizar en el proceso de enseñanza que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas?, Pérez, menciona que según la experiencia no son las mismas herramientas, dado que los procesos son distintos, por lo tanto las herramientas también deben ser distintas. Otra cuestión del autor es: ¿Qué herramientas son las más adecuadas para utilizar en cada uno de los procesos? ¿Existen herramientas TIC que puedan utilizarse en ambos procesos? ¿Las herramientas que se utilizan son específicas para matemáticas?, ¿El uso de herramientas TIC facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje?. Muchas preguntas surgen en torno a esta problemática y que invitan a reflexionar sobre el proceso que se debe seguir a diario en el aula con los estudiantes. Por encima de todo se debe estar convencido de dos pilares fundamentales, que según Pérez son: 1) Las TIC no son la panacea en educación. Se debe remarcar este punto y no caer en un error. Aunque pueden llegar a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, son solamente un recurso más. 2) Las TIC no son el objetivo, sino un medio. Así el autor concluye que: en muchas ocasiones se puede llegar al error de acabar enseñándole a un alumno o alumna el manejo de determinadas aplicaciones en lugar de los contenidos matemáticos que se habían propuesto inicialmente. *(Pérez, 2015)*

En este sentido se genera la pregunta ¿Cómo se deben utilizar las TIC en el proceso de aprendizaje? Este interrogante sería una de las cuestiones que se plantea Pérez (2015) que menciona, ¿Cómo plantearse el proceso de aprendizaje?, pero conjuntamente con otro buen puñado de ellas entre las que se encontraría ¿Qué se pretende aprender?, ¿Dónde se va a aprender? y ¿Cómo se va a aprender? (p. 4).

Por su parte, Pizarro presenta el problema y dice que, la inclusión de las TICs en Educación, como la incorporación de la computadora en Matemática y especialmente en Cálculo Numérico, son hechos que determinaron cambios muy importantes. Según Pizarro, somos protagonistas de los cambios que indudablemente las TICs consolidarán en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, la inclusión de la computadora en las disciplinas científicas, ha modificado en gran escala la forma de trabajar en las mismas desde hace ya varias décadas. (Pizarro, 2009)

A su vez, Irazoqui, argumenta que, los bajos rendimientos académicos que los estudiantes obtienen semestre tras semestre, resultan ser la consecuencia natural de la baja comprensión de los conceptos fundamentales que configuran el Cálculo Diferencial, ello, por lo demás, Irazoqui argumenta que este fenómeno, ha sido reportado por un sin número de investigadores de la Didáctica de la Matemática respecto de esta materia, situación que se repite año tras año, hasta la actualidad (Irazoqui, 2015).

Hasta este punto, se puede evidenciar que existen problemáticas alrededor de los procesos de enseñanza y también del aprendizaje, como se ha visto tradicionalmente, en problemas en la baja comprensión de las matemáticas, particularmente para esta investigación, en la modelación de funciones polinómicas del cálculo diferencial. Además en la incorporación de las TIC al proceso de enseñanza-aprendizaje subyacen otras problemáticas que se abordaron anteriormente tales como la diferencia que hay entre herramientas TIC para enseñar y herramientas para aprender.

A partir de este análisis se evidencia que actualmente los procesos de enseñanza y aprendizaje se empiezan a clasificar en dos componentes, en primer lugar como ha sido tradicional el problema de la comprensión de los conceptos matemáticos, y en segundo lugar la nueva problemática que surge por la incorporación de las tecnologías al sistema educativo (Sarmiento, 2004). Se quiere entonces mostrar que la graficación y modelación de funciones polinómicas contiene una problemática en el proceso del aprendizaje.

En este sentido, tal como lo mencionan Pérez (2015), Pizarro (2009) e Irazoqui (2015), los problemas de la comprensión de muchos conceptos matemáticos provienen de la falta de comprensión de conceptos previos. Para dar mas precisión, cuando se modela una función polinómica en la cual se dan las raíces, se debe conocer algunas técnicas tales como el cálculo de productos notables, la multiplicación de polinomios o la multiplicación sintética (Stewart, 2012). Si bien es cierto, que muchos de los programas académicos de las universidades, particularmente los que tienen que ver con la ingeniería y matemáticas (Programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Quindío, 2020), han incorporado cursos previos al cálculo, no se garantiza que la comprensión de estos conceptos sea la mejor, por no decir que no todas las Universidades lo han implementado, particularmente en la Universidad del Quindío se ha encontrado que en los programas de Ingenierías, se ha incorporado el curso de matemáticas generales con la finalidad de afianzar los conceptos previos que traen los estudiantes desde las instituciones educativas, sin embargo se ha analizado que esta materia contiene únicamente un espacio de dos horas para la enseñanza de la función polinómica, dada la gran cantidad de conceptos y contenidos que presenta esta materia, dando lugar a posibles falencias en la correcta adquisición y comprensión de la graficación y modelación de funciones polinómicas.

Es así como se identifica una problemática en el campo de la informática educativa, es decir, como mejorar el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través del uso de las TIC, particularmente en preguntas que van más allá de la resolución del ejercicio, tales como, cómo es el comportamiento de la gráfica cuando tiene grado par o grado impar, qué sucede si una función polinómica tiene un punto de corte que se repite varias veces, cómo se interpreta el valor del término independiente de la función polinómica, cuál es la relación del método de la ley de los signos con el comportamiento de la función. Se resume esta problemática con la siguiente pregunta de investigación, ¿Cómo mejorar el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de la ejercitación en un juego computarizado?

2.1 Justificación

Todo proceso de investigación pretende aportar nuevos conocimientos y experiencias a la comunidad científica y académica, en el caso de esta investigación en la línea de informática educativa se pretende mostrar algunos resultados importantes entorno a algunos asuntos particulares tales como, el papel que desempeña la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, también determinar las posibles dificultades en el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas, y por otra parte visualizar la problemática que existe al interior de los cursos previos al cálculo diferencial en programas académicos, particularmente en ingeniería electrónica o ingeniería civil de la Universidad del Quindío.

Con respecto a lo anterior es importante señalar que muchas investigaciones tal como lo menciona Pérez (2015) usan herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, pero se ha observado según Pérez, que, muchos de estos procesos usan las TIC sin comprender que estas, son el medio mas no la finalidad. En este sentido la presente investigación **pretende aportar claridad de como usar las herramientas TIC para el proceso de enseñanza y aprendizaje**, y además determinar cuáles son las características de una herramienta para el proceso de enseñanza y cuales para el proceso de aprendizaje (Quintero y col., 2005), es decir, que cada proceso requiere de una herramienta tecnológica diferente, a no ser que la herramienta este construida bajo los parámetros de una teoría didáctica como por ejemplo las secuencias didácticas.

Por otra parte se quiere mostrar que se evidencian falencias en el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas en programas académicos afines a la matemática, como por ejemplo la ingeniería civil o la ingeniería electrónica, no por la idoneidad del docente de matemáticas, si no por el poco tiempo que el mismo docente tiene para abordar este concepto. Se ha analizado a través de los syllabus de materias previas al cálculo diferencial como por ejemplo las matemáticas generales que contienen cinco unidades, de las cuales solo hay una dedicada al álgebra, y solo un tema dedicado a la multiplicación de polinomios, lo que se puede resumir a la enseñanza de este concepto por un espacio máximo de dos horas, de igual forma sucede en la materia de cálculo diferencial en la cual se dedica como máximo un espacio de dos horas para la enseñanza de las funciones polinómicas, generando posiblemente dificultades para la comprensión del concepto.

Así mismo en el contexto matemático de los estudiantes de ingeniería electrónica o ingeniería civil se ha observado y analizado mediante pruebas diagnóstico que los estudiantes no tienen total claridad de la graficación y modelación de funciones polinómicas, puesto que se analizó que los estudiantes no comprenden y no tienen claridad de las técnicas para modelar una función polinómica. Por otra parte no comprenden la técnica para calcular las raíces de una función polinómica, lo que conlleva a no interpretar como se ubican estas raíces sobre el plano cartesiano y cual es el comportamiento de la gráfica de la función en cada uno de los intervalos formados, es decir, si la gráfica esta por encima o por debajo del eje x o si la gráfica crece o decrece.

En este sentido es importante proponer una metodología de investigación cualitativa (Sampieri, Fernández y Baptista, 2014) en la cual se diseña, implementa y analiza una secuencia didáctica basada en la ejercitación y modelación de funciones polinómicas, dado que esto permitirá no solamente determinar las dificultades que presentan los estudiantes, si no también, permitirá mejorar el proceso de aprendizaje de la modelación y graficación de funciones polinómicas, extrapolando algunas reflexiones clave en torno a las preguntas inherentes a la ejercitación tales como, cómo es el comportamiento de la gráfica cuando tiene grado par o grado impar, qué sucede si una función polinómica tiene un punto de corte que se repite varias veces, cómo se interpreta el valor del término independiente de la función polinómica, cuál es la relación del método de la ley de los signos con el comportamiento de la función, y clarificar la diferencia entre una herramienta TIC para enseñar y para aprender.

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general

- Diseñar una situación adidáctica para el aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas a través de la resolución de ejercicios en un juego computarizado.

Este objetivo se alcanzó a través de la implementación de la Ingeniería Didáctica que según Artigue y col. (1995) se compone de cuatro fases, estas son: 1) análisis preliminares, 2) concepción y análisis apriori, 3) experimentación y 4) análisis aposteriori.

2.2.2 Objetivos específicos

1. Analizar el efecto de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas, a través del análisis de libros de texto, practicas pedagógicas y conocimientos previos de los estudiantes.

2. Describir una estrategia o método para diseñar una secuencia didáctica en el marco de las situaciones didácticas de Brousseau para el aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de la resolución de ejercicios en un juego computarizado.
3. Identificar y categorizar los avances obtenidos por los estudiantes en la implementación de una secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de la ejercitación en un juego computarizado.
4. Evaluar los resultados obtenidos en el análisis preliminar, análisis apriori y la implementación de la secuencia didáctica a través de un método de análisis cualitativo.

Capítulo 3

Marco Metodológico y Metodología

En esta investigación, se usó la ingeniería didáctica (Artigue y col., 1995), que a su vez es un marco teórico y una metodología. Esta contiene o se conforma por cuatro fases las cuales son: (1) Análisis preliminar, (2) Análisis a priori, (3) Experimentación y (4) Análisis a posteriori.

3.1 Fases de la metodología

3.1.1 Análisis preliminares

Según Artigue y col. (1995), en una investigación de educación matemática, la fase de concepción se basa no solamente en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos adquiridos previamente, si no también en una serie de análisis preliminares. (p. 38).

Los análisis mas frecuentes mencionados por Artigue y col. (1995) son:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y, por su puesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Según Artigue y col. (1995), los análisis preliminares, se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases de la misma, en función de las necesidades sentidas. Además Artigue y col., argumentan que, los estudios preliminares tan sólo mantienen su calidad de "preliminar" en un primer nivel de elaboración y que con frecuencia las diferentes dimensiones, no intervienen de manera explicita en la investigación (p. 39)

3.1.1.1 Cómo se desarrollo la fase de análisis preliminares

El análisis preliminar, corresponde a la primera fase de la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue y col., 1995). En esta fase se han desarrollado una serie de descripciones y análisis que permiten a la investigación un panorama general del estado del arte del problema de investigación a nivel conceptual, didáctico y tecnológico. Para detallar, en esta fase se realizó una descripción breve acerca de la epistemología del concepto de graficación (caracterización) y modelación de funciones polinómicas y cómo a través de la historia el concepto a tomado importancia desde la aplicación de soluciones de ecuaciones cuadráticas con los babilónicos y egipcios, hasta la epoca moderna con la aplicación de fórmulas y métodos para la solución de ecuaciones polinómicas (De Lucas, 1996; Gonzales, 2010; Pérez, 2011; Pérez, 2017; Molina, 2018; León, 2022).

Por otra parte, en la descripción de algunos libros de texto (Prado y col., 2006; Pérez, 2008; Espinosa y col., 2009; Galván y col., 2006; Rivera, 2014) se evidencio que la mayoría de los libros de cálculo diferencial y precálculo realizan una breve introducción a los conjuntos numéricos, procesos algebraicos y llegan directamente al concepto de función, iniciando por la función lineal, cuadrática, cúbica y generalizando algunas características para las funciones polinómicas.

Además desde la dimensión tecnológica, autores como (Quintero y col., 2005; Arroyo, 2006) muestran algunas características y descripciones que debe adoptar el software educativo, permitiendo distinguir, de algunos de estos consultados explicar porque no adquieren la categoría de software educativo, si no más bien de simples visualizadores de funciones, permitiendo así incorporar y describir el software educativo (aplicación web) diseñada por (Rincón, 2021) para la llevar a cabo la fase de la experimentación en ésta investigación.

También se desarrolló una descripción de algunos videos encontrados en la plataforma youtube encontrando que en su gran mayoría se reduce a la trasmisión del conocimiento y la explicitación de las técnicas necesarias para resolver los ejercicios propuestos entorno a la problemática planteada, graficación (caracterización) y modelación de funciones polinómicas.

Así también, se desarrolló una prueba diagnóstica con un grupo de veintiocho estudiantes en la cual se determinó que los procesos en los cuales los estudiantes tienen falencias tiene que ver con la determinación de la paridad de la función, el cálculo de los intervalos positivos y negativos de la función y la comprensión de cómo usar los parámetros dados en la función para plasmar la gráfica de la función en un lienzo bidimensional.

3.1.2 Concepción y Análisis a priori

Para Artigue y col. (1995), en esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema previstas desde la concepción previa. Los autores, distinguen dos tipos de variables:

- Las *variables macro-didácticas* o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Y las *variables micro-didácticas o locales*, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

En esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijados por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado (Artigue y col., 1995).

Ambas variables pueden ser generales o bien dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Es importante resaltar que las selecciones globales, aunque se presenten separadas de las selecciones locales, no son independientes de ellas (Artigue y col., 1995).

La validación en la ingeniería didáctica es esencialmente interna. Desde la fase de concepción se inicia el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significados. Esto quiere decir que: Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones (Artigue y col., 1995, p. 44)

Por lo tanto, según Artigue y col. (1995), el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permitan controlar poscomportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de las mismas está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la fase cuatro, entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Artigue y col. (1995) argumenta que tradicionalmente este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, y se debe:

- Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que en ellas se desprenden.
- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción de selección, de decisión, que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Proveer los campos de comportamiento posibles demostrar cómo el análisis realizado permite controlar, en particular, que los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

En el análisis a priori, Artigue y col. (1995), argumenta que, el estudiante es tomado en cuenta en ambos niveles, descriptivo y predictivo, mientras que el profesor no interviene, unicamente esta describiendo lo que puede suceder en la fase de la experimentación. Así, el estudiante es el actor principal del sistema en el análisis a priori, el profesor cumple un papel importante durante las situaciones de devolución y de institucionalización. Artigue y col. (1995) menciona que, de alguna forma la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte el papel del profesor, pero que no se puede negar que hasta el momento el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica.

En este orden de idas, una vez elaborado el análisis preliminar y determinado la epistemología de las funciones polinómicas y las relaciones que existen entre cada componente de análisis preliminar se inicia con el diseño y desarrollo de la secuencia didáctica, usando como medio un juego computarizado para la modelación y graficación de funciones polinómicas, a través de la teoría de las situaciones didácticas, es decir, que se tomará como referencia las situaciones didácticas para encontrar un conjunto de situaciones adidácticas que permitan la total comprensión del concepto a través de la interacción entre el estudiante y el medio (Brousseau, 2007), es decir, que en al momento de realizar este análisis se obtendrá como resultado un conjunto de situaciones problema basados en una situación adidáctica que permitiran la materialización de la secuencia didáctica. Para precizar mejor se construirá la secuencia didáctica con las situaciones problema encontrados en este proceso.

3.1.2.1 Situaciones didácticas

Brousseau (2007), desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertos ideas generadas por Piaget, considera que un individuo aprende en la medida en que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a sus estructura cognitiva, por medio de un proceso de asimilación y acomodación, a un medio que es factor de desequilibrios y dificultades en su proceso de construcción del conocimiento. Se considera entonces, que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que el saber proviene de una elaboración cultural, siendo motivo de interés la génesis, en cuanto a su historia del saber.

Para Brousseau (2007), el conocimiento proviene en buena parte del hecho que el alumno lo adquiere en su adaptación a situaciones didácticas que le son propuestas, en este sentido, aparece la idea de “devolución”, acto seguido, por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia.

La devolución es la esencia del acto de comunicación entre el profesor y el alumno frente a un objeto de conocimiento, produciéndose la misma en ambos sentidos (Brousseau, 2007).

Se considera que el alumno se ha apropiado del conocimiento, cuando es capaz de utilizarlo fuera del contexto de enseñanza, y en momentos donde no haya inducción intencional, denominándose a estos “situaciones no didácticas”, están regidas por el contrato didáctico, es decir, por las obligaciones implícitas que se establecen entre los autores del sistema didáctico, esto es la triada docente-alumno-conocimiento (Sánchez, De la Cruz y Urrutia, 2009, p. 3).

Situaciones adidácticas

La situación adidáctica es una parte de la situación más amplia, a la que Brousseau (2007) denomino situación didáctica, que comprende las relaciones establecidas explicita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (incluyendo instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático.

En la situación o fase a didáctica: La no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo el mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución (Brousseau, 2007).

El siguiente esquema 3.1 muestra como se relaciona el estududiante con el medio dentro de una situación adidáctica, considerando una serie de intenciones propuestas por el docente/investigador que impulsan el estudinate a aceptar tales situaciones con el fin de generar un conocimiento por adaptación (Rincón, 2015). A través de la intención propuesta por el docente/investigador, el estudiante debe proponer una estrategía para la resolución de determinado problema, ejecutarla sobre el medio y el medio debe tener la capacidad de responder al estudiante para que este pueda interpretar si la estrategía que desarrollo fue la indica para resolver el problema planteado (Rincón, 2015, p. 25)

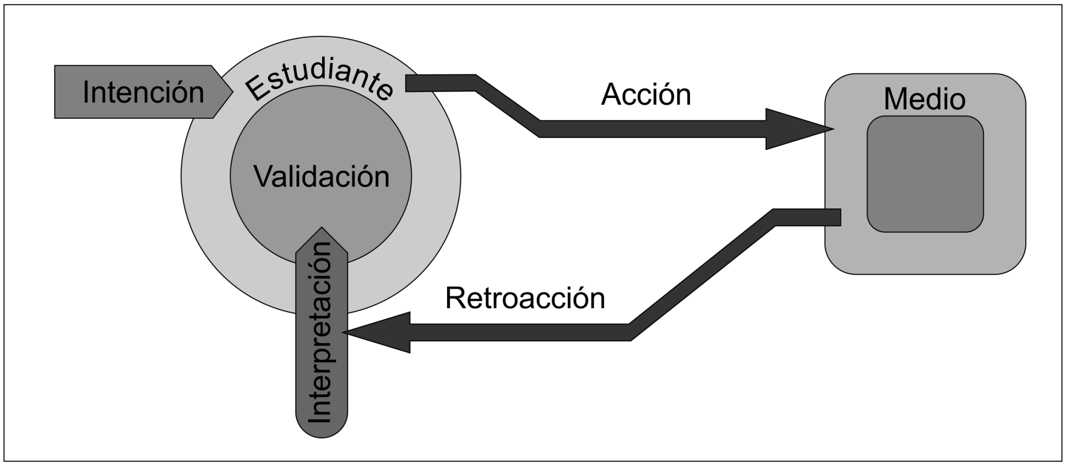


Figura 3.1: Esquema de una situación a didáctica, tomado de (Rincón, 2015)

Por lo tanto, para Brousseau (2007), las situaciones adidácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado, que puede variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica que según los valores que toman, modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación. Pueden darse tres tipos de situaciones adidácticas, tal como se muestra a continuación.

3.1.2.2 Situaciones a didácticas de acción

Para Brousseau (2007), una buena situación de acción puede permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustarlo sin la intervención del profesor gracias a la retroacción por parte del medio de la situación que son percibidas por el alumno como sanciones o refuerzos de su acción.

Así, en una situación de acción se produce un diálogo entre el alumno y la situación. Tal dialéctica de la acción le permite construir mejor su modelo implícito, pues tiene reacciones que no puede todavía formular, probar, ni mucho menos organizar en una teoría. En todo caso, la situación a-didáctica provoca un aprendizaje por adaptación, según la teoría de Piaget

(Chevallard, 1997).

3.1.2.3 Situación adidáctica de formulación

Con el fin de que el alumno pueda explicitar su modelo implícito y que ésta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizarla a fin de que obtenga o haga obtener a alguien un resultado. En las situaciones a-didácticas de formulación, el alumno intercambia información con una o varias personas, o bien comunica lo que ha encontrado a un interlocutor o a un grupo de alumnos, que le devuelve la información (Chevallard, 1997).

3.1.2.4 Situación adidáctica de validación

En la dialéctica de la validación, el alumno debe demostrar por qué el modelo que ha creado es válido. Sin embargo, para que construya una demostración y tenga sentido para él tiene que construirla en una situación, llamada de validación, donde es necesario convencer a otra persona. Una situación a-didáctica de validación da la ocasión de someter el mensaje matemático modelo explícito de la situación, como una aseveración a un interlocutor (oponente). El oponente puede solicitar explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquellas con las que no está de acuerdo, dando sus argumentos (Chevallard, 1997).

3.1.2.5 Cómo se desarrollo la fase de concepción y análisis apriori

La concepción y análisis apriori según Artigue y col. (1995) contempla una ruta que permite dos cosas: (1) describir lo que se pretende realizar/hacer en la fase de la experimentación y (2) concebir o predecir posibles comportamientos de los estudiantes frente a la secuencia de actividades planteadas.

En este sentido, en esta fase se realizó una descomposición genética que según Hernández y Trigueros (2012) citados por (Jaimes, Chaves y Vargas, 2017) definen la descomposición genética como un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. En ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto.

En esta fase de concepción y análisis apriori se concerto por distinguir cuáles son los elementos fundamentales para comprender la graficación (caracterización) y modelación de una función polinómica, determinando dos procesos importantes, en primer lugar como se obtiene una función polinómica a través de las raices o cortes con el eje x y a partir de ello otros procesos inherentes que tienen que ver con el comportamiento de la función. Por ejemplo ¿qué implica el término independiente de la función sobre la gráfica?, ¿cómo se generó este termino independiente?, que a su vez permite el proceso inverso y su respectiva relación con el anterior, y es, distinguir que si el término independiente se generá por la multiplicación sucesiva de las raices del polinomio, luego la caracterización de una función polinómica depende del mismo término independiente y que para tal proceso se deben calcular los divisores de tal término.

Por otra parte, la cantidad de raices del polinomio y el grado del mismo posibilitan determinar el comportamiento de la función y sus respectivos intervalos positivos y negativos, además de comportamientos particulares de la misma función que son dilucidados por el estudiante al enfrentarse a tales situaciones. Por ejemplo en una función polinómica que tiene cuatro raices en par simétricas, por ejemplo $x = -2, 2, -4$ y 4, ¿Cuál es el comportamiento de la función?, este proceso permite aunado con el anterior llegar a la conclusión que la función es una función par.

En este orden de ideas se concibio un taller guía en el cual se le proponen al estudiante una serie de cuestionamientos como los siguientes: explique cuál es la diferencia entre una función con tres raices y una con cuatro raices, para generalizar un poco más, qué características tiene una función polinómica de grado par y una de grado impar, si una función tiene cinco cortes con el eje x cómo puede describir los intervalos positivos y negativos. Permitiendo un flujo constante y de acciones y procesos mentales y físicos que permitan la construcción del conocimiento generalizado del concepto de función polinómica en las dos características que se estudiaron, la graficación (caracterización) y modelación de funciones polinómicas.

3.1.3 Experimentación

Rincón (2015), referenciando a (Artigue y col., 1995), comenta que, la experimentación es la fase de la realización de la ingeniería con cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación.

La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participaron de la experimentación (2015, p. 31);
- El establecimiento del contracto didáctico (2015, p. 31);
- La aplicación de los instrumentos de investigación (2015, p. 31);
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación (2015, p. 31).

Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis a posteriori local, confrontando con el análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias (2015, p. 31).

Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis a priori (2015, p. 31).

La experimentación supone el hecho de poner a prueba la secuencia didáctica elaborada en la fase anterior, y a partir de la relación de los estudiantes con la secuencia didáctica describir el proceso, llevando paralelamente un diario de campo en el cual se registren los acontecimientos y las experiencias de los estudiantes en el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica (Rincón, 2015; Artigue y col., 1995), particularmente se cuenta con un sotfware educativo, para el aprendizaje de las funciones polinómicas en el cual se registraron los alcances y logros obtenidos por los estudiantes, lo cual permite obtener un registro físico que se usó en la fase de análisis aposteriori.

3.1.3.1 Cómo se desarrollo la fase de la experimentación

En el desarrollo de la fase de experimentación se facilito a los treinta y dos estudiantes del primer semestre del programa de Ingeniería Civil, una secuencia didáctica con tres tipos de ejercicios. Cada estudiante debia resolver a cada tarea propuesta usando el medio (juego computarizado) describiendo cómo realizó el proceso de solución de cada ejercicio propuesto.

En el primer ejercicio se propuso a los estudiantes generar un ejercicio del tipo "modelación de una función polinómica" con tres raices, con la idea de que usaran el método de la multiplicación de binomios $(x - r)$, o productos notables o el método de la multiplicación sintética propuesto por el docente.

Luego, en el segundo ejercicio el estudiante tenia que describir cual es el significado de los intervalos positivos y negativos de en la gráfica de la función, logrando solo que el $25\,\%$ de los estudiante realizaran la relación entre la gráfica de la función y el concepto de intervalo positivo y negativo.

En cuánto a una relación esperada y concebida dentro del análisis apriori, "la diferencia entre funciones de grado par e impar", la secuencia didáctica propone un ejercicio en el cual se pide a los estudiantes que expliciten la diferencia entre dos tipos de funciones con sus respectivas gráficas, logrando relacionar el comportamiento de los cortes de una función con sus respectivos intervalos positivos y negativos.

Por otra parte en el último ejercicio propuesto en la secuencia didáctica se busco que los estudiantes encotraran la relación que existe entre las raices del polinomio y el término independiente, a través del proceso de la multiplicación y la división sintética

3.1.4 Análisis a posteriori y validación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica, Rincón (2015) citando a Artigue y col. (1995), comenta que, esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella.

Estos datos se contemplan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas, cuestionarios, entrevistas individuales en pequeños grupos, realizados durante cada sección de la enseñanza (Rincón, 2015).

La validación o refutación de las hipótesis formadas en la investigación se fundamentan en la confrontación de los análisis, a priori y a posteriori.

Según Artigue y col. (1995), “En la mayoría de las textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Estas, están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación”; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constantes invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas sin comprometerse en realidad con un proceso de validación.

Las hipótesis mismas que se formulan explicitamente en los trabajos de ingeniería son a menudo hipótesis relativamente globales que ponen en juego procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esto, la amplitud de la ingeniería no permite necesariamente involucrarse en verdad en un proceso de validación Rios (2007) citado por Rincón (2015).

Hasta este momento, se a basado la investigación en la recolección de datos, inicialmente se han capturado datos históricos tales como la epistemología del concepto y su desarrollo matemático en la historia, también análisis de clases tradicionales encontradas en canales de Youtube, y por otra parte, la implementación de una prueba diagnóstico a un grupo de estudiantes lo cual permite un conjunto de registros y datos para el análisis y obtensión de resultados de la misma investigación (Martinez, 2017, p. 42). En otras palabras en esta fase se cuenta con un conjunto de registros obtenidos de las tres fases anteriores y se determinará en esta fase si los instrumentos construidos para alcanzar el objetivo de la investigación han sido precisos o requieren de ajustes, ya sean metodológicos, didácticos o técnicos.

En este sentido, esta fase debe hacer uso de una metodología de análisis cualitativo (Sampieri, Fernández y Baptista, 2014) en la cual se pueda realizar una categorización del conjunto de datos obtenidos y realizar inferencias, deducciones y conclusiones al relacionar estos conjuntos de datos. Para precisar mejor, se necesita una metodología de análisis cualitativa que permita etiquetar y categorizar cada uno de los registros obtenidos en cada fase, realizar inferencias y deducciones de cada conjunto de datos y posteriormente confrontar estas conclusiones entre si permitiendo probar/demostrar aspectos que inicialmente eran hipotéticos y que a través de este análisis se ha podido comprobar su veracidad (Rincón, 2015, p. 230).

3.1.4.1 Cómo se desarrollo la fase del análisis aposteriori y evaluación

La fase de análisis aposteriori y evaluación es la cuarta fase de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue y col., 1995). En esta fase se retoman todos las conclusiones obtenidas a lo largo de la investigación en cada una de las fases, hilando el proceso que se desarrollo, en primer lugar se habló de los resultados obtenidos en los antecedentes y estado del arte, la conclusión mas importante se enmarca en el uso adecuado de las TIC para permitir la comprensión de un concepto en particular, esto es, en la graficación (caracterización) y modelación de funciones polinómicas, además se distiguiron desde el análisis preliminar propuesto por (Arroyo, 2006) tres categorias para el software educativo, (1) software educativo para enseñar, (2) software educativo para validar y (3) software educativo para evaluar.

Posteriormente en la concepción y análisis apriori se realizó una descripción de la descomposición genética del concepto de graficación y modelación de funciones polinómicas y con ello se generó una secuencia didáctica, que en la fase de la experimentación se ejecuto con un grupo de treinta y dos estudiantes del programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Quindío, permitiendo recolectar datos tanto cualitativos como cuantitavos para realizar un análisis en la última fase de la investigación.

3.2 Población y Contexto

La población en la cual se implementó los instrumentos diseñados, es decir, la prueba diagnóstico, la secuencia didáctica y los instrumentos de recolección de datos, corresponde a estudiantes de la facultad de ingeniería de la Universidad del Quindío, particularmente del programa de ingeniería civil. Son estudiantes de primero y segundo semestre respectivamente.

La Universidad del Quindío, es una institución pública y departamental de educación superior en Colombia acreditada en alta calidad, sujeta a inspección y vigilancia por medio de la ley 1740 de 2014 y la ley 30 de 1992 del Ministerio de Educación de Colombia. Su sede esta ubicada en Armenia la capital del Quindío. Fue inaugurada en 1962.

Según el Programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Quindío (2020), el perfil ocupacional del ingeniero civil de la Universidad del Quindío , publicado en el sitio web [1], el ingeniero(a) Civil de la Universidad del Quindio es un profesional capacitado para identificar los problemas y necesidades asociadas a su ocupación cuya soluciones son propias de la euristica y del diseño, a través de la modelación y/o simulación, ejecución, gestión de proyectos y administración de recursos con responsabilidad social y ambiental. Por su formación, es un profesional competente para desempeñarse en las diferentes fases de los proyectos y desde la óptica de las áreas de la ingeniería civil.

Además, el Syllabus de Cálculo Diferencial del programa de Ingeniería Civil, describe que el espacio académico trata temás básicos del cálculo, como, funciones, límites, derivadas y algunas aplicaciones de las derivadas, así mismo el espacio de Cálculo Diferencial permite a los estudiantes la adquisición de los conocimientos y la destreza necesaria para lograr la comprensión de otros cursos, también dentro las competencias propias del curso, se tiene: Analiza las relaciones entre dos variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

El tema de funciones polinómicas se trata al final de la primera unidad, conjuntamente con las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, además de el estudio de otras funciones como valor absoluto, funcion racional, funciones trigonométricas y modelos funciones matemáticas.

3.3 Impactos

La propuesta está enmarcada en el ámbito de la educación matemática, esto genera una interacción con estudiantes. De este modo en el entorno y/o impacto del proyecto de investigación es de tipo social. Mediante este proyecto se generará un impacto social positivo, ya que se busca mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la modelación y graficación de funciones polinómicas a través de la implementación de una secuencia

[1] https://www.uniquindio.edu.co/programas/publicaciones/285/ingenieria-civil/

didáctica de un juego computarizado y la resolución de ejercicios.

Capítulo 4

Antecedentes y Estado del Arte

Para determinar el estado del arte entorno al problema de investigación se presentan a continuación algunos autores entorno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la modelación y graficación de funciones polinómicas .

Artigue y col. (1995) dice que, la enseñanza tradicional supone entregar a los estudiantes un número reducido de herramientas matemáticas potentes respetando en todo momento el rigor matemático, sin embargo, es claro que como menciona Artigue y col., en las últimas décadas las dificultades y los obstáculos en la enseñanza del cálculo son múltiples y pretender evitarlos, los refuerza. Artigue y col., mencionan que: *los conocimientos adquiridos nos ayudan en primera instancia a comprender mejor el funcionamiento de nuestros estudiantes, a anticipar sus dificultades, a buscar con paciencia medios de acción adaptados en vez de las búsquedas del método milagroso y la resignación fatalista* (1995).

También, Posada y Villa (2006), en su artículo tuvieron como objetivo, indagar el papel que tuvo la noción de proporción y variación de magnitudes, en la consolidación histórica y epistemológica del concepto de función, además determinar las características de los sistemas de representación semiótica que interviene en la construcción del concepto de función lineal, los autores concluyen, que la interpretación de los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas les permitió tomar un camino diferente para el desarrollo de su investigación, en particular de los aspectos relacionados con los elementos propios del pensamiento variacional, consolidando esta propuesta a través de tres elementos didácticos fundamentales: La noción de variación, el proceso de modelación matemática y los sistemas de representación semiótica.

Así mismo, Cuicas y col. (2007), en su artículo tuvieron como objetivo, contribuir al desarrollo de habilidades del pensamiento, se investigó como innovar el proceso de aprendizaje en el tema de la integral definida incorporando el software Maple con el objeto de mejorar la comprensión y el aprendizaje de la matemática en estudiantes de ingeniería civil, de la Universidad Centroccidental (Lisandro Alvarado). Los autores concluyen que los estudiantes que participaron en la experiencia realizaron ensayos, experimentos y demostraciones en el software educativo. Además, se evidencio que con el empleo de estas estrategias se conformo un ambiente de aprendizaje que invito a la reflexión, el análisis a una actitud crítica frente a la resolución de problemas y a la toma de decisiones.

Por otra parte López (2008), en su trabajo, tuvo como objetivo realizar una aproximación al estado de la cuestión sobre el uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje del calculo, mediante la búsqueda, revisión y análisis de los artículos de investigación publicados en revistas representativas relacionados con la educación matemática. El autor concluye que la influencia de la tecnología y las estrategias de enseñanza no se deben dejar al azar, ya que, la coherencia e integración de estas incrementa la probabilidad de aprendizaje del estudiante.

También, Pizarro (2009), en su tesis de maestría titulada: Las TICS en la enseñanza de las matemáticas. Aplicación al caso de métodos numéricos, tuvo como objetivo, diseñar, desarrollar e implementar un software educativo para la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos y a través de su trabajo de maestría concluyo, que las actividades desarrolladas para la realización y el diseño de un software educativo, además de su implementación en las clases de cálculo numérico para la resolución de ecuaciones no lineales, demandan realizar algunas actividades, como por ejemplo el análisis bibliográfico y el estado del arte en la elaboración de software educativo, que sin lugar a dudas como menciona Pizarro (2009), es un tema analizado por diversos autores,que coinciden en su importancia y que su análisis determina un proceso importante en la enseñanza y aprendizaje. Argumenta Pizarro (2009), que el trabajo de elaboración de software educativo es muy amplio y requiere de una planeación estratégica dentro de un equipo de trabajo que permita realmente obtener una herramienta tecnológica que proyecte los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Así mismo, , argumentan que, dar a conocer secuencias de aprendizaje en las que la modelación de la función cuadrática se muestra como un proceso directo e inverso, favorece la articulación entre el conocimiento científico y el conocimiento escolar, por medio del desarrollo de argumentos y herramientas variacionales que fomentan nuevos significados. Los autores concluyen que, las secuencias diseñadas fueron planteadas con el fin de discutir aspectos variacionales de la función cuadrática favorecidos intencionalmente por la práctica de la modelación como un elemento importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La investigación a contribuido a formar un banco de experimentos y diseños del uso de la tecnología como herramienta, además de generar una base de significados al rededor de elementos variacionales para la significación de la función cuadrática en un contexto socio epistemológico.

También, Arguedas, Coto y Trejos (2010), con su tesis de Pregrado titulada: Propuesta para la enseñanza del cálculo utilizando las TICs como recurso didáctico en el curso MA-1210, tuvieron como objetivo, enseñar el tema de máximos y mínimos y del concepto de integral definida, utilizando Tecnologías de la Información y Comunicación como recurso para desarrollar competencias basadas en el modelo de pensamiento complejo. Los elementos tecnológicos utilizados son el software didáctico GeoGebra para el diseño de actividades que ilustraran ejemplos y teoremas, así como la plataforma educativa Moodle. A pesar de que se aplicaron las evaluaciones a todos los estudiantes participantes en las clases, los análisis de resultados se hicieron con base en siete estudiantes solamente, puesto que no todos habían realizado las tres evaluaciones, es así como, los resultados son alentadores en cuanto al impacto en la incorporación de TIC como herramienta de desarrollo de competencias, y en el aporte de elementos de este modelo en un curso universitario de cálculo. Estos pueden extenderse para incorporar el resto de contenidos del curso, e incluso otros cursos superiores de matemática, ***se concluye a través de esta investigación que, el diseño de propuestas didácticas en donde se usen las TICs debe principalmente orientar al estudiante a una comprensión de los conceptos de manera distinta a la que pueda enfrentarse en una clase tradicional, sin uso de TICs***. Para lograr esto, el profesor debe capacitarse en el uso de software educativo, lenguajes de programación que le permitan diseñar applets visualmente mejores así como las ilustraciones tengan mayor sentido matemático.

De otra forma, Guevara (2011), argumenta que, la implementación de ayudas tecnológicas al interior del aula permite procesos metacognitivos en los estudiantes y en los mismos docentes, esto quiere decir, en una reflexión sobre lo aprendido para hacer consiente de lo que se aprende. Así mismo Sabogal y col. (2013), argumentan que, la implantación de los (MEC), motiva a los estudiantes y hace mas amable la interacción con la herramienta, permitiendo el aprendizaje y la evaluación en todos los usuarios. También Briceño (2014), describe la manera en la que los estudiantes resignifican el concepto de función cuadrática, particularmente a través de la modelación de fenómenos. El autor propone que, analizar las relaciones que se suscitan en la clase de matemáticas, en las actividades de modelación favorecen aspectos variacionales de la función cuadrática.

También, Arango (2013), con su tesis de maestría titulada: Implementación de tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura de calculo diferencial, tuvo como objetivo, determinar la incidencia que el uso didáctico de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) tiene en el rendimiento académico de los estudiantes de la asignatura de cálculo diferencial, también, determinar el uso didáctico que los docentes de cálculo diferencial pertenecientes a la facultad ciencias básicas del instituto tecnológico metropolitano dan a las TIC y el rendimiento académico de los estudiantes. Se concluye que el manejo de estas herramientas didácticas permitieron entre los profesores estimular y motivar a los estudiantes para la realización de diferentes actividades en el marco del curso de cálculo diferencial. En conclusión, los resultados muestran un panorama favorecedor en la utilización de las TIC como herramienta didáctica y potenciador de un mejor rendimiento académico con un incremento gradual, con lo cual se deduce que el uso de estas herramientas es positivo, y que su aceptación va en incremento.

Como también lo expresan, Aedo y Cabrera (2013), con su artículo titulado: El aprendizaje del cálculo diferencial mediante el uso de un software multimedia, tuvieron como objetivo, enseñar al estudiante a razonar profundamente situaciones que conllevan a la aplicación del cálculo diferencial, enseñarlo a derivar, mostrarle información que pueda consultar para profundizar en sus conocimientos o aclarar cualquier duda, mostrarle muchos ejemplos de todo tipo incluyendo ejemplos de aplicación así como una guía de ejercicios para la ejercitación y consolidación de los conocimientos, además de varios temarios de exámenes donde se puede autoevaluar, ya que el estudiante deberá resolver las preguntas y seleccionar la respuesta correcta y obtendrá una calificación, es así como se concluye que, la multimedia para la enseñanza del cálculo diferencial está diseñada para su fácil manipulación, con ambiente agradable y hace que el estudiante se interese por la utilización y explotación del mismo para la adquisición de los conocimientos en el tema Cálculo Diferencial, por otra parte, es una herramienta que sirve como material complementario y medio de enseñanza del tema en las diferentes carreras que lo enseñen.

Por otra parte, Roumieu (2014), en su artículo tuvo como objetivo, determinar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de funciones, a través de una estrategia didáctica basada en la modelación matemática por medio de las TIC, promoviendo la realización de actividades que potencian un aprendizaje significativo, ésto se debe a la motivación de los estudiantes por el uso de las TIC y por otro lado la modelización de situaciones en contexto reales, respondiendo al cuestionamiento del "¿Para que sirve?". El autor concluye que, la propuesta permitió que los estudiantes experimentaran con procesos de modelación utilizando como soporte recursos tecnológicos, en este proceso se evidenció un avance significativo en la comprensión del concepto de función asó como, en los conceptos involucrados en el análisis de la misma. De este modo, Roumieu argumenta que el uso de software adecuado ayuda a crear un ambiente propicio para la investigación de propiedades y relaciones.

Además, Irazoqui (2015), con su tesis de maestría titulada: El aprendizaje del cálculo diferencial, una propuesta basada en la moduralización, tuvo como objetivo, probar que el diseño curricular modular genera aprendizajes significativos, el cual se expresa en un mejor rendimiento académico, comparado con el método tradicional. A través de esta propuesta se determinó que el diseño de actividades modulares permite una mejor aprehensión de los conceptos, es decir, enfocándose únicamente en la resolución de una tarea particular, como lo es la graficación y modelación de funciones polinómicas.

También, Pérez (2015), con su artículo titulado: Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tuvo como objetivo, desarrollar una serie de cuestionamientos acerca del uso de las TIC para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en este sentido, las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es un tema que según el autor, nos puede conducir a miles de reflexiones y a pensar en gran cantidad de aplicaciones informáticas que podrían tener cabida en este saco. Pérez (2015), ha expuesto algunas pinceladas pero existen puntos que deben quedar bastante remarcados: "Estamos educando personas para que formen parte activa de la sociedad en la que viven y, en esa sociedad las TIC están presentes y cada vez van a estarlo más" (Pérez, 2015).

Además, Narváez (2015), tuvo como objetivo, estimular el desarrollo del pensamiento variacional a través del estudio de funciones polinómicas con el software educativo Geogebra. Estuvo orientado a través del análisis de la teoría de Duval, del aprendizaje significativo de Ausubel, del enfoque piagetiano, de los estándares curriculares de matemáticas Nacionales e Internacionales. Así mismo, Narváez (2015), concluye que: La misma simplicidad del concepto de función, por sus múltiples usos en la vida cotidiana, se muestra como un obstáculo, lo que parece contradictorio. Permitiendo a los docentes de matemáticas replantear los métodos de enseñanza, los recursos didácticos, que utilizan para la apropiación y manejo de este concepto, de las clases de funciones, de su aplicabilidad, ya que sin duda alguna hace parte de una red de conocimientos importantes para el posterior estudio del cálculo.

Finalmente en la búsqueda de autores acerca del problema de investigación, Rodríguez, Romero y Vergara (2017), en su articulo tuvieron como objetivo, mostrar la importancia de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, es decir, que las herramientas tecnológicas desde su nacimiento han mostrado una gran influencia para la enseñanza, en este caso en la enseñanza de las matemáticas se han incorporado numerosas herramientas que permiten mostrar simulaciones, animaciones y procesos que han permitido el desarrollo de nuevas habilidades en los procesos académicos al interior de las aulas. Ante esta nueva tendencia los autores mencionan que, por ejemplo la UNESCO desarrolló estándares de competencias para docentes que buscan armonizar la formación de docentes con los objetivos nacionales en materia desarrollo, y para ello definieron tres factores de productividad, profundizar en capital, mejorar la calidad del trabajo e innovar tecnológicamente.

De lo anterior se evidencia como los Ministerios de Educación Nacional han determinado la importancia del uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje, sin embargo según Rodríguez, Romero y Vergara, se realizan muchos esfuerzos para incluir las TIC, pero pocos para tratar de armonizar el contenido disciplinar con la misma.

Capítulo 5

Marco teórico

Para el desarrollo de la investigación es necesario definir algunas teorías y conceptos importantes, por ejemplo que es una situación didáctica y cómo se configura una situación adidáctica, por otra parte, cómo se relaciona la ejercitación en la adquisición de conocimientos y saberes del tema de graficación y modelación de funciones polinómicas. Así mismo se ve la necesidad de definir conceptos de software educativo y la forma de relacionarlo con las situaciones didácticas y la ejercitación en matemáticas. En este sentido se darán respuesta a algunas preguntas como las siguientes: (1) ¿Qué es una situación didáctica?, (2) ¿Qué es una situación adidáctica?, (3) ¿Cómo se relaciona una situación didáctica con una situación adidáctica?, (4) ¿En dónde aparece el aprendizaje?, (5) ¿Cómo se puede incorporar la ejercitación con las situaciones didácticas?, (6) ¿Cuál es la estructura que debe tener un software educativo para aplicar como medio en una situación adidáctica?, (7) ¿Cuales son los elementos fundantes en la composición del concepto de graficación y modelación de funciones polinómicas que permiten generar una secuencia didáctica mediada por software? y (8) ¿Cuales son los elementos necesarios para diseñar una secuencia didáctica en el campo de la informática educativa?.

Estas preguntas permiten entonces, generar un panorama acerca del tema de la investigación y definir elementos importantes que permitan la comprensión y acercamiento de la metodología de la misma.

5.1 ¿Qué es una situación didáctica?

Con la finalidad de ubicar teóricamente a las situaciones didácticas se hace referencia a la ingeniería didáctica, dentro de la teoría de la ingeniería didáctica se encuentran cuatro fases (Artigue y col., 1995), análisis preliminar, análisis apriori, experimentación y análisis aposteiori, siendo el análisis apriori el lugar conceptual en el cual se desarrollan las situaciones didácticas, es decir, que en este análisis apriori se deben concebir una serie de experiencias enmarcadas en situaciones problema a través del direccionamiento de un docente investigador con la finalidad de que el estudiante adquiera un conocimiento en contexto. Es decir que, dentro del análisis apriori ocurren situaciones didácticas.

Con respecto a lo anterior se puede decir que una situación didáctica es un constructo teórico en el cual se desarrollan tres actores fundantes, estos son, el docente, el estudiante y el medio (Brousseau, 1998), así el docente es el encargado de proveer situaciones problemas al estudiante quien las resolverá a través del medio generando un conocimiento en contexto, en otras palabras y para diferenciar posteriormente con una situación adidáctica, una situación didáctica tiene al docente como un agente que esta monitorizando la construcción del conocimiento a través del direccionamiento aplicado de intenciones didácticas.

Luego, al finalizar el proceso de construcción del conocimiento en contexto, el docente investigador también tiene la tarea de convertir o transformar en el estudiante el conocimiento adquirido en saberes, esto quiere decir que, los conocimientos adquiridos por el estudiante en la situación didáctica tienen un contexto específico y no le sirven para resolver problemas en diferentes contextos, por esta razón el docente generaliza las reglas e inferencias obtenidas por el estudiante convirtiéndolas en saberes, denominando a este proceso la institucionalización de los conocimientos (Castañeda, Rodas y Molina, 2012).

Para dar más detalle de cómo se obtienen estos conocimientos se da lugar a la siguiente pregunta, desarrollada en la siguiente sección.

5.2 ¿Qué es una situación adidáctica?

Como se menciono anteriormente el conocimiento se construye en el marco conceptual de una situación didáctica en el cual hay una interacción entre el docente, el estudiante y el conocimiento (Martínez, Armengol y Muñoz, 2019), ahora se requiere de un espacio mas intimo entre el estudiante y el conocimiento en el cual el docente no esta presente denominando a esta situación una situación adidáctica.

Ahora bien, la situación adidáctica incorpora un nuevo agente crucial para la construcción del conocimiento denominado el medio. El medio como se indico anteriormente es un agente con la capacidad de responder a las acciones del estudiante, en otras palabras es una herramienta que posibilita un diálogo entre el estudiante y el conocimiento sobre el cual se genera una transferencia de procesos y operaciones que permiten desarrollar y completar las situaciones problema anteriormente propuestas por el docente (Sarmiento, 2004). En otras palabras, cuando en la situación didáctica el docente propone una serie de problemas al estudiante, estos problemas se transfieren directamente a la situación adidáctica en la cual el estudiante manipulará estratégicamente al medio para obtener una solución a esta lista de problemas, que por lo general no lo logrará en el primer intento y sobre el cual deberá reelaborar su estrategia hasta conseguir la solución adecuada que en su momento el medio mostrará que así lo fue.

Se debe notar, que en este proceso, no se puede saber cuántas veces el estudiante realizará ajustes a su estrategia, pero si se sabe que llegará a la solución, proceso que se denomina aprendizaje por adaptación al medio (Brousseau, 1998), es decir que, cuando el estudiante recibe la intención del docente en la situación didáctica se sumerge en un espacio sobre el cual construirá su conocimiento a través de la reestructuración de una estrategia inicial que le permitirá dar solución a todos los problemas propuestos inicialmente, siendo este el fundamento de una situación adidáctica.

A continuación se explicitará cual es la relación que existe entre una situación didáctica y una situación adidáctica.

5.3 ¿Cómo se relaciona una situación didáctica con una situación adidáctica?

Como se ha descrito anteriormente una situación didáctica ofrece la intervención del docente, mientras que una situación adidáctica no lo hace (Brousseau, 1998). Ahora bien es necesario entender un poco más acerca de las situaciones adidácticas, como un conjunto de situaciones que se pueden presentar dentro de un proceso de aprendizaje y que se pueden categorizar en tres conjuntos, las situaciones de acción, las situaciones de formulación y las situaciones de validación (Briceño y Alamillo, 2017). En el primer conjunto se encuentra la esencia de la construcción del conocimiento, pues en ella el estudiante debe juzgar e interpretar la retroacción generada por el medio y decidir si la estrategia propuesta resuelve totalmente al problema. En esta situación se genera un modelo implícito que seguirá ejecutándose en otros problemas incorporando nuevas condiciones de tal forma que se puedan abarcar muchos problemas de la misma naturaleza, en otras palabras, una situación de acción genera en el estudiante un modelo que le permitirá resolver un conjunto de problemas de un conjunto similar.

Por otra parte, se encuentran las situaciones adidácticas de formulación (Latorre y col., 2013), en la cual antes de incorporar nuevas condiciones al momento que esta construyendo implícitamente, formula condiciones y parámetros que comunica a otros estudiantes para determinar si su razonamiento es correcto, esto quiere decir, que, en el proceso de construcción del modelo implícito de resolución aparecen momentos en los que es necesario formular nuevos procesos para agregarlos al modelo, que se hace a través del intercambio de información con otras personas de su contexto. Finalmente se encuentran las situaciones adidácticas de validación (Latorre y col., 2013), en las cuales después de crear su modelo de resolución e intercambiar información con otras personas debe demostrar que el modelo que ha creado es válido, es así como debe convencer a otras personas que el modelo construido es el adecuado para resolver un conjunto de problemas. Luego se debe buscar, que el medio sea lo suficientemente robusto para indicar al estudiante apreciaciones acerca de la aplicación de su modelo.

A través de esta descripción, se entiende que una situación didáctica se relaciona con las situaciones adidácticas de uno a muchos, es decir, que en una situación didáctica están presentes muchas situaciones adidácticas y que cada una de ellas configura un proceso particular generando diferentes valores y respuestas para la variable didáctica enmarcada en la situación.

Con respecto a lo anterior, se debe definir una situación didáctica por cada concepto, igualmente cada situación esta relacionada con una variable didáctica (Artigue y col., 1995) que permitirá posteriormente evaluar el proceso conjunto de todas las situaciones problema planteadas en la secuencia didáctica, por esta razón se estudiará a continuación una estrategia conceptual por medio de la cual se pueda incorporar la ejercitación con las situaciones didácticas.

5.4 ¿En dónde aparece el aprendizaje?

Previamente al describir algunos modelos de aprendizaje es conveniente conocer el concepto de contrato didáctico. Brousseau, lo define como el conjunto de comportamientos del maestro que son esperados por el alumno, y de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro. Estos comportamientos regulan el funcionamiento de la clase, definiendo así los roles de cada uno y distribuyendo las tareas. Este contrato posee componentes explícitos e implícitos (1998).

Las relaciones de enseñanza se puede observar a través de las interrelaciones entre el maestro, el alumno y el saber, sin dejar de analizar el contexto (Rangel y Reyes, 2014). No se puede dejar de conocer cual es el lugar que ocupa el saber dentro de la institución educativa para el profesor y para los alumnos. Es importante destacar que ningún docente utiliza sólo un modelo, en realidad utiliza elementos de cada uno de ellos (expuestos a continuación), pero consciente o no privilegia a alguno en particular.

5.4.1 Modelo centrado en el contenido

Este modelo se conoce también con el nombre de *normativo* (Delgado, 2019). En este caso la pedagogía es el arte de comunicar un saber. Podemos pensar como submodelos a los dogmáticos. El maestro introduce los conceptos y provee los ejemplos, mientras tanto el alumno escucha, aprende, ejercita y finalmente aplica. El saber ya está construido.

Contexto

Saber

↗ ↖

Maestro ······ Alumno

En este modelo el problema es tomado como criterio de aprendizaje, es por esto que se estudian diferentes tipos de problemas. Cuando al alumno se le da un problema él determina si ya ha trabajado con otro problema del mismo tipo.

En este modelo subyace la idea de que es necesario partir de lo más fácil a lo más difícil y que todo aprendizaje debe ir de lo concreto a los abstracto.

5.4.2 Modelo centrado en el alumno

Este modelo es llamado *iniciativo*, la estructura propia del saber pasa a un plano secundario, el saber esta relacionado a las necesidades de la vida del alumno. Dentro de este modelo se encuentran los "métodos activos". (Delgado, 2019)

En un principio se pregunta al alumno sobre sus propios intereses y/o necesidades, mientras el maestro lo escucha le despierta curiosidad, lo ayuda a usar fuentes de información, lo remite a herramientas de aprendizaje, responde a sus requerimientos y busca mejorar la motivación. Finalmente el alumno recolecta información, la organiza, estudia y aprende. (Delgado, 2019)

Contexto

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Alumno} & \\
\nearrow & & \nwarrow \\
\text{Maestro} & \cdots\cdots & \text{Saber}
\end{array}
$$

En este modelo se utiliza al problema como motor del aprendizaje. Se deja al alumno el papel de ávido demandante de conocimientos. En realidad las situaciones naturales son demasiado complejas para que él pueda construir por si mismo las herramientas necesarias, además estas herramientas suelen depender demasiado de lo ocasional del problema. (Delgado, 2019)

5.4.3 Modelo centrado en la construcción del saber por el alumno

Este modelo, conocido también como *aproximativo*, parte de concepciones que el alumno ya posee y las pone a prueba para mejorarlas o bien para construir otros nuevos (Delgado, 2019). En este caso el maestro propone y organiza una seria de situaciones con diversos obstáculos, como así también las fases de investigación. También es el responsable de la comunicación de la clase. El alumno en tanto ensaya, propone y compara sus soluciones, con las de sus compañeros. Al saber se lo toma con su lógica propia.

Contexto

Saber

$\nearrow$ $\nwarrow\searrow$

Maestro $\cdots\cdots$ Alumno

Para este modelo el problema es un recurso de aprendizaje. La resolución de problemas interviene desde el comienzo del aprendizaje. El docente elige una seria de problemas y el alumno construye su saber resolviéndolos en interacción con sus compañeros.

5.5 ¿Cuál es el lugar de la ejercitación con las situaciones didácticas?

Como se mencionó anteriormente, las situaciones didácticas ofrecen una configuración de componentes orgánicos que permiten la dinamicidad del conocimiento Latorre y col. (2013); Briceño y Alamillo (2017), esto es la interacción que existe entre el docente, el estudiante y el mismo conocimiento. Ahora también se ha mostrado que una situación didáctica contiene muchas situaciones adidácticas, es decir que, se habla de una relación de uno a muchos. Con este contexto, la ejercitación debe iniciar incorporándose desde las intenciones del docente en la situación didáctica (Bahamonde y Vicuña, 2011), hasta llegar a cada una de las situaciones adidácticas generando la posibilidad de incorporar alguna estrategia de resolución de problemas.

Lo anterior quiere decir que, cuando el estudiante se enfrenta a una situación adidáctica puede formular una serie de estrategias que le permitan resolver el problema (Latorre y col., 2013). Inicialmente el juego computarizado ofrece una secuencia de ejercicios de modelación y graficación de funciones polinómicas que le permitirán al estudiante ejercitarse en los algoritmos, luego, aparecen una lista de problemas (tipo ejercicio procedimental) que requieren de una habilidad adquirida para modelar y graficar las funciones polinómicas.

En este sentido se dice que un problema no es igual a un ejercicio, ya que un ejercicio busca que el estudiante adquiera una habilidad algorítmica, mientras que un problema busca adquirir estrategias para resolver situaciones que no tienen siempre un mismo proceder, es decir, que no se usa el mismo algoritmo para resolver los problemas planteados (Pérez, 2009).

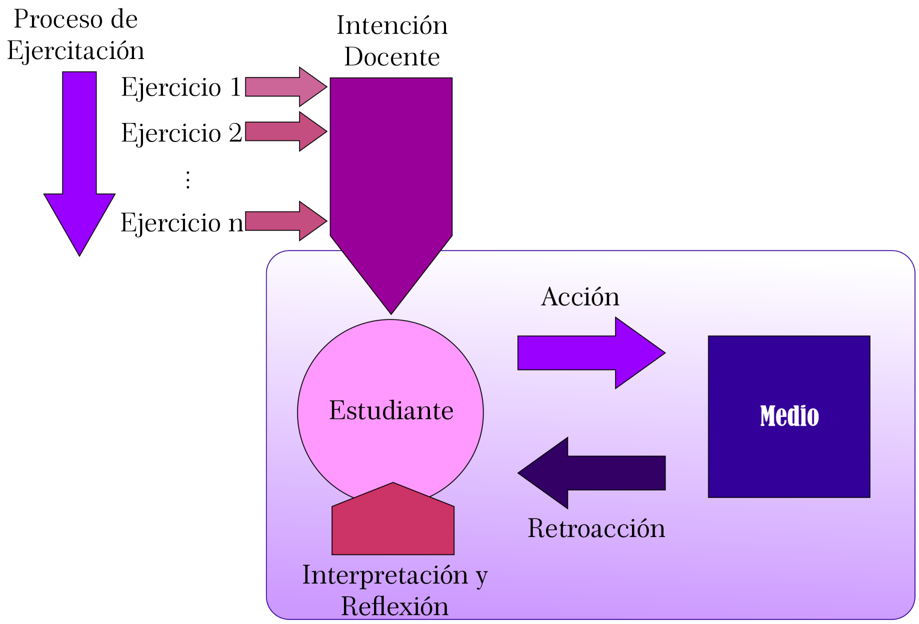


Figura 5.1: Esquema de una situación adidáctica (modificación de (Brousseau, 2007))

Sin embargo, en la figura 5.1 se observa que el estudiante se enfrenta a un medio con el propósito de dar solución a las intenciones plasmadas por el docente/investigador, que en el caso de esta investigación vienen dados por un conjunto de ejercicios referentes a la graficación (caracterización) y modelación de una función polinómica. El estudiante debe plantear una estrategia inicial para resolver el ejercicio (conceptualización que ya se ha explicado en el aula de clase) pero que en la característica de cada ejercicio encontrará algunas modificaciones que debe realizar a su modelo hasta llegar a un modelo concertado, que no solamente le permita resolver los ejercicios propuestos por el medio, si no también encontrar relaciones en las variaciones de los mismos.

Ahora bien, es en cada una de las situaciones adidácticas que el estudiante podrá aplicar y proponer una serie de estrategias para resolver los problemas planteados por el docente/investigador en la secuencia didáctica (Brousseau, 1998).

5.6 ¿Cuál es la estructura que debe tener un software educativo para aplicar como medio en una situación adidáctica?

Una situación adidáctica se compone por los actores principales, el estudiante, el medio y el conocimiento (Brousseau, 1998). Principalmente se entiende que el estudiante debe resolver una serie de situaciones problema a través del uso de la herramienta TIC en este caso el medio. Es así como la herramienta debe tener unas configuraciones y especificaciones concretas (Pizarro, 2009). En primer lugar la herramienta debe estar configurada de tal forma que todas las acciones que el estudiante desarrolle sobre el medio (la herramienta TIC) tenga una respuesta inmediata y que el estudiante puede interpretar si su acción ha sido la adecuada o no (Pizarro, 2009). Es decir, que la herramienta TIC debe ser diseñada de tal forma que siempre este pendiente de las acciones del estudiante y programada de tal forma que permita dar una correcta retroalimentación de las acciones ejecutadas sobre ella (Arroyo, 2006).

Por otra parte debe tener un diseño secuencial, es decir que, cada una de las actividades propuestas permita obtener unos conocimientos para resolver el siguiente problema, esto permitirá en el estudiante un aprendizaje estructurado secuencial.

Para clasificar el término software educativo, es necesario distinguir los componentes principales de su terminología. Según Quintero y col. (2005), se define software educativo al conjunto de aplicaciones educativas o programas de carácter didáctico, diseñados con la finalidad específica de utilizarlos con la necesidad de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje entre la comunidad educativa, caracterizándolo por ser una herramienta interactiva que responde inmediatamente las acciones de los usuarios y/o los estudiantes, además, permite individualizar el trabajo de los estudiantes debido a que se adapta al contexto de cada uno y las actividades las puedes realizar según sus propias actuaciones (2005).

En este sentido según los autores (Arroyo, 2006), un software educativo debe tener la capacidad de responder de forma automática a las acciones del estudiante, sentido que permite incorporar la teoría de las situaciones didácticas, ya que el estudiante es el que a través del medio debe resolver las intenciones plasmadas por el docente en la secuencia didáctica, permitiendo observar que el medio en este caso el software educativo debe responder de forma automática al estudiante y generar el proceso interactivo denominado aprendizaje por adaptación (Brousseau, 2007).

Para Arroyo (2006), de todas las formas de aplicación de las nuevas tecnologías, una de las mas extendidas y utilizadas por su adecuación a las teorías de la enseñanza-aprendizaje son los sistema conocidos como software educativo. Marqués (2005) citado por Arroyo (2006) argumenta que, se entiende por Software Educativo, aquellos programas para ordenador [computador] creados con la finalidad específica de ser utilizados como medio didáctico, es decir, para facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Por otra parte, Arroyo (2006) menciona algunas características esenciales del software educativo:

1. Son materiales elaborados con una finalidad didáctica, como se desprenden de la definición, por lo tanto son atractivos y se presentan interesantes al estudiante.

2. Utilizan el ordenador como soporte en el que los estudiantes realizan las actividades que ellos proponen.

3. Son interactivos, contestan inmediatamente las acciones de los estudiantes y permiten un diálogo y un intercambio de informaciones entre el ordenador y los estudiantes.

4. Individualizan el trabajo de los estudiantes, ya que se adaptan al ritmo de trabajo de cada uno y pueden adaptar sus actividades según las actuaciones de los estudiantes.

5. Son fáciles de usar. Los conocimientos informáticos necesarios para utilizar la mayoría de estos programas son similares a los conocimientos de electrónica necesarios para usar un video, es decir, son mínimos, aunque cada programa tiene unas reglas de funcionamiento que es necesario conocer.

Además, Arroyo (2006) describe las funciones del software educativo así:

1. **Función informativa**.

   La mayoría de los programas a través de sus actividades presentan unos contenidos que proporcionan una información estructuradora de la realidad a los estudiantes. Como todos los medio didácticos, estos materiales representan la realidad y la ordenan. Los programas tutoriales, los simuladores y, especialmente, las bases de datos, son los programas que realizan mas marcadamente una función informativa.

2. **Función instructiva.**

   Todos los programas educativos orientan y regular el aprendizaje de los estudiantes ya que, explícita o implícitamente, promueven determinadas actuaciones de los mismos encaminadas a facilitar el logro de unos objetivos educativos específicos. Además condicionan el tipo de aprendizaje que se realiza pues, por ejemplo, pueden disponer un tratamiento global de la información (propio de los medios audiovisuales) o a un tratamiento secuencial (propio de los textos escritos).

   Con todo, si bien el ordenador actuá en general como mediador en la construcción del conocimiento y el meta-conocimiento de los estudiantes, son los programas tutoriales los que realizan de manera más explícita esta función instructiva, ya que dirigen las actividades de los estudiantes en función de sus respuestas y progresos.

3. **Función motivadora.**

   Generalmente los estudiantes se sienten atraídos e interesados por todo el software educativo, ya que los programas suelen incluir elementos para captar la atención de los estudiantes, mantener su interés y, cuando se necesario, focalizarlo hacia los aspectos más importantes de las actividades.

Por lo tanto la función motivadora es una de las características más resaltantes de este tipo de materiales didácticos y resulta extremadamente útil para los docentes.

4. **Función evaluadora.**

   La interactiva propia de estos materiales, que les permite responder inmediatamente a las respuestas y acciones de los estudiantes, les hace especialmente adecuados para evaluar el trabajo que se va realizando con ellos. Esta evaluación puede ser de dos tipos:

   - implícita, cuando el estudiante detecta sus errores, se evalúa, a partir de las respuestas que le da el ordenador.
   - Explícita, cuando el programa presenta informes (test) valorando la actuación de estudiante.

5. **Función investigadora.**

   Las bases de datos, simuladores y programas constructores, ofrecen a los estudiantes interesantes entornos dónde investigar: buscar determinadas informaciones, cambiar los valores de las variables de un sistema, etc. Además, pueden proporcionar a los docentes y estudiantes instrumentos de gran utilidad para el desarrollo de trabajos de investigación que se realicen básicamente al margen de los ordenadores.

6. **Función expresiva.**

   Dado que los ordenadores son unas máquinas capaces de procesar los símbolos mediante los cuales las personas representan el conocimiento y se comunican, sus posibilidades como instrumento expresivo son muy amplias. Haciendo uso de los elementos de la informática, específicamente del software educativo, los estudiantes se expresan y se comunican con el ordenador y con otros compañeros a través de las actividades de los programas y, especialmente, cuando utilizan lenguajes de programación, procesadores de texto, editores de gráficos, etc.

Otro aspecto a considerar al respecto es que los ordenadores no suelen admitir la ambigüedad en sus "diálogos" con los estudiantes, de manera que los estudiantes se ven obligados a cuidar más la precisión de sus mensajes. Lo cual se refuerza mediante la nueva cultura de los mensajes por teléfonos móviles.

7. **Función metalingüistica.**

   Mediante el uso de los sistemas operativos (Windows, UNIX, Linux) y los lenguajes de programación (Basic, C, otros) los estudiantes pueden aprender los lenguajes propios de la informática.

8. **Función Lúdica.**

   Trabajar con los ordenadores realizando actividades educativas es una labor que a menudo tiene unas connotaciones lúdicas y festivas para los estudiantes. Además algunos programas refuerzan su atractivo mediante la inclusión de determinados elementos lúdicos, con lo que potencian aun más esta función.

9. **Función innovadora.**

   Aunque no siempre sus planteamientos pedagógicos resulten innovadores, los programas educativos se pueden considerar materiales didácticos con esta función ya que utilizan una tecnología recientemente incorporada a los centros educativos y, en general, suelen permitir muy diversas formas de uso. Esta versatilidad abre amplias posibilidades de experimentación didáctica e innovación educativa en el aula.

Al igual que en las características, siempre se pretende que el software cumpla con el mayor número de funciones posibles, logrando de esta manera un mejor aprovechamiento del medio didáctico.

5.7 ¿Cuáles son los elementos fundantes en la composición del concepto de graficación y modelación de funciones polinómicas que permiten generar una secuencia didáctica mediada por un software?

5.7.1 Función constate

Si una función cuyo codominio consta de un solo número recibe el nombre de función constante. De este modo, si $f(x) = c$,y c es cualquier número real, entonces f es una función constante y su grafica es una recta horizontal a una distancia dirigida de c unidades a partir del eje x.

Ejemplo: La función definida por $f(x) = 7$ es una función constante, y su gráfica, mostrada en la 5.5, es una recta horizontal situada a 7 unidades sobre el eje x.

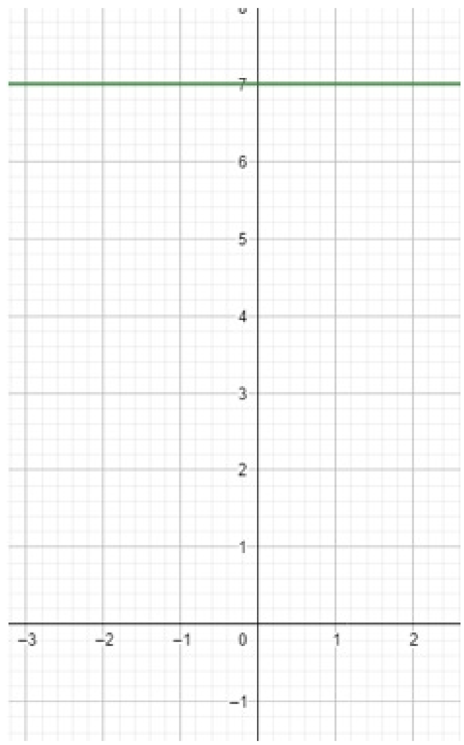


Figura 5.2: Gráfica de la función $f(x) = 7$. (Elaboración propia)

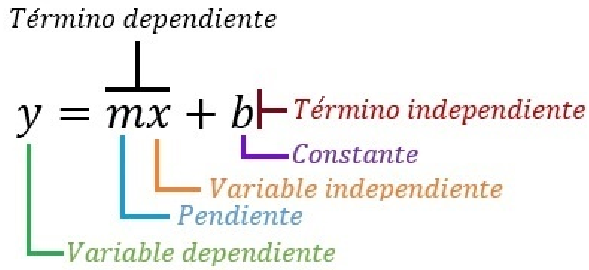
5.7.2 Función lineal

La función es una correspondencia entre los elementos de un conjunto de partida, llamado Dominio, y los elementos de un conjunto de llegada, llamado Codominio, de forma tal que a cada elemento del dominio le corresponde uno, y solo uno, en el codominio.

Según Manfredi (2008), una función lineal es una función cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio son también todos los números reales, y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado.

Se llama por función lineal a una ecuación del tipo:

$$y = mx + b$$



y su gráfica corresponde la mostrada en la figura 5.3

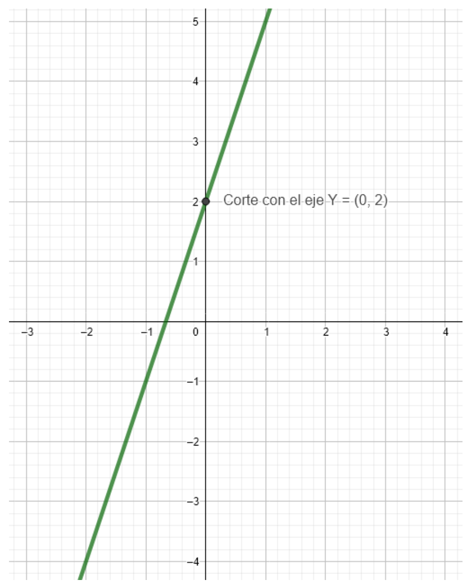


Figura 5.3: Gráfica de una función lineal con pendiente $m = 3$ y corte con el eje y en $b = 2$.

Definición

Sea $f : R \to R$ / $f(x) = mx + b$ donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su grafica es una recta cuya pendiente es m y su intercepción y ordenada al origen es b.

Ejemplo: La función definida por $f(x) = 3x - 6$, es lineal. Su grafica es la recta mostrada en la 5.4

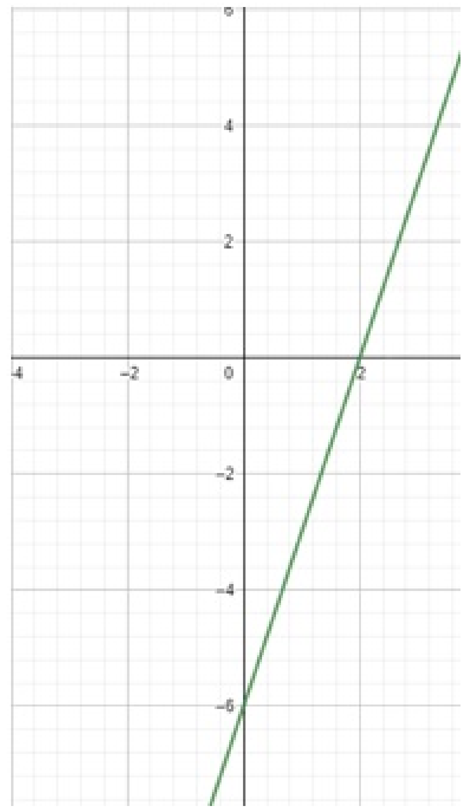


Figura 5.4: Gráfica de la función $f(x) = 3x - 6$. (Elaboración propia)

Se llaman variables a un símbolo el cual se le puede asignar un conjunto de valores. Se suele utilizar para ello las letras: u, v, w, x, y, z. Existen dos tipos: las dependientes y las independientes, en particular en la expresión "x"es la variable independiente ya que es ella la que adquiere un valor arbitrario dentro de un conjunto de números, en cambio "y" es la variable dependiente ya que su valor se encuentra condicionado al valor de "x".

La constante también es llamada ordenada al origen, y de ella dependerá en que lugar del eje de las ordenadas, será cortado por la gráfica. Esta representado por el símbolo "b" y posee un solo valor. En particular a las constantes se las suele asignar con letra: a, b, c.

El termino independiente es aquel que posee a la constante u ordenada al origen y el termino dependiente es el otro.

Las funciones lineales poseen, como su nombre lo indica, una grafica determinada por una recta y analíticamente son ecuaciones de primer grado.

La pendiente de una función lineal esta determinada por el valor que adopte la letra "m"" en nuestra ecuación y determina el grado de inclinación en la grafica y es un valor que permanecerá constante sin importar los valores que adopte "x".

La función lineal particular definida por $f(x) = x$, se denomina función identidad, a la función que a cada elemento del dominio le corresponde el mismo elemento del codominio. Su grafica se observa en la figura 5.5 , es la recta que biseca los cuadrantes primero y tercero.

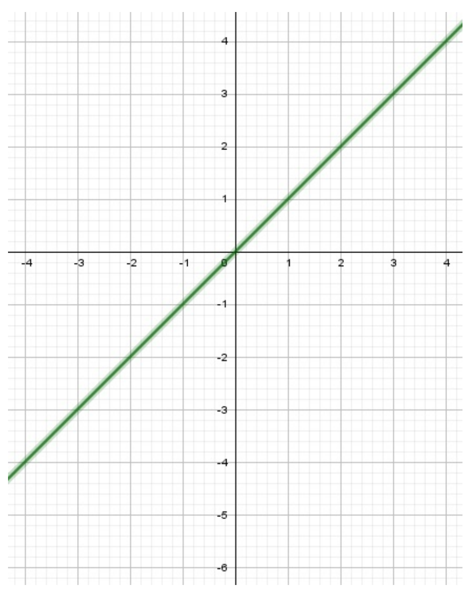


Figura 5.5: Gráfica de la función identidad $f(x) = x$.

5.7.3 Intersecciones con los ejes

Dos tipos de puntos solución útiles al representar gráficamente una ecuación son aquellos en los que la coordenada x o y es cero. Tales puntos se denominan intersecciones con los ejes porque son los puntos en que la gráfica corta (hace intersección con) el eje x o con el eje y. Un punto del tipo $(a, 0)$ es una intersección en x de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las intersecciones en x de una gráfica, se debe igualar y a cero y despejar x de la ecuación resultante. De manera análoga, un punto del tipo $(0, b)$ es una intersección en y de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para encontrar las intersecciones en y de una gráfica, se debe igualar x a cero y despejar y de la ecuación resultante. (Larson, Hostetler y Edwards, 1999)

Es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, considerar las siguientes graficas.

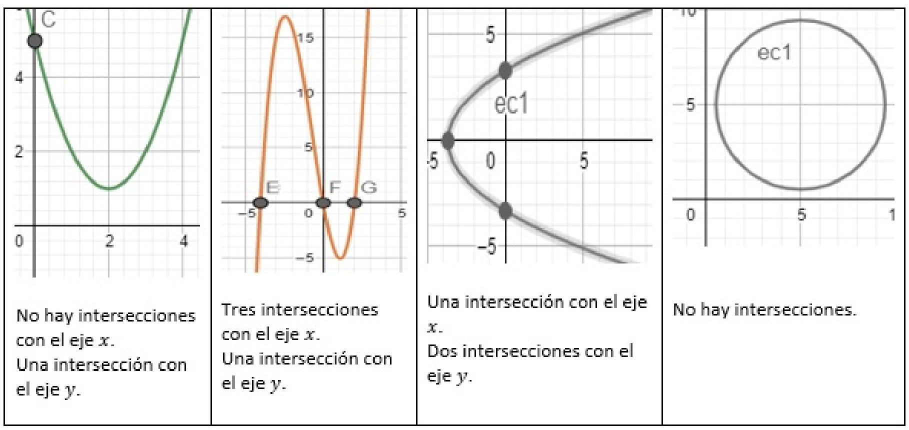


Figura 5.6: Tipos de intersección con los ejes. (Elaboración propia)

5.7.4 Simetría de una gráfica

Es útil conocer la simetría de una gráfica antes de intentar trazar, puesto que sólo se necesitarán la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetrías pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación, y se puede observar su comportamiento en la figura 5.7.

1. Una gráfica es simétrica respecto al eje y si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto$(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje.

2. Una gráfica es simétrica respecto al eje x si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada sobre el eje x es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje.

3. Una gráfica es simétrica respecto al origen si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalteradas se efectúa una rotación de $180°$ respecto al origen.

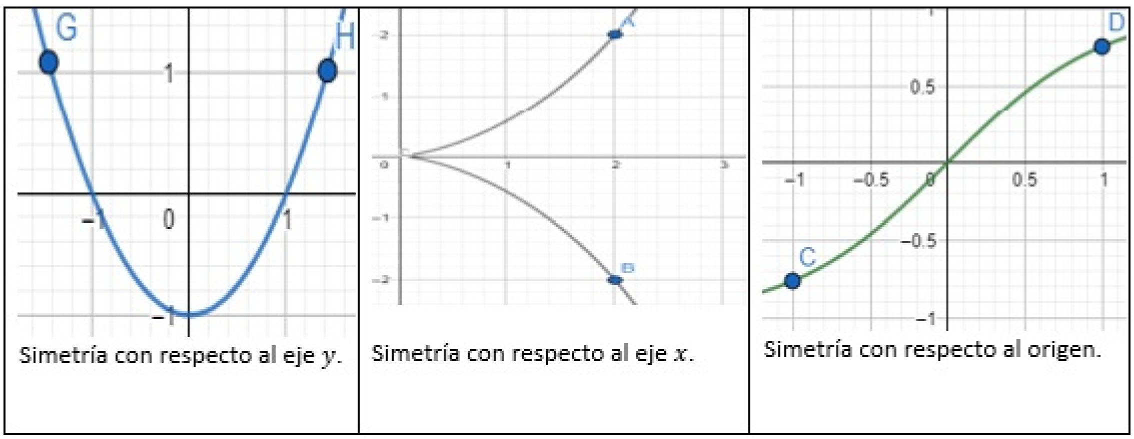


Figura 5.7: Tipos de simestria de una función. (Elaboración propia)

Criterios de simetría

1. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La grafica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La grafica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

5.7.5 Función cuadrátrica

Según Varsity (2022) una función cuadrática es un tipo de función que se caracteriza por ser un polinomio de segundo grado. Es decir, tiene la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$. Nótese que si $a = 1$ y $b = c = 0$ se obtiene

$$f(x) = x^2$$

Y si $a = -1$ y $b = c = 0$ se obtiene

$$f(x) = -x^2$$

Ejemplo: La grafica de una función cuadrática siempre es una parábola como se observa en la figura 5.8.

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

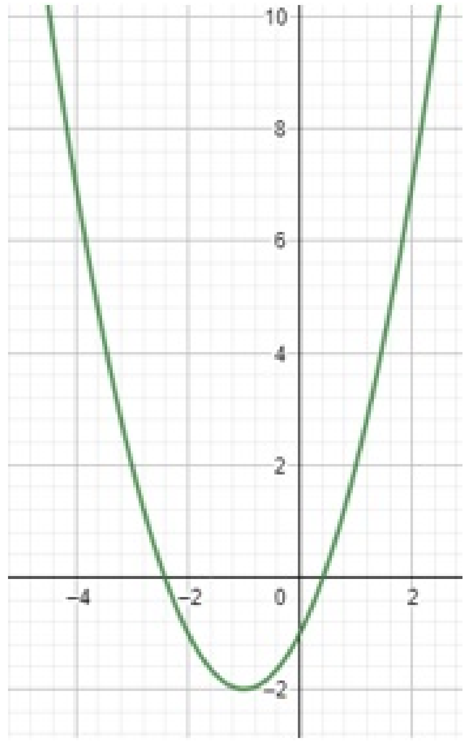


Figura 5.8: Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$. (Elaboración propia)

Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba ($\bigcup$) y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo ($\bigcap$). En el primer caso la parábola presenta un punto mínimo que se encuentra sobre el origen y en el segundo caso la parábola presenta un máximo que también se encuentra sobre el origen. Este punto máximo o mínimo se denomina **VÉRTICE**.

Además de la orientación, el coeficiente a es la causa de la amplitud de la función: cuanto mayor es "a", más rápido crece (o decrece) la parábola, por lo que es más cerrada.

Vertice

El vértice de una parábola es el punto en la parte baja de la forma $\bigcup$, (o la superior, si la parábola abre hacia abajo).

Ejemplos

❍ Se tiene la función $f(x) = ax^2$, $a > 0$, donde se puede observar que la parábola abre hacia arriba, como se muestra en la figura 5.9.

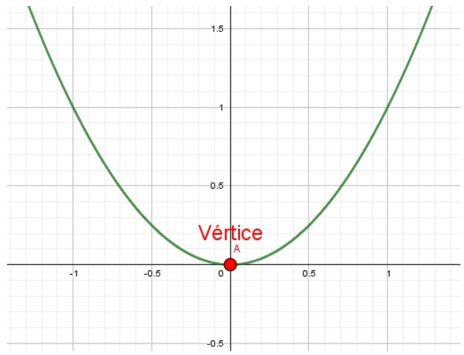


Figura 5.9: Gráfica de la función $f(x) = ax^2$ con $a > 0$. (Elaboración propia)

- Se tiene la función $f(x) = ax^2$, $a < 0$, donde se puede observar que la parábola abre hacia abajo, como se muestra en la figura.

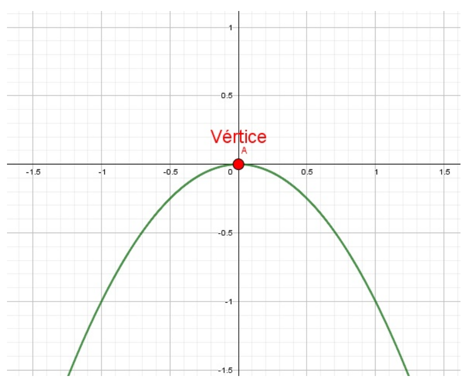


Figura 5.10: Gráfica de la función $f(x) = ax^2$, $a < 0$. (Elaboración propia)

❑

La ecuación para una parábola también puede escribirse en la "forma vértice".

$$y = a(x - h)^2 + k$$

En esta ecuación, el vértice de la parábola es el punto (h, k), de esta manera se tiene que :

$$y = a(x-h)(x-h) + k$$
$$y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

El coeficiente de x aquí es $-2ah$. Esto significa que, en la forma estándar, $y = ax^2 + bx + c$, la expresión $-\frac{b}{2a}$ nos da la coordenada en el vértice.

Ejemplo: Encuentre el vértice de la parábola

$$y = 2x^2 + 16x - 8$$

Aquí, $a = 2$ y $b = 10$. Así, la coordenada en x del vértice es:

$$-\frac{16}{2(2)} = -4$$

Sustituyendo en la ecuación original para obtener la coordenada en y, se obtiene:

$$y = 2(-4)^2 + 16(-4) - 8$$
$$y = -40$$

Así, el vértice de la parábola está en $(-4, -40)$.

5.7.5.1 El eje de simetría

El eje de simetría de una parábola es la recta vertical a través del vértice. Para una parábola en la forma estándar,

$$y = ax^2 + bx + c$$

, el eje de simetría tiene la ecuación:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

se nota que $-\frac{b}{2a}$ es también la coordenada en x del vértice de la parábola.

Ejemplo: Encuentre el eje de simetría $y = 2x^2 + x - 3$

Aquí, $a = 2$ y $b = 1$. Así, el eje de simetría es la recta vertical

$$x = -\frac{1}{4}$$

en la figura 5.11.

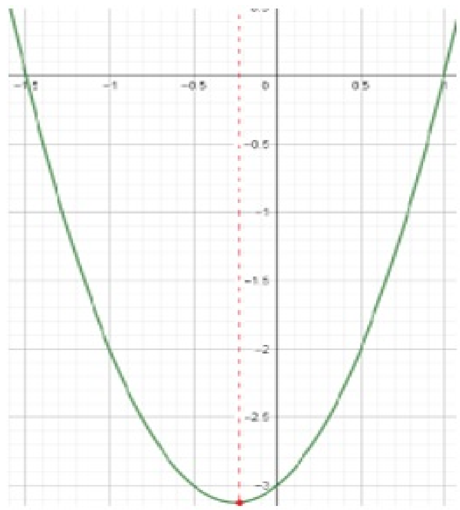


Figura 5.11: Gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + x - 3$, con eje de simetría en $x = -\frac{1}{4}$. (Elaboración propia)

5.7.5.2 Intercepciones

Puede encontrar la intercepción en y de una parábola simplemente al introducir 0 para x. Si la ecuación está en la forma estándar, entonces solo se toma a c como la intercepción en y. Por ejemplo, en el ejercicio anterior:

$$y = 2(0)^2 + (0) - 3$$

así la intercepción en y es -1.

Las intercepciones en x son un poco más complicadas. Se puede implementar la factorización, o completar el cuadrado, o la formula cuadrática para encontrar estas, si es que existen.

5.7.6 Dominio y Rango

Como con cualquier función, el dominio de función cuadrática $f(x)$ es el conjunto de los valores de x para los cuales la función está definida, y el rango es el conjunto de todos los valores de salida (valores de f).

Las funciones cuadráticas generalmente tienen la recta real de enteros como su domino: cualquier x es una entrada legítima. El rango esta restringido a esos puntos mayores que o iguales a la coordenada en y del vértice (o menores que o iguales a, dependiendo si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo) (Varsity, 2022).

5.7.6.1 Funciones cúbicas

Las funciones cúbicas son aquellas que están definidas por polinomios de tercer grado. Constituyen un buen eslabón entre las cuadráticas y las de grado superior. Es muy conveniente estudiar su comportamiento geométrico con sumo cuidado antes de entrar en una generalización mayor (Villa, 1995). Enseguida se mostrarán tres ejemplos de funciones cúbicas. Entre ellas, el coeficiente del término de mayor exponente se llama coeficiente principal.

$$y = x^3, y = 5x^3 + x^2, y = 2x^3 - 5x^2 + x$$

En la primera el coeficiente principal es *1*, en la segunda es *5* y en la tercera es *2*. La definición formal es la siguiente:

Definición

Una función cúbica es una expresión de la forma

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

con a, b, c y d números arbitrarios, pero $a \neq 0$.

La condición $a \neq 0$ es sólo para garantizar la presencia del término de tercer grado. La gráfica de una función cúbica se puede identificar usando el método de representación de puntos. Se comenzará con el ejemplo más simple.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de la función $y = x^3$.

Solución

Ya que no se tiene ninguna idea de la forma de la gráfica, lo más indicado es, en principio, usar el método de representación de puntos. No obstante, algunas cosas se pueden advertir: como la función está definida por una potencia impar, es positiva para valores positivos de x y negativa para valores negativos de x. Esto quiere decir, que la curva estará por encima del eje x en la parte positiva y por debajo en la parte negativa. Se realizará una tabla de valores, donde se marcaran los puntos y se unirán con una curva continua 5.12.

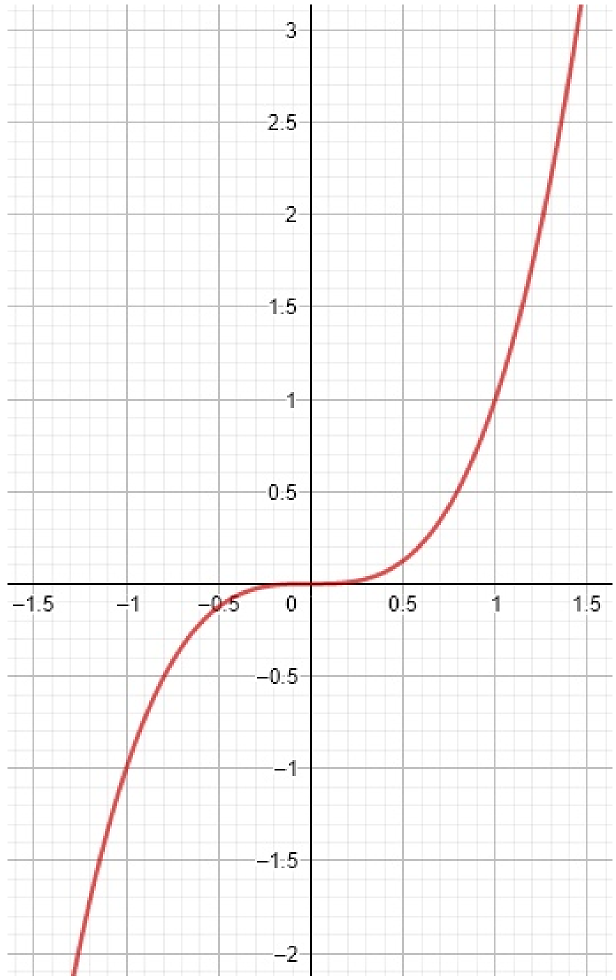


Figura 5.12: Gráfica de la función cúbica, elaboración propia

La curva resultante se llama una *parábola cúbica,* o simplemente una *cúbica.* Es una curva que crece izquierda a derecha. El punto de la curva en el origen se llama un *punto de inflexión,* porque ahí la curva cambia de concavidad. En efecto, para $x < 0$ la curva es cóncava hacia abajo, mientras que para $x > 0$ *es cóncava hacia arriba.*

5.7.7 ¿Cómo graficar una función polinómica?

Para Rincón, Carmona y Aldana (2015), graficar una función polinómica se pueden seguir dos métodos muy similares a los de la función cuadrática.

Aunque por su gran extensión de términos y la forma gráfica que toma, la tabulación no es le mejor forma de graficar una función polinómica.

División Sintética

La división sintética es la forma que se usa para conocer los puntos de corte con el eje x de una función polinómica, y a través de un análisis de la función se puede determinar como es su comportamiento. Los puntos mínimos, máximos y de inflexión, así como la concavidad se estudiaran cuando se introduzca la derivada (Rincón, Carmona y Aldana, 2015).

Ejemplo: Graficar la función polinómica

$$f(x) = f(x) = x^4 - 26x^3 + 61x^2 + 2124x - 11340$$

Solución: Para encontrar los puntos de corte se usa la división sintética, así:

- ❍ Los divisores de 11340 son:
  - ❑ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 27, 28, 30, 35, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 70, 81, 84, 90, 105, 108, 126, 135, 140, 162, 180, 189, 210, 252, 270, 315, 324, 378, 405, 420, 540, 567, 630, 756, 810, 945, 1134, 1260, 1620, 1890, 2268, 2835, 3780, 5670, 11340

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-26	61	2124	-11340	$x = 7$
	7	-133	-504	11340	
1	-19	-72	1620	0	$x = -9$
	-9	252	-1620		
1	-28	180	0		$x = 18$
	18	-180			
1	-10	0			$x = 10$
	10				
1	0				

5.7.8 Reducir la amplitud de la función

Hay
funciones polinómicas que tienen valores muy grandes y respectivamente los máximos y mínimos serán muy grandes. En el ejemplo se observa que los puntos de corte son $x = -9$, $x = 7$, $x = 10$ y $x = 18$ de donde se puede decir que

$$-11340 = -9 \times 7 \times 10 \times 18,$$

de tal forma que si dividimos el número -11340 entre $-9 \times 10 \times 18 = 1620$ se reduce el valor de punto de corte a 7. Así la función se transforma en

$$f(x) = \frac{1}{1620}x^4 - \frac{13}{810}x^3 + \frac{61}{1620}x^2 + \frac{59}{45}x - 7$$

Nota: Los puntos de corte siguen siendo los mismos, pero se han reducido los mínimos y máximos en una escala mas pequeña.

La gráfica de la función se realiza de la siguiente forma:

- Se deben tomar las raíces y analizar que pasa antes y después de cada una de ellas. En primer lugar, como el coeficiente de la variable de mayor potencia x^4 es positivo, la gráfica al realizar la analogía con la función cuadrática abre hacia arriba $(\cup)$, luego se interpretan cada uno de los intervalos mostrados en el siguiente recuadro usando la herramienta de diagrama de signos.

$(-\infty, -9)$	-9	$(-9, 7)$	7	$(7, 10)$	10	$(10, 18)$	18	$(18, +\infty)$
+	Corte (0)	-	Corte (0)	+	Corte (0)	-	Corte (0)	+

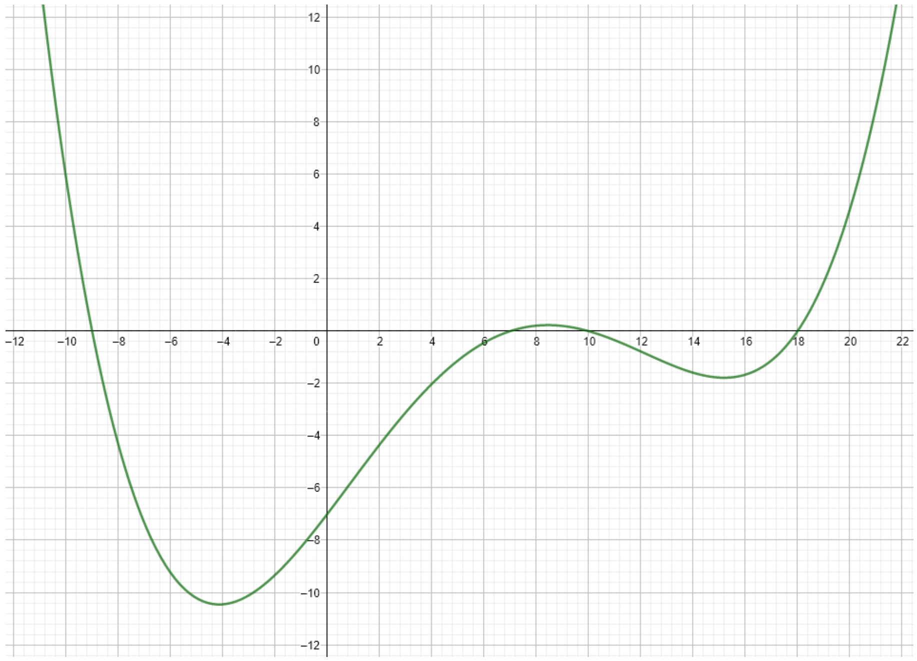


Figura 5.13: Gráfica de la Función

5.8 ¿Cómo modelar una función polinómica?

Ya se vio que las funciones polinómicas tienen varios puntos de corte con el eje x los cuales tienen la forma $x = x_n$ entonces el método de modelar una función polinómica dados los cortes es haciendo el proceso contrario a la división sintética y son los productos notables (Rincón, Carmona y Aldana, 2015).

Ejemplo: Modelar una función polinómica que corta al eje x en $x = -8$, $x = -6$, $x = -4$, $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$.

Solución: Con base en los ceros o raíces de la función polinómica que se tiene, los factores correspondientes son : $(x+8)(x+6)(x+4)(x-3)(x-5)(x-7)$, por lo tanto , la función que se busca es aquella cuyo producto es formada por los siguientes factores

$$
\begin{aligned}
&= (x+8)(x+6)(x+4)(x-3)(x-5)(x-7)\\
&= x^2+8x+6x+48\\
&= \left(x^2+14x+48\right)(x+4)\\
&= x^3+4x^2+14x^2+56x+48x+192\\
&= \left(x^3+18x^2+104x+192\right)(x-3)\\
&= x^4-3x^3+18x^3-54x^2+104x^2-312x+192x-576\\
&= \left(x^4+15x^3+50x^2-120x-576\right)(x-5)\\
&= x^5-5x^4+15x^4-75x^3+50x^3-250x^2-120x^2+600x-576x+2880\\
&= \left(x^5+10x^4-25x^3-370x^2+24x+2880\right)(x-7)\\
&= x^6-7x^5+10x^5-70x^4-25x^4+175x^3-370x^3+2590x^2+24x^2-168x+2880x-20160\\
&= x^6+3x^5-95x^4-195x^3+2614x^2+2712x-20160
\end{aligned}
$$

mediante éste método se obtiene la función polinómica

$$f(x) = x^6+3x^5-95x^4-195x^3+2614x^2+2712x-20160$$

La otra forma es usar el proceso contrario a la división sintética

1							8
	8						
1	8						6
	6	48					
1	14	48					4
	4	56	192				
1	18	104	192				−3
	−3	−54	−312	−576			
1	15	50	−120	−576			−5
	−5	−75	−250	600	2880		
1	10	−25	−370	24	2880		−7
	−7	−70	175	2590	−168	−20160	
1	3	−95	−195	2614	2712	−20160	

Este método nos libra de las variables y nos deja el trabajo solo numérico. El resultado nos indica

$$f\left(x\right)=x^{6}+3x^{5}-95x^{4}-195x^{3}+2614x^{2}+2712x-20160$$

5.8.1 Funciones polinómicas

Villa (1995) define que, las funciones polinómicas tienen un carácter muy general entre todas las algebraicas. Lineales y cuadráticas son los casos particulares más simples y, como es de esperarse, sus gráficas también son las más sencillas (rectas o parábolas). En contraste, la gráfica de una función polinómica general (de grado mayor que 2) puede resultar difícil de construir con buena precisión.

El autor, menciona que, afortunadamente, los resultados sobre gráficas lineales y cuadráticas, tienen algunos hechos en común, que se pueden extender a polinómicas de mayor grado. Realmente, para graficar con buena exactitud una función polinómica se requieren herramientas de cálculo diferencial. Por ejemplo, máximos y mínimos, puntos de inflexión y concavidad.

En este fragmento se realizaran dos cosas: Primero se llevara acabo el método para trazar la gráfica de funciones cúbicas, las cuales son fáciles de factorizar e identificar sus ceros. Después, se extenderá dicho método para dar un bosquejo de la gráfica de funciones polinómicas de grado arbitrario.

5.8.2 Funciones polinómicas generales

Entre las funciones algebraicas, las polinómicas son las más importantes. Lineales, cuadráticas y cúbicas, son casos especiales de funciones polinómicas. Esta es la definición general:

Definición

Una función polinómica es una expresión de la forma

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,$$

con $a_n, ..., a_1, a_0$,números arbitrarios, pero $a_n \neq 0$.

La condición $a_n \neq 0$ dice que el grado del polinomio (y de la función) es n. a_n se llama el coeficiente principal. El objetivo ahora es discutir algunos aspectos de carácter general, que ayudan a identificar la gráfica de una función polinómica.Si $n = 1$,la gráfica es una recta; si $n = 2$ es una parábola, y si $n = 3$ es una cúbica. Para $n > 3$ se usará la experiencia ganada con $n \leq 3$.

La idea básica es emplear el concepto de cero de una función.

Definición

Un cero de una función $y = f(x)$, es un valor de x para el cual $y = 0$.

En otros términos, los ceros de una función $y = f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$,las cuales corresponden a los puntos donde la gráfica corta el eje x. Si la función tiene la forma

$$y = c(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}...(x - a_k)^{m_k},$$

los ceros son, precisamente, $a_1, a_2, ..., a_k$. Además, el exponente m_i del factor $(x - a_i)^{m_i}$,se llama la multiplicidad del cero a_i, para $i = 1, 2, ..., k$. Por ejemplo, en la función

$$y = (x - 2)^3(x + 1)^5(x + 3)^2,$$

los ceros son $2, -1$y -3. La multiplicidad de 2 es 3, la de -1 es 5,y la de -3 es 2. Es muy importante conocer los ceros junto con su multiplicidad. La razón es que así obtenemos una doble información: La gráfica intercepta el eje x en cada cero; cruza el eje x en un cero si su multiplicidad es impar y no lo cruza (se devuelve) si es par.

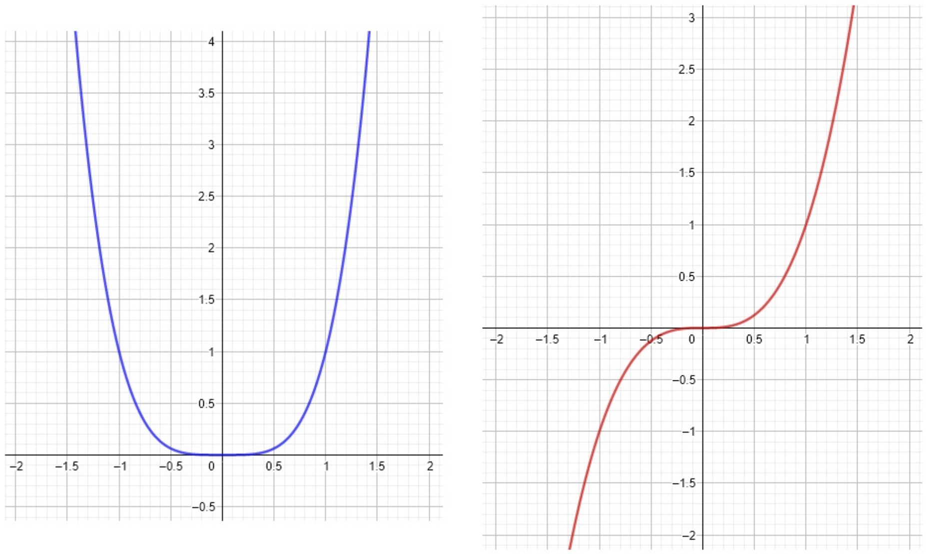


Figura 5.14: Gráfica de las funciones polinómicas, elaboración propia

Se realizó una preparación para afrontar el problema de graficar una función de grado arbitrario. Para empezar, se consideran las gráficas de $y = x^4$y de $y = x^5$.Usando una tabla de valores se podrá construir las gráficas mostradas en la figura 5.14.

La gráfica de $y = x^4$, mostrada en la figura (a), es una curva semejante a una parábola. No es exactamente una parábola, simplemente porque la función no es cuadrática. Se abre hacia arriba en ambos lados del eje y debido a que el exponente 4, que es par, anula el efecto negativo de los valores de x a la izquierda del origen. Por su parte, la gráfica de $y = x^5$,figura (b), es semejante a una cúbica. La curva está por encima del eje x para $x > 0$ y por debajo para $x < 0$. Esto se debe a que el exponente 5, siendo impar, no puede anular el efecto negativo de los valores de x.

En términos generales, la grafica de $y = x^n$es como una parábola si n es par, y como una cúbica si n es impar. De otra parte, si la función tiene más términos en x, la situación es un poco diferente, globalmente, para valores grandes de x, la curva se comporta como una parábola o como una cúbica. Pero, localmente, para valores pequeños de x, hay distorsiones. Ver el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Dar un bosquejo de la gráfica de cada función

a) $y = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^2$;

b) $y = \frac{1}{10}(x+3)^2(x-2)^2 \times x$

Solución

a) Lo primero que se debe observar es el grado del polinomio, el cual es 4. Ya que el grado es par, se concluye que la gráfica es como una parábola. En segundo lugar, se debe determinar si se abre hacia arriba o hacia abajo. Como el signo del coeficiente principal es $\frac{4}{5}$, que es positivo, la curva se abre hacia arriba.

De otro lado, la presencia de términos de grado menor indica que la curva puede cortar el eje X varias veces. Para identificar los puntos donde la curva corta, eventualmente, el eje X, se debe conocer los ceros de la función. Realmente, se necesita hallar los ceros con sus multiplicidades.

Después de factorizar completamente el lado derecho en a), se podrá expresar la función como

$$y = \frac{1}{5}x^2(x+2)(x-2)$$

Ahí se puede observar que la función tiene dos ceros de multiplicidad impar. Propiamente, $x = -2$ y $x = 2$. Consecuentemente, su gráfica cruza el eje X en esos puntos. Además, hay un cero de multiplicidad par en $x = 0$ y la curva intercepta, pero no cruza, el eje X en ese punto. Con esta información la gráfica se puede bosquejar como se muestra en la figura 5.15.

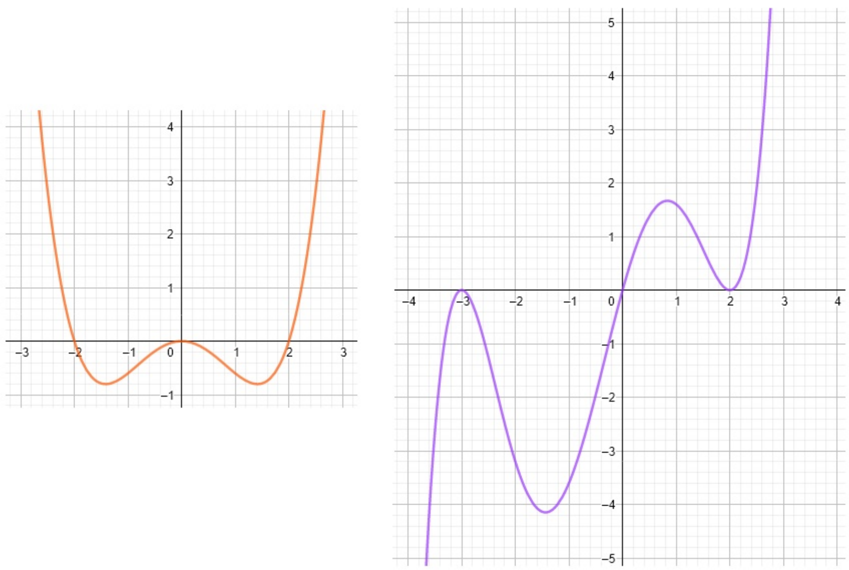


Figura 5.15: Gráfica de la función polinómica, elaboración propia

b) Nótese que el polinomio con el cual se define la función está factorizado. Para identificar el grado del polinomio basta sumar los exponentes de dichos factores, de donde se ve que se trata de una función de quinto grado.

Esto indica que la gráfica es como una cúbica.

Ahora se necesita saber si la curva es globalmente creciente o decreciente, lo cual depende del signo del coeficiente principal. Claramente , dicho coeficiente es positivo, de donde se sigue que la curva es globalmente creciente.

Para identificar las intersecciones con el eje X, se necesita los ceros de la función. Claramente, $y = 0$ cuando cualquiera de los factores que definen la función sea cero. Esto es, cuando $(x+3)^2 = 0$ cuando $(x-2)^2 = 0$, o cuando $x = 0$. Por lo tanto, los ceros son $x = -3$, $x = 2$ y $x = 0$. Ya que los dos primeros son de multiplicidad par, la curva no cruza el eje en los puntos respectivos, pero sí en el origen, que corresponde a un cero de multiplicidad impar. La gráfica se muestra en la figura (b).

Ahora bien, se sabe que hay muchas herramientas TIC que permiten la graficación de funciones y que no generan la posibilidad de entender lo que se debe realizar para calcular las raíces, dando la posibilidad de no comprender cómo calcular las raíces del polinomio. Por esta razón es necesario que la herramienta TIC contenga una sección en la cual el estudiante pueda hacer uso del método de división sintética, cálculo de los divisores del término independiente para posibilitar que se adquiera la habilidad de caracterizar una función polinómica, a esto también se le debe agregar otros elementos, por ejemplo como el corte con el eje y y el cálculo de los intervalos positivos y negativos aplicando la ley de los signos.

Es así como se listan los elementos fundantes para adquirir la habilidad de graficar funciones polinómicas y estos son:

- Cálculo de los divisores del término independiente en razón con el coeficiente de la variable de mayor grado.
- Aplicación de la división sintética para obtener las raíces del polinomio
- Cálculo del corte con el eje y
- Cálculo de los intervalos positivos y negativos de la función.

Por otra parte para modelar una función polinómica existen varios alternativas, una de ellas es usar la interpolación, entiendo este método como una técnica que requiere de una colección de datos para aproximar una función polinómica. En segundo lugar existe la alternativa de modelar la función polinómica a través de las raíces, es decir, a partir de las raíces se usa el método de productos notables para llegar a la función polinómica, en otras palabras, el método indicado para obtener una función polinómica a través de sus raíces es la multiplicación de términos algebraicos, no obstante se puede recurrir a una técnica más algorítmica que se denomina multiplicación sintética.

De estas alternativas, la secuencia didáctica se enfoca en el uso de la segunda alternativa, que es modelar la función polinómica a través de la multiplicación algebraica.

Es necesario aclarar que en la graficación y modelación de las funciones polinómicas no se tendrá en cuenta las técnicas usadas en la derivación, tales como el cálculo de máximos y mínimos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento, puesto que estas competencias se pueden estudiar en una nueva investigación.

El resto del análisis de la función polinómica se realiza en la sección del apriori de la metodología.

5.9 ¿Cuáles son los elementos necesarios para diseñar una secuencia didáctica en el campo de la informática educativa?

Ya se ha analizado el contexto de la aplicación de las situaciones didácticas (Latorre y col., 2013; Briceño y Alamillo, 2017; Castañeda, Rodas y Molina, 2012), las situaciones adidácticas, la incorporación de la resolución de problemas (Bahamonde y Vicuña, 2011), los elementos fundantes para la enseñanza de la graficación y modelación de funciones polinómicas (Villa, 1995) que se requieren para diseñar una secuencia didáctica, por lo cual solo queda por describir cuáles serán los momentos y las variables didácticas a estudiar.

En este sentido se propone elaborar una situación didáctica con las siguientes situaciones adidácticas:

1. Determinar el grado de un polinomio.
2. Graficación de funciones polinómicas: En esta situación se debe diseñar ejercicios que promuevan la ejercitación del cálculo de los divisores del término independiente en razón del coeficiente de la variable de grado mayor, la determinación de las raíces del polinomio usando división sintética y la determinación de los intervalos positivos y negativos.
3. Modelar la función polinómica dados unas raíces.

A partir de estas situaciones se componen algunas competencias.

1. Está en capacidad de obtener los divisores del término independiente en razón del coeficiente de la variable de grado mayor.
2. Determina las raíces del polinomio usando división sintética.
3. Calcula los intervalos positivos y negativos a través del análisis de las raíces de la función polinómica usando el método de la ley de los signos.
4. Calcula una función polinómica usando el método de multiplicación sintética.

Estas competencias a su vez definen las variables didácticas que serán medidas en la herramienta TIC a través de la persistencia de los datos de los usuarios, que permitirá el análisis de los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

Capítulo 6

Desarrollo de la investigación

Este capítulo corresponde al desarrollo de la investigación, en este, se describió cada una de las fases de la metodología seleccionada y se profundizo en el análisis de cada una de las dimensiones que hacen parte de cada fase, a continuación se describe la fase de análisis preliminar en ocho (8) secciones y en la sección ocho (8) se dan las conclusiones para la primera fase, que permiten abordar la fase dos (2) denominada análisis apriori.

6.1 Fase 1: Análisis Preliminar

El análisis preliminar dentro de la teoría de la ingeniería didáctica, ofrece un marco de referencia, una vista preliminar del estado del arte de la enseñanza de las matemáticas en cuanto a los elementos que fundamentan la enseñanza tradicional. En esta sección se describen siete (7) elementos importantes que hacen parte de la planeación de una clase como se concibe para este tiempo[1] incluso con la posibilidad de incorporar las herramientas TIC. Este sección se compone de los siguientes elementos: (1) Epistemología del concepto, (2) Análisis de libros de texto, (3) Análisis de software educativo y herramientas TIC, Análisis de clases tradicionales,

[1]Mayo de 2021

tomadas de la plataforma Youtube, (4) Análisis de la prueba diagnóstico y (5) Análisis de encuestas a docentes.

6.1.1 Epistemología del concepto

Según León (2022), hace unos 4.000 años, los babilonios conocían la manera de encontrar la solución positiva de ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Tenían una "receta" muy precisa para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - bx = c$, con $b > 0$, $c > 0$, aunque estos símbolos (b,c,x,$+$,$=$) no se usaban entonces.

Después de un siglo de expansión en la que la religión musulmana se difundió desde sus orígenes en la península Arábiga hasta dominar un territorio que se extendía desde la península Ibérica hasta los límites de la actual China, los árabes empezaron a incorporar a su propia ciencia los resultados de "ciencias extranjeras". Los traductores de instituciones como la Casa de la Sabiduría de Bagdad, mantenida por los califas gobernantes y por donaciones de particulares, escribieron versiones árabes de los trabajos de matemáticos griegos e indios (Pérez, 2017).

Hacia el año 900, el periodo de incorporación se había completado y los estudiosos musulmanes comenzaron a construir sobre los conocimientos adquiridos. Entre otros avances, los matemáticos árabes ampliaron el sistema indio de posiciones decimales en aritmética de números enteros, extendiéndolo a las fracciones decimales. En el siglo XII, el matemático persa Omar Jayyam generalizó los métodos indios de extracción de raíces cuadradas y cúbicas para calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior. El matemático árabe Al-Jwârizmî (de su nombre procede la palabra algoritmo, y el título de uno de sus libros es el origen de la palabra álgebra) desarrolló el álgebra de los polinomios; al-Karayi la completó para polinomios incluso con infinito número de términos (Molina, 2018).

Más adelante, matemáticos griegos, hindúes, árabes y europeos se dedicaron al estudio de estas ecuaciones y lograron avanzar a través del tiempo hasta encontrar la fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado, es decir, una ecuación de la forma, $ax^2+bx+c=0$ donde a,b yc pueden ser números cualesquiera. En tanto que la fórmula que permite encontrar las soluciones de cualquier ecuación de tercer grado (o ecuación cúbica) no se encontró sino hasta el sigloXVI en Italia. Una ecuación cúbica es de la forma $ax^3+bx^2+cx+d=0$ donde a, b,c y d son números cualesquiera, y por supuesto que $a \neq 0$ (Gonzales, 2010).

Menciona Segovia (2009), que, lo que tienen todas estas ecuaciones en especial, y que las hace ser de tercer grado, o cúbicas, es que la incógnita aparece elevada al exponente tres (3), y ese es el mayor exponente de la incógnita.

Por muchos siglos, antes del siglo XVI, los matemáticos intentaron encontrar la fórmula que sirviera para determinar las soluciones de cualquier ecuación cúbica, sin lograrlo. Según Pérez (2017), la gran proeza matemática de descubrir la fórmula, fue realizada por el matemático italiano Scipione del Ferro, en primer lugar, y más adelante por Nicoló Tartaglia quien la obtuvo por su cuenta, sin conocer el trabajo de Scipione del Ferro.

Sin embargo, la fórmula es conocida con el nombre de "fórmula de Cardano", porque otro matemático llamado Girolamo Cardano, quien estudió cuidadosamente las soluciones de Tartaglia y del Ferro, luego fue quien publicó la fórmula por primera vez en un gran tratado sobre resolución de ecuaciones titulado "Ars Magna" (Gonzales, 2010).

El episodio completo fue más bien trágico para sus protagonistas. Según Pérez (2011), en aquellos tiempos, cuando un matemático descubría algo importante, trataba de guardarlo en secreto, para poder enfrentarse en "duelos matemáticos" con otros, y vencer. Estos duelos que se presentaban a manera de torneo o debate público, en el cual dos matemáticos se retaban mutuamente a resolver problemas planteados por ellos, se proponían los problemas y se efectuaba el duelo unos quince (15) días después. Asistía el público y también las autoridades locales, y el perdedor en un duelo de estos podía llegar a perder hasta su empleo en una importante Universidad, como consecuencia del desprestigio.

Pérez (2011), menciona que: “el caso fue que Scipione del Ferro guardó su secreto hasta poco antes de su muerte, cuando decidió revelarlo a dos discípulos suyos: Annibale Della Nave y Antonio María Fiore”.

Este último decidió retar a Tartaglia, quien era profesor de Matemáticas en Venecia, para un duelo. Le propuso 30 problemas, los cuales requerían de la solución de ecuaciones cúbicas. Tartaglia propuso a Fiore otros problemas variados y se dedicó por 15 días a trabajar sobre la ecuación de tercer grado hasta lograr encontrar su solución. En el duelo, Tartaglia sorprendió a todos, pero sobre todo a Fiore, con sus soluciones a todos los problemas planteados. Fiore, por su parte, no pudo resolver casi nada de lo propuesto por Tartaglia, y fue declarado perdedor. A su vez, Tartaglia guardó celosamente el secreto de su descubrimiento, a pesar de que Girolamo Cardano, interesado en conocerlo, trató, durante 4 años, de acercarse a él para que compartiera su conocimiento de la solución a la ecuación cúbica (Segovia, 2009).

Agrega Segovia (2009), que, finalmente, logró Cardano su objetivo, jurando a Tartaglia solemnemente que jamás lo divulgaría. Pero tres (3) años más tarde, en 1542, Cardano logra obtener permiso para estudiar los escritos del difunto Ferro, y luego decide, en 1545, publicar la obra "Ars Magna", que contenía, entre otros importantes descubrimientos matemáticos, la solución de la ecuación cúbica. Aunque, en su publicación, Cardano reconoce el mérito de Ferro y Tartaglia en ese descubrimiento, Tartaglia nunca lo perdonó por faltar a su juramento.

Tras un año de polémicas, Tartaglia acepta el reto de un alumno de Cardano para un "duelo matemático", en el cual resulta perdedor. Perdió su trabajo de profesor en la Universidad de Brescia y murió nueve (9) años después, humilde, en Venecia. El desarrollo del Álgebra a través de la historia ha sido impulsado principalmente por el interés en resolver ecuaciones. Ecuaciones lineales o de grado uno (1) (del tipo $ax + b = 0$), ecuaciones cuadráticas o de grado dos (2) (del tipo $ax^2 + bx + c = 0$), ecuaciones cúbicas o de grado 3 (del tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) y ecuaciones de cualquier grado, en general (Segovia, 2009).

(De Lucas, 1996), describe que este hallazgo llevó a los matemáticos a interesarse por los números complejos y estimuló la búsqueda de soluciones similares para ecuaciones de quinto grado y superior. Fue esta búsqueda la que a su vez generó los primeros trabajos sobre la teoría de grupos hacia fines del siglo$XVIII$ y la teoría de ecuaciones del matemático francés Évariste Galois a principios del siglo XIX.

También durante el sigloXVI se empezaron a utilizar los modernos signos matemáticos y algebraicos. El matemático francés François Viète llevó a cabo importantes estudios sobre la resolución de ecuaciones. Sus escritos ejercieron gran influencia en muchos matemáticos del siglo posterior, incluyendo a Pierre de Fermat en Francia e Isaac Newton en Inglaterra (De Lucas, 1996).

6.1.2 Conclusiones finales acerca de la epistemología del concepto

Una de los mayores aportes en la historia de las matemáticas se da por parte de los árabes, quienes proponen la solución a raíces, cuadráticas, cúbicas, cuartas y quintas, además Al-Jwârizmî propone el método para calcular las raíces incluso con infinito número de términos. Mas adelante matemáticos europeos encontraron la formula para resolver ecuaciones cuadráticas y en el siglo XIV la fórmula para ecuaciones cúbicas. Sin embargo, la investigación se centra en los tipos de ejercicios en los cuales aparecen soluciones enteras, por ejemplo, la ecuación polinómica

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

se resuelve usando el método de la división sintética y el teorema del residuo (Rincón, Carmona y Aldana, 2015).

Así los divisores del término independiente son $\pm1; \pm2; \pm3; \pm5$ y ±6 de los cuales, aplicando el teorema del residuo se tiene

$$\begin{aligned}(3)^3 - 19\,(3) + 30 &= 0\\(-5)^3 - 19\,(-5) + 30 &= 0\\(2)^3 - 19\,(2) + 30 &= 0\end{aligned}$$

de tal forma que las soluciones enteras para la ecuación cúbica son: $x = -5; 2$ y 3

6.1.3 Análisis de libros de texto

Otro de los factores importantes dentro de la planeación de una clase de matemáticas, es el uso de libros guía, que permitan llevar un orden determinado en los temas. A continuación se describen seis (6) libros de texto referentes al tema de graficación y modelación de funciones polinómicas. La descripción consiste en la caracterización de los datos básicos como título, autores, editorial y ciudad y, datos de contenido referentes al tema estudiado, además la selección de los libros no se realizó por la rama de la ingeniería, si no más bien por los temas presentados de funciones polinómicas.

Figura 6.1: Caratula del libro: Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

Referencia	❍ **Título:** Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. ❍ **Autor:** Francisco Javier Pérez Gonzales ❍ **Fecha:** 2008 ❍ **Editorial:** Creative Commons.

Contenidos que preceden al tema de función polinómica	❍ Axiomas de los números reales. ❍ Desigualdades y valor absoluto. ❍ Principio de inducción matemática. ❍ Funciones reales. ❍ Estudio descriptivo de las funciones elementales.
Contenidos posteriores a el tema de función polinómica	❍ Raíces de un número real. ❍ Potencias de un número real. ❍ Potencias racionales. ❍ Logaritmos. ❍ Exponenciales. ❍ Función potencia de exponente real α. ❍ Funciones trigonométricas. ❍ Las funciones hiperbólicas. ❍ Concepto de función. ❍ Números complejos. Exponencial compleja. ❍ Funciones continúas y limite funcional. ❍ Números y límites. El infinito matemático. ❍ Derivadas. ❍ Sucesiones. ❍ Integral de Riemann. ❍ Series numéricas. ❍ Sucesiones y series de funciones.

¿Cómo se enseña la función polinómica?	Para el tema de funciones polinómicas, inicia con una introducción donde se explica la forma de una función polinómica, seguido se explica que forma tiene una función racional. (pag 39).

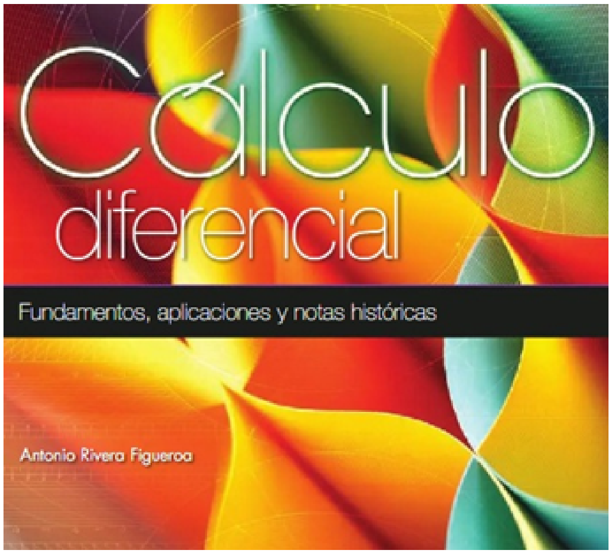


Figura 6.2: Caratula del libro: Cálculo diferencial (Fundamentos, aplicaciones y notas históricas).

Referencia	❍ **Título:** Cálculo diferencial (fundamentos, aplicaciones y notas históricas). ❍ **Autor:** Antonio Rivera Figueroa ❍ **Fecha:** 2014 ❍ **Editorial:** Grupo editorial Patria

Contenidos que preceden al tema de función polinómica	❍ Los números reales. ❍ Funciones. ❍ Funciones elementales.
Contenidos posteriores a el tema de función polinómica	❍ Sucesiones y series de reales. ❍ Límite y continuidad. ❍ Razón de cambio y derivada. ❍ La derivada aplicada al estudio de las funciones. ❍ Aplicaciones de la derivada.
¿Cómo se enseña la función polinómica?	Se inicia dando a conocer como están definidas las funciones polinomiales, del mismo modo explica que estas familias de funciones incluyen las familias constantes y las funciones lineales. Se hacen varios ejemplos de estos conceptos de constante y lineal. Procede en hablar sobre el grado de la función en este caso empieza hablando de una función de primer grado con su respectivo ejemplo y gráfica, continua con una función cuadrática con su respectivo ejemplo y gráfica. A partir de las funciones cuadráticas se empieza hablar de un nuevo concepto que es vértice. Por último se explica gráficamente el comportamiento variado que tienen las funciones polinómiales cúbicas y cuadráticas. (pag 110).

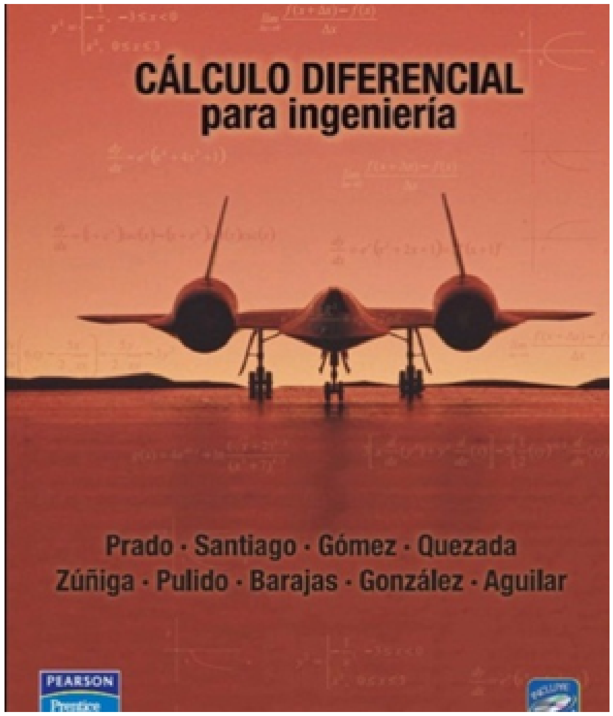


Figura 6.3: Caratula del libro: Cálculo diferencial para ingeniería.

Referencia	❍ **Título:** Cálculo diferencial para ingeniería. ❍ **Autor:** Prado, Santiago, Gómez, Quezada, Zuñiga, Pulido, Barajas, Gonzales y Aguilar. ❍ **Fecha:** 2006 ❍ **Editorial:** Pearson educación, México.
Contenidos que preceden al tema de función polinómica	❍ Conceptos básicos de funciones

Contenidos posteriores a el tema de función polinómica	❍ Funciones trascendentes. ❍ Límites y continuidad. ❍ La derivada como razón de cambio. ❍ Cálculo de derivadas. ❍ Aplicaciones de la derivada. ❍ Pilares del cálculo diferencial. ❍ Monotonía y teoría de extremos. ❍ Graficación.
¿Cómo se enseña la función polinómica?	Este libro empieza dando una introducción de lo que es funciones polinómicas, donde en esta da a conocer de qué forma está escrita y hace énfasis en la función lineal y la función cuadrática. En la función lineal se explica cómo obtener la pendiente de la recta que une los puntos y la ordena al origen da a la función. En la función cuadrática se desarrolla el cómo hallar la altura en donde se encuentra el vértice. En esta temática, los autores hacen uso de cuatro ejemplos de ejercicios de modelación y aplicaciones. (Pag 39).

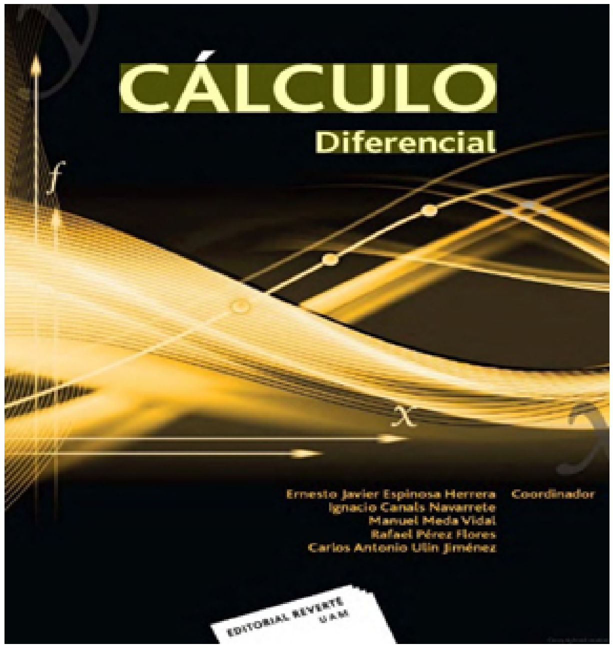


Figura 6.4: Caratula del libro: Cálculo diferencial e integral I.

Referencia	❍ **Título:** Cálculo diferencial e integral I ❍ **Autor:** Ernesto Javier Espinosa Herrera, Ignacio Canals Navarrete, Manuel Medina Vidal, Rafael Pérez Flores, Carlos Antonio Ulín Jiménez. ❍ **Fecha:** 2009 ❍ **Editorial:** Reverte UAM
Contenidos que preceden al tema de función polinómica	❍ Los números reales. ❍ Funciones.

Contenidos posteriores a el tema de función polinómica	❍ Límite de una función. ❍ Continuidad. ❍ La derivada. ❍ Reglas de derivación. ❍ Aplicaciones de la derivada. ❍ Grafica de una función. ❍ Optimización.
¿Cómo se enseña la función polinómica?	Se da una introducción sobre lo que es y cómo se componen las funciones polinómicas. A partir de esto se inicia con la función lineal, explicitando su condición de linealidad. Los autores, proceden ilustrando tres ejemplos donde se determina cómo graficar este tipo de función. (Pag 98).

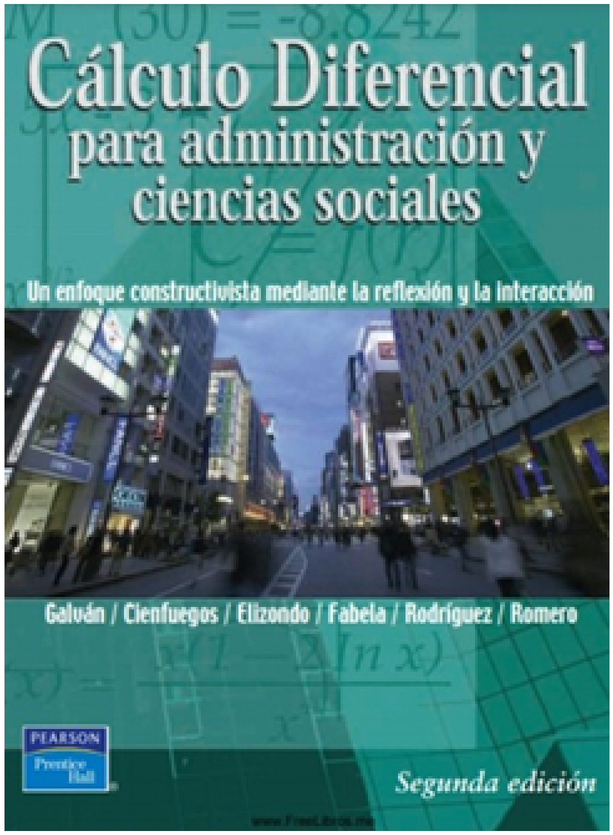


Figura 6.5: Caratula del libro: Cálculo diferencial para administración y ciencias sociales.

Referencia	❍ **Título:** Cálculo diferencial para administración y ciencias sociales. ❍ **Autor:** Delia Aurora Galván Sánchez, Dora Elia Cienfuegos Zurita, Isabel Cristina Elizondo Ordoñez, María de la Luz Fabela Rodríguez, Ana María Rodríguez López, José de Jesús Romero Álvarez. ❍ **Fecha:** 2006. ❍ **Editorial:** Pearson educación.
Contenidos posteriores a el tema de función polinómica	❍ Función. ❍ Función lineal. ❍ Función exponencial. ❍ Función exponencial con base e. ❍ Función inversa. ❍ Función logarítmica. ❍ Operaciones con funciones. ❍ Efectos en la gráfica de una función al sumar, restar o multiplicar una constante.
Contenidos posterioores a el tema de función polinómica	❍ La derivada. ❍ Optimización de funciones.

¿Cómo se enseña la función polinómica?	El tema de funciones polinomicas, inicia explicando cómo surgen conceptualmente e ilustrando la forma de una función polinómica. A partir de esto, se enumeran las reglas que se aplican para desarrollar el tema. Luego, los autores, configuran los elementos para la graficación de una función polinómica donde ilustran varios ejemplos, dando a conocer cuando el coeficiente es positivo , el número de vueltas, y cuando el coeficiente es negativo, pasando a explicitar el cómo hallar las raices de la función y por último disponen al lector de una serie de ejercicios con preguntas variadas. (Pag 94).

6.1.3.1 Conclusiones del contenido en libros de texto

A través de la descripción de los libros de texto, se puede decir que, la mayoría de los libros inician con el concepto de número real, luego se introducen algunas operaciones básicas con números reales y posteriormente se hace la introducción a las funciones, por lo general pasando en primer lugar por la función lineal, luego la función cuadrática, en ambos casos mostrando como graficar y como modelar estas funciones a través de sus puntos característicos. Posteriormente y dando por hecho que el estudiante ya tiene como conceptos previos la factorización, productos notables y división sintética se procede a enseñar el concepto de función polinómica. Solo en uno de los libros se realiza una caracterización de varios tipos de funciones, antes de llegar al concepto de función polinómica. Esto da ha entender que en la mayoría en los textos guía de cálculo diferencial, se expone el concepto de función polinómica, iniciando en su orden, función lineal, función cuadrática y función polinómica.

6.1.4 Análisis de software

En la actualidad la tendencia de la educación se ha orientado al usar herramientas TIC para generar algún tipo de conocimiento Nava 2017. A continuación se describe una serie de software encontrados en línea, para sistemas operativos de escritorio al rededor de la graficación de funciones.

6.1.4.1 GeoGebra[2]

GeoGebra es una suite de aplicaciones de matemática es una de las más **completas** y con más opciones que se pueden encontrar en internet.

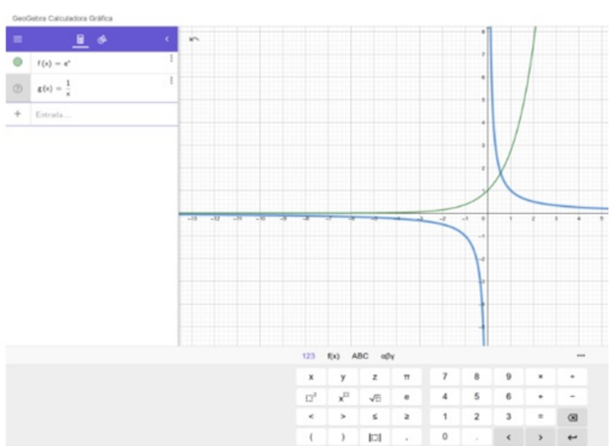


Figura 6.6: **Recorte de pantalla del software:** GeoGebra.

Además de las funciones básicas para graficar, se puede encontrar una interfaz visual para insertar expresiones y herramientas de todo tipo. A diferencia de otros graficadores, con **GeoGebra** se puede graficar directamente sobre el plano. Es decir, se pueden dibujar rectas, segmentos, circunferencias y arcos. Además, se incluyen herramientas para medir y para hacer

[2] Descargar o ver en: `https://www.geogebra.org/graphing`

intersecciones.

Son demasiadas las opciones que dispone GeoGebra. Para muchos, este graficador puede ser demasiado. Pero para otros, puede ser una potente herramienta para estudiar matemática, análisis matemático o incluso álgebra.

6.1.4.2 Graph Sketch[3]

Este graficador tiene una opción que lo hace especial. Exporta de forma simple y sencilla los gráficos a imágenes, en un tamaño suficientemente grande como para poder insertarse en trabajos prácticos e informes.

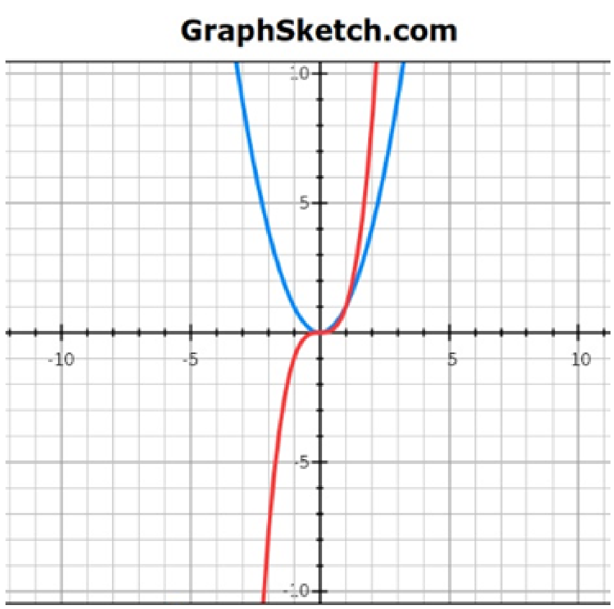


Figura 6.7: **Recorte de pantalla del software:** Graph Sketch.

El plano cartesiano se encuentra en la parte superior de la página. Debajo, el formulario para cargar las funciones.

[3]Descargar o ver en: `https://graphsketch.com/`

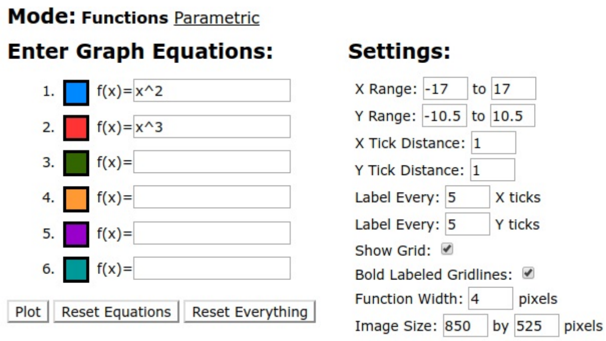


Figura 6.8: **Recorte de pantalla del software:** Graph Sketch.

6.1.4.3 Rechner online[4]

Un graficador de funciones con muchísimas opciones. El mayor defecto que tiene quizás es que no se puede navegar por el plano cartesiano. Hay que ir modificando el rango en las opciones que presenta. Los gráficos pueden ser guardados para luego recuperarse. Otra desventaja es que solo pueden graficarse tres funciones como máximo.

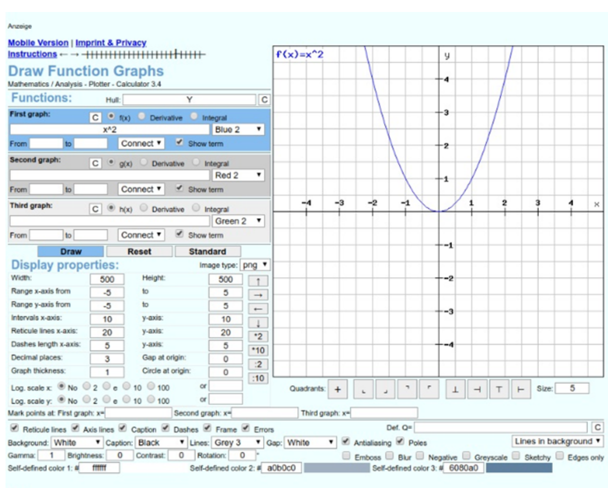


Figura 6.9: Recorte de pantalla del software:Rechner online.

[4]Descargar o ver en: `https://rechneronline.de/function-graphs/`

6.1.4.4 Wolfram Alpha [5]

Wolfram Alpha no es exactamente un graficador de funciones. Es más bien una especie de base de datos de expresiones matemáticas. Consiste en una simple caja de texto donde se puede realizar consultas, pero en lenguaje matemático. Entre los resultados de búsqueda, Wolfram Alpha muestra mucha información vinculada a lo que se haya insertado. Entre ellas, si aplica, un gráfico. Es decir, si insertamos una ecuación que se pueda representar en el plano cartesiano, veremos su curva.

Figura 6.10: **Recorte de pantalla del software:** Wolfram Alpha .

6.1.4.5 Conclusión preliminar del análisis de software

Como bien se dijo en la justificación del trabajo de investigación, hay una diferencia entre las herramientas TIC para enseñar que las herramientas TIC para aprender. En el listado de aplicaciones anteriormente mencionados, se puede observar que ninguna de ellas contiene una intención pedagógica clara, es decir que, simplemente son aplicaciones que un estudiante, docente o investigador puede usar para graficar una serie de funciones y observar conclusiones importantes de sus gráficas, sin embargo el

[5] Descargar o ver en: `https://www.wolframalpha.com/`

estudiante o usuario de tales aplicaciones debe tener un conocimiento matemático claro para observar tales elementos sobre las gráficas de las funciones.

En este sentido, es necesario decir que, una herramienta TIC requiere fundamentalmente de una intención didáctica para que el estudiante pueda llegar al conocimiento deseado (Arroyo, 2006). Se puede decir que las aplicaciones anteriormente vistas no contienen por si mismas tal intención y que alguna de ellas puede ser usada por el docente/investigador para ejecutar sus propias diseños didácticos e imprimir las acciones sobre el estudiante.

No obstante, se genera la siguiente pregunta, ¿Es posible diseñar una herramienta TIC que contenga la intención didáctica implícita dentro de ella misma, de tal forma que el estudiante pueda aprender nuevos conocimientos a través de su manipulación?.

Es así como se propone el uso de la herramienta Funciones Polinómicas encontrada en la plataforma `http://jarincon.com/jarinconapp/2021` que permite al estudiante resolver una serie de ejercicios en los cuales se observa la construcción del conocimiento a través de la intervención de un ejercicio que contiene dos naturalezas, en primer lugar se encuentra el ejercicio directo, en el cual el estudiante debe calcular las raíces de la función polinómica para generar el gráfico y en el segundo caso, dadas las raíces de la función polinómica debe modelar la función algebraica que cumpla tales condiciones, es decir que, está llevando el concepto de forma directa e inversa paralelamente.

Se observa entonces, que existe una herramienta diseñada y desarrollada según el autor bajo los parámetros de una situación adidáctica, lo cual quiere decir que la aplicación esta construida en los términos de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, en la cual se deja uno de los momentos para que el estudiante interactué con el medio, resolviendo una serie de ejercicios que le llevan a la construcción de nuevos conocimientos a través de la ejercitación y búsqueda constante de patrones y relaciones del concepto como tal.

Rincón (2021), describe en su aplicación web, que su idea nace de varios años de experiencia docente. Rincón (2021) es Licenciado en Matemáticas y Magister en Ciencias de la Educación de la Universidad del Quindío.

Rincón (2021) describe que la aplicación inicio como un proyecto de escritorio a través de varios software para el sistema operativo windows, de los cuales menciona los siguientes: (1) representación de vectores, (2) álgebra lineal, (3) sólidos de revolución, (4) geometría analítica, (5) la casa de cambio, (6) laboratorio de estadística, etc. Rincón (2021) menciona que estos software educativos tenían la limitación de solo poderse usar en el sistema operativo windows.

De tal forma que Rincón (2021) argumenta que para poder impactar a mayor nivel a la comunidad educativa en matemáticas y aportar sus conocimientos en la educación matemática, decidió plantear la primera versión de la aplicación en línea, denominándola Jarincon App, la cual cuenta con algunas funciones y aplicaciones para el desarrollo de actividades y ejercicios de las matemáticas, y que, no solamente funcionan en los sistemas operativos Windows, si no en todos aquellos dispositivos y ambientes donde se pueda ejecutar o abrir un navegador.

A continuación se hace una descripción a forma de guía para ingresar a la aplicación, particularmente a la aplicación de funciones polinómicas.

6.1.4.6 Descripción de la aplicación Funciones Polinómicas

A continuación se realizará la descripción del registro e ingreso a la plataforma, así como la explicitación de los elementos que la componen y el desarrollo de algunos ejercicios propuestas en la misma plataforma para el tema de funciones polinómicas.

Para ingresar a la plataforma educativa se debe copiar el siguiente enlace en un navegador web: `http://jarincon.com/jarinconapp/2021` la cual mostrará la siguiente pantalla:

Figura 6.11: Pantalla inicial de la plataforma Jarincon.com

Para registrarse se debe hacer clic en el botón de [Registrarme] el cual mostrará la siguiente pantalla.

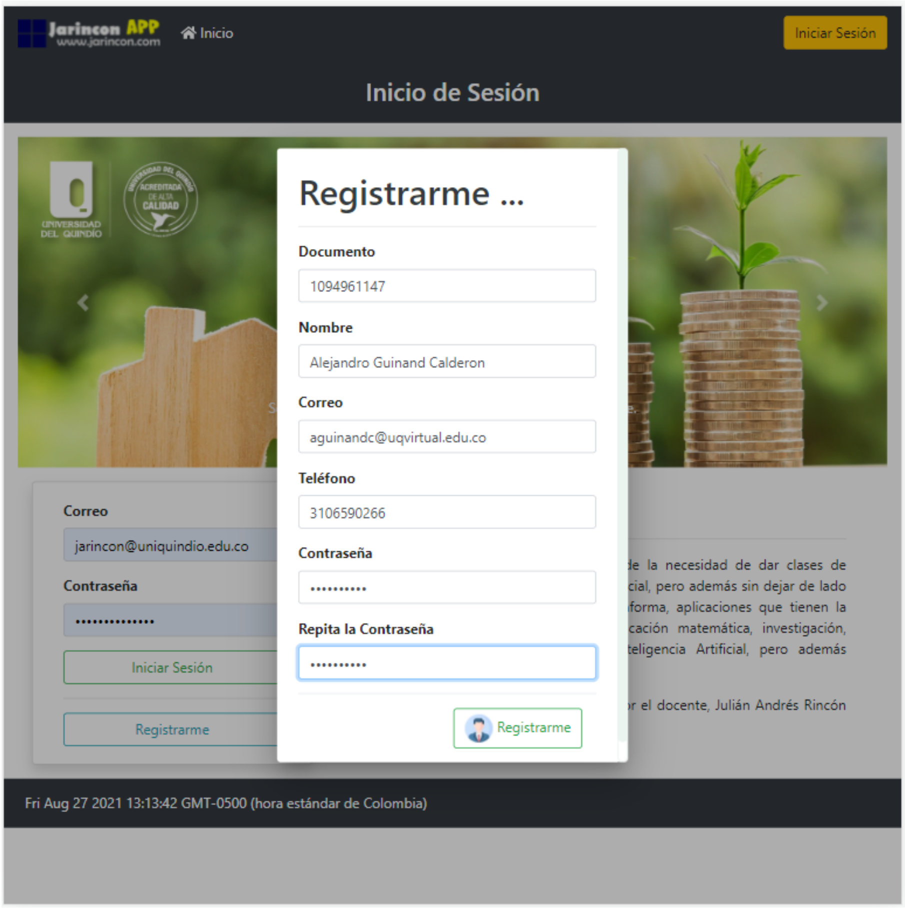


Figura 6.12: Registro de nuevo usuario

Se llenan los datos y se hace clic sobre el botón [Registrarme] que mostrará la siguiente pantalla.

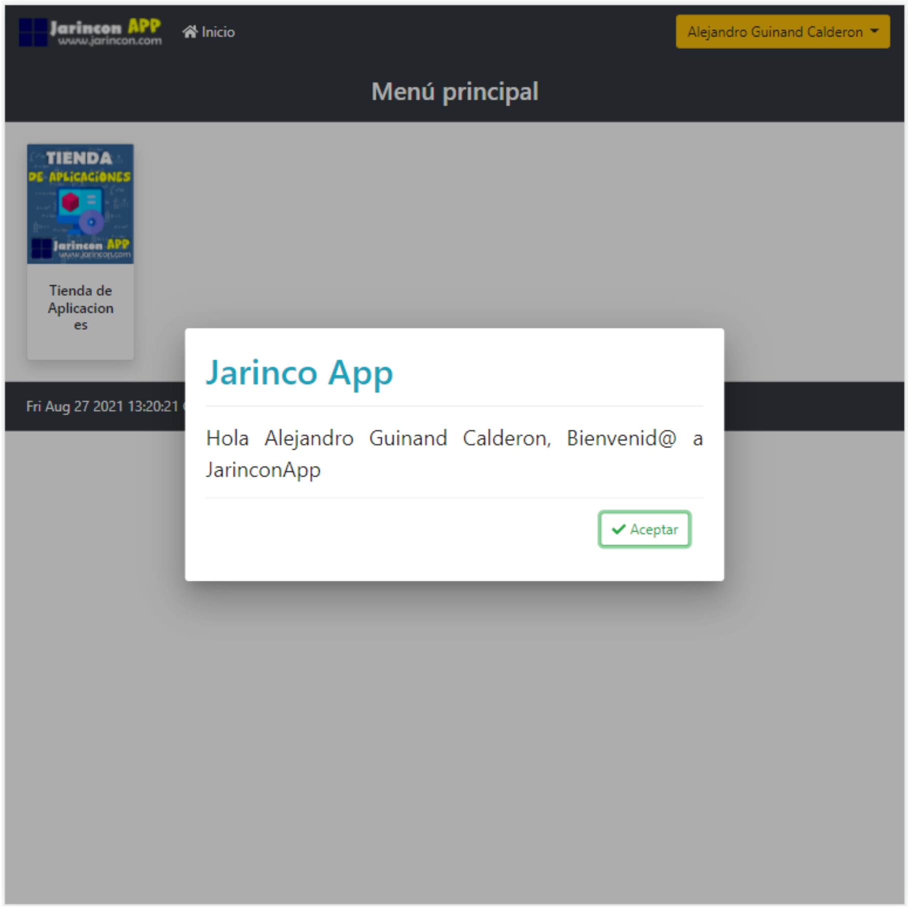


Figura 6.13: Inicio de sesión del Usuario

Posteriormente se debe hacer clic sobre la tarjeta de tienda de aplicaciones y se busca la aplicación de [Funciones Polinómicas] y se hace clic sobre la tarjeta mostrando la siguiente pantalla:

Figura 6.14: Instalación de la aplicación en la cuenta del usuario

Se hace clic sobre el botón de Instalar y se devuelve hasta el menú inicial donde se verá la tienda de aplicaciones junto con la aplicación de **Funciones Polinómicas**.

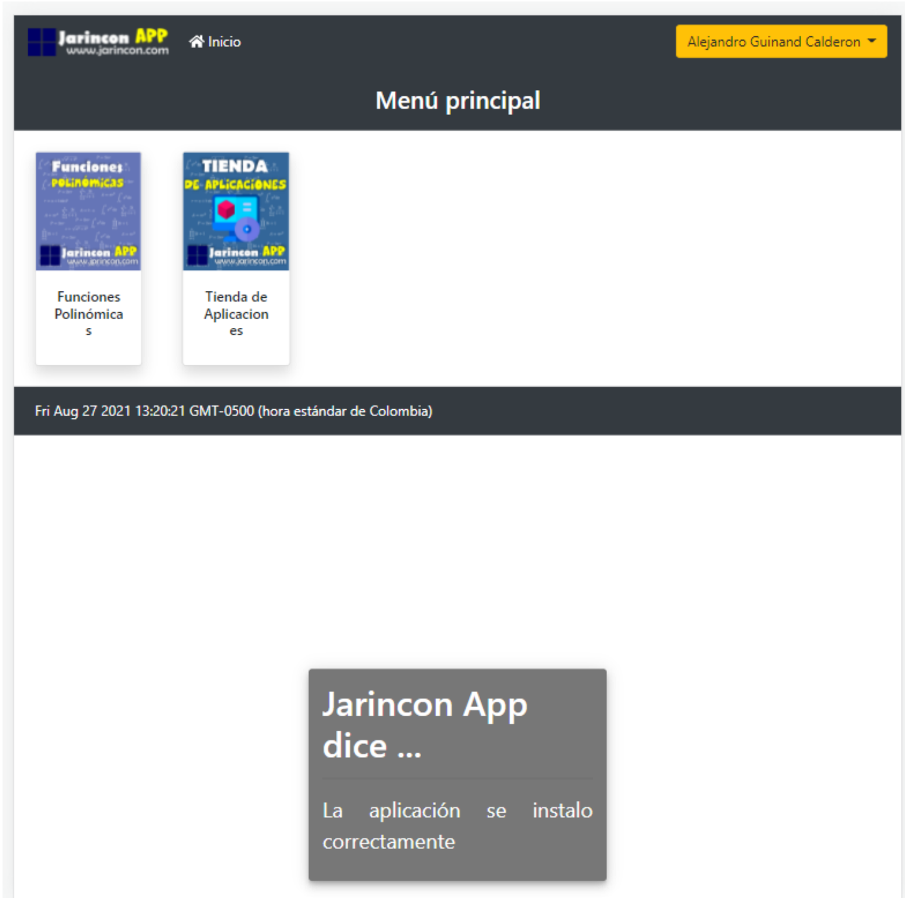


Figura 6.15: Menú inicio con la aplicación instalada

Para ingresar a la aplicación se hace clic sobre la tarjeta de funciones polinómicas, que mostrará la siguiente pantalla:

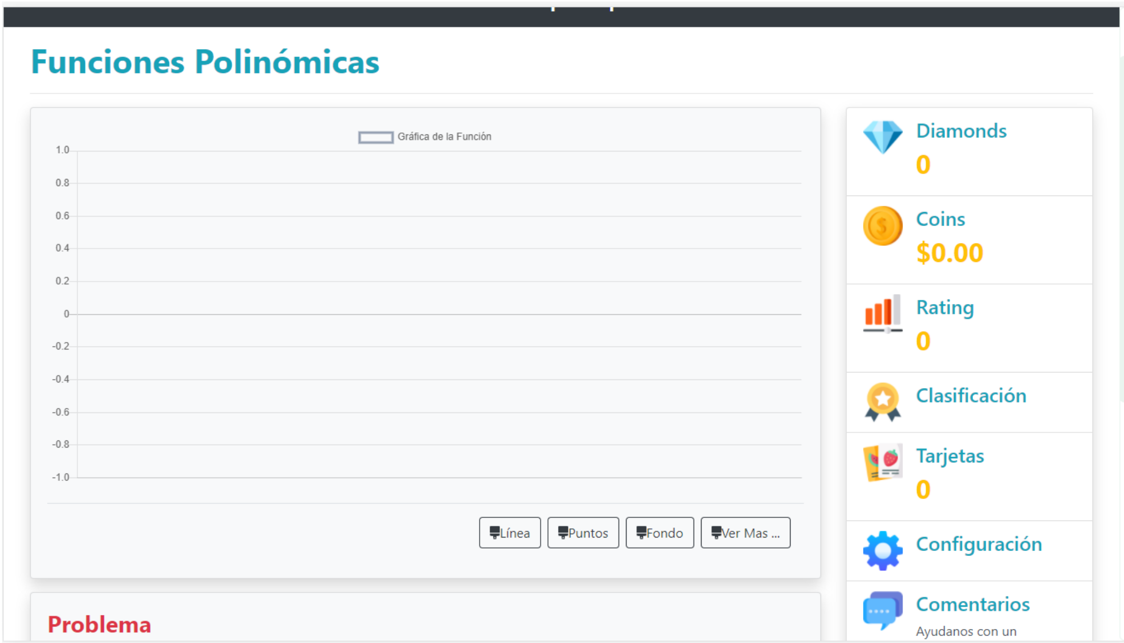
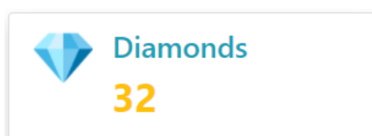


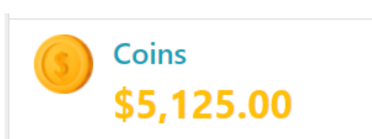
Figura 6.16: Aplicación de funciones polinómicas

Esta pantalla contiene una sección donde se muestra la gráfica de la función polinómica y un menú lateral derecho en el cual estan las siguientes opciones:

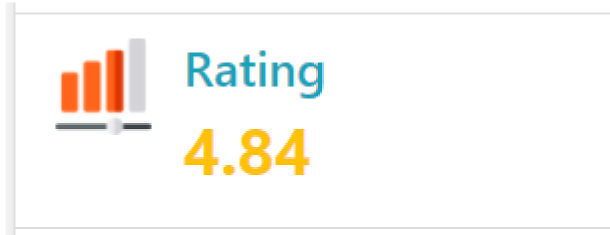
- **Diamonds:** Cantidad de diamantes que se gana un estudiante por resolver un ejercicio.



- **Coins:** Cantidad de monedas que se gana un estudiante por resolver un determinado ejercicio.



- **Rating:** La nota del estudiante con respecto a los ejercicios respondidos de forma correcta.



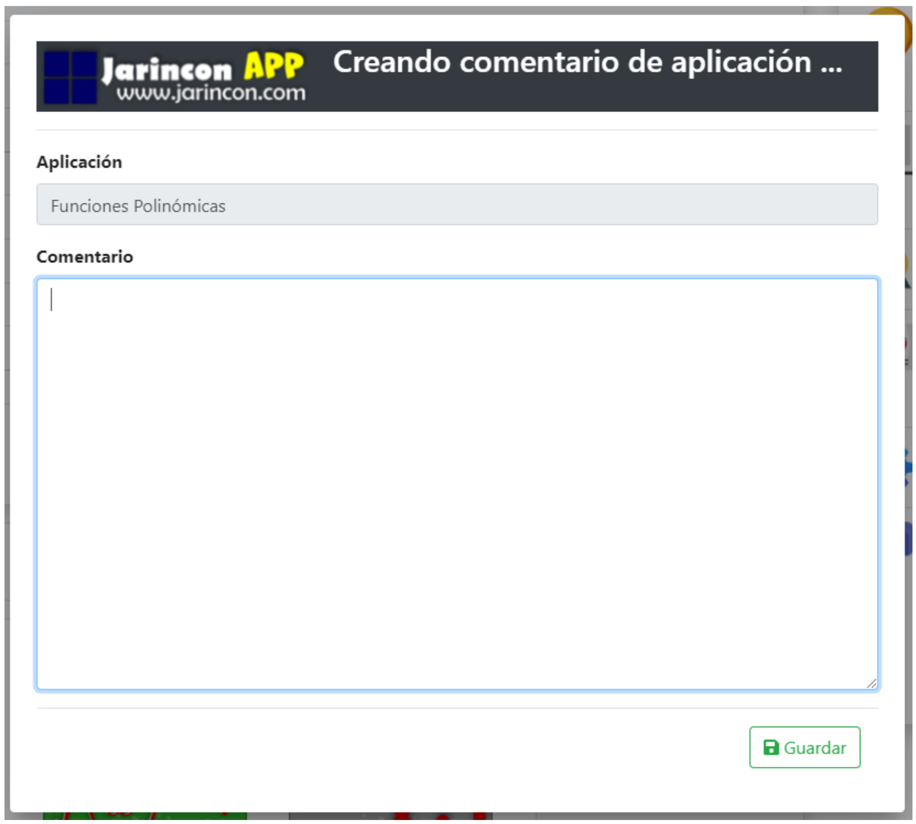
❍ **Clasificacion:** Muestra una lista

Clasificación del Juego

Puesto	Nombre	Diamonds	Coins	Cards	Rating
		Ordenar	Ordenar	Ordenar	Ordenar
	Estudiante 1	105	$10,185.00	2	4.3
	Estudiante 2	102	$9,627.00	14	4.86
	Estudiante 3	50	$6,340.00	6	4.9
4	Estudiante 4	44	$4,442.00	9	4.29

❍ **Tarjetas**: Muestra un album de tarjetas que los usuarios pueden comprar con la cantidad de diamantes ganadados.

- **Comentarios**: Es una sección donde el usuario puede dejar los respectivos comentarios de retroalimentación para mejorar la plataforma educativa.



6.1.4.6.1. Generando problemas de funciones polinómicas Para generar un problema encontramos la siguientes sección en la pantalla:

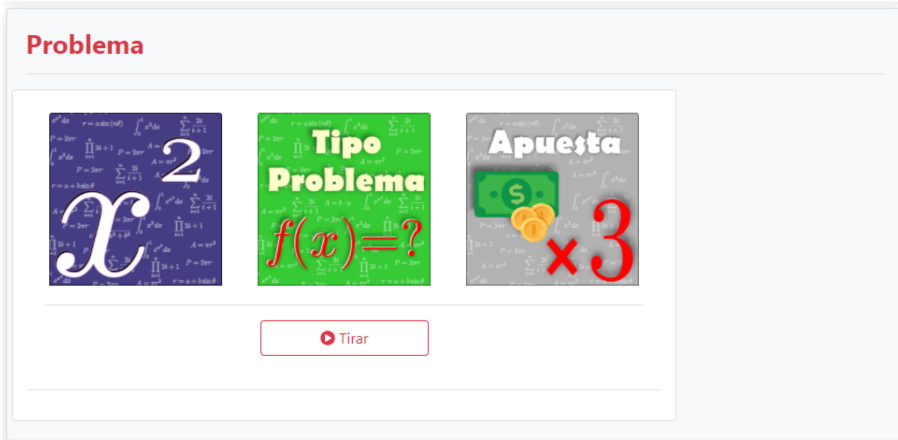


Figura 6.17: Sección para generar problemas

Se debe hacer clic sobre el botón [Tirar] el cual contiene tres casillas en las cuales se observan los siguientes datos:

- **Primero**: Contiene el grado de la función polinómica.
- **Segundo**: Determina si el ejercicio es un ejercicio de modelación o de caracterización de funciones polinómicas.
- **Tercero**: La apuesta realizada sobre el ejercicio

Por ejemplo, al generar un problema se puede ver en la sección de generador lo siguiente:

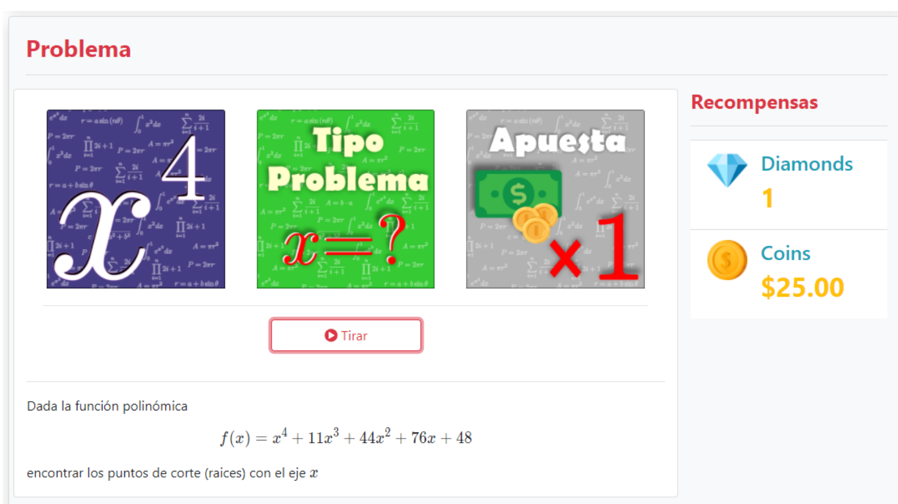


Figura 6.18: Descripción de problema

Dada la función polinómica

$$f(x) = x^4 + 11x^3 + 44x^2 + 76x + 48$$

encontrar los puntos de corte (raices) con el eje x.

6.1.4.6.2. Resolución del Problema (Cálculo de la Raices) Para resolver el problema se debe agregar tantas raices como se necesario, presionando el botón de [+Raíz] tal como se muestra en la siguiente pantalla:

Figura 6.19: Creando las raices del polinómio

posteriormente cuando el usuario calcula la raices las ingresa en las cajas de texto de la solución, como se muestra en la siguiente imagen:

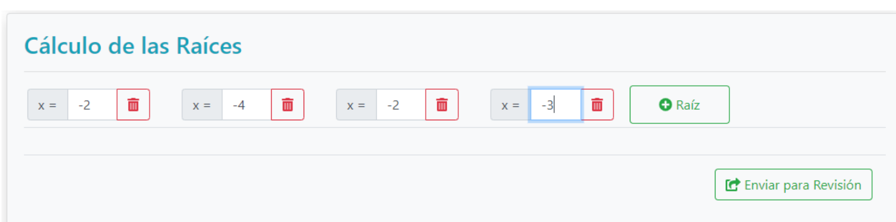


Figura 6.20: Solución al problema

Al presionar el botón de [Enviar para Revisión] se mostrará una retroalimentación, que se puede apreciar en la siguiente imagen:

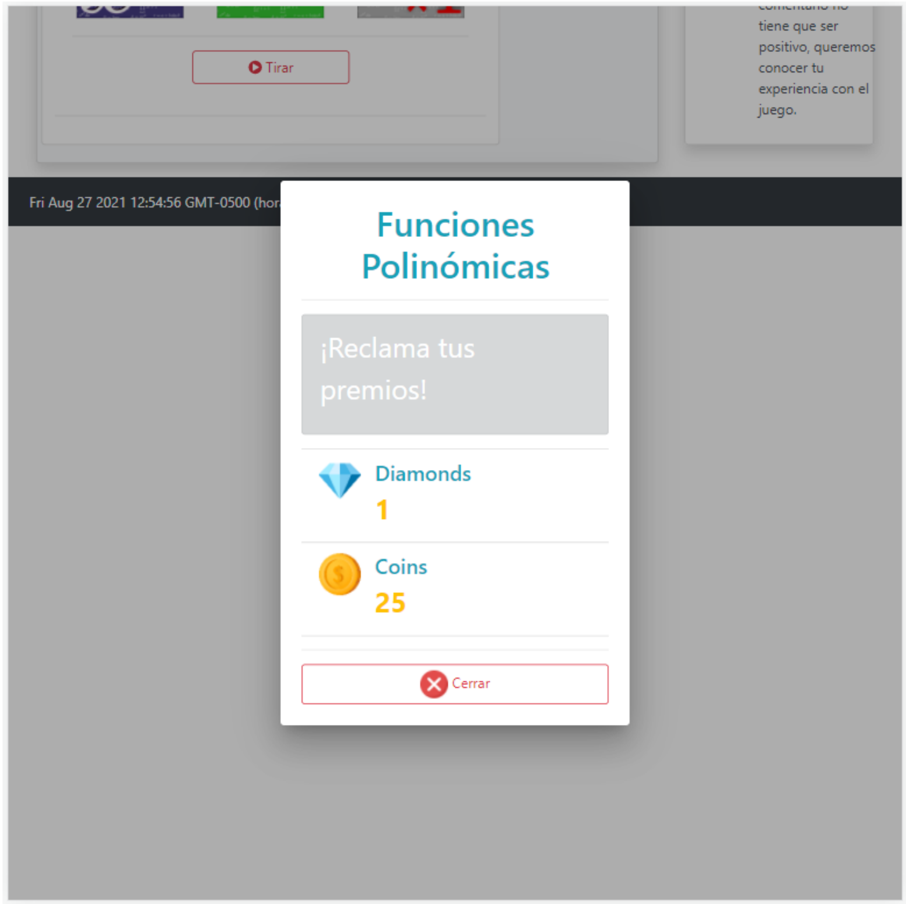


Figura 6.21: Puntos obtenidos por respuesta correcta

6.1.4.6.3. Caracterización de una función Otro problema que aparece en la aplicación es, dado un conjunto de raices (cortes de la función con el eje x) el usuario/estudiantes debe a apartir de la técnica de la multiplicación sintética o de los productos notables calcular los coeficientes de la función. En la siguiente imagen se puede observar un problema generado en la aplicación.

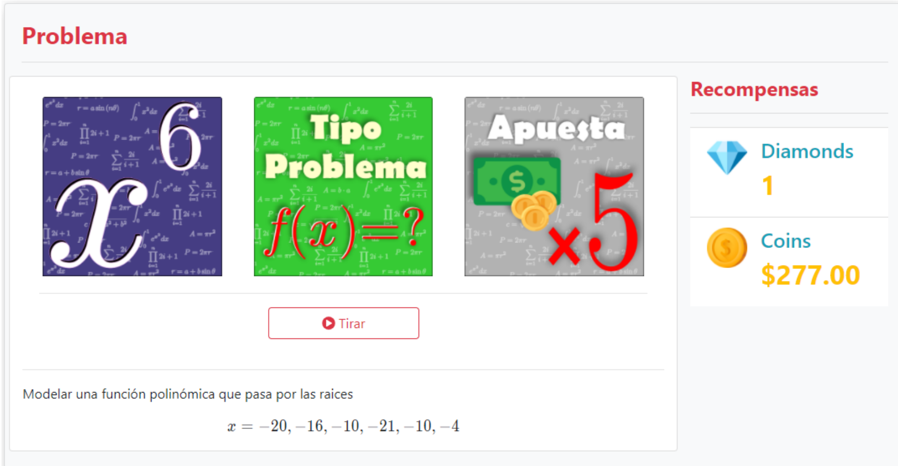


Figura 6.22: Problema de caracterización de una función polinómica

El problema indica: Modelar una función polinómica que pasa por las raices

$$x = -20, -16, -10, -21, -10, -4$$

6.1.4.6.4. Resolución del problema (Cálculo de los coeficientes) Se deben crear tantas coefientes como sea necesario, según se muestra en la siguiente imagen:

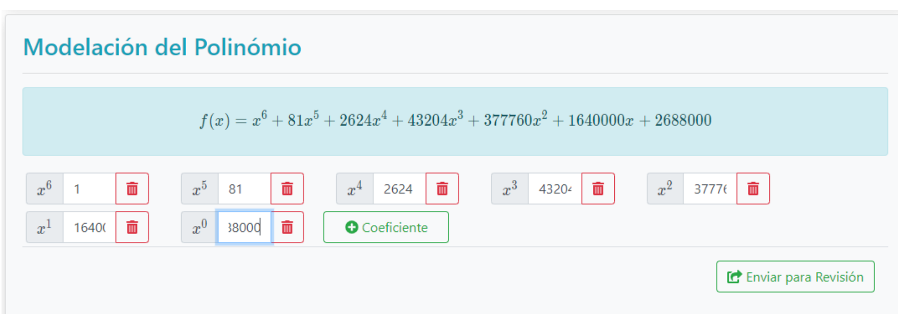


Figura 6.23: Solución del problema: Coeficientes de la función polinómica

Se puede observar que a medida que el usuario/estudiante ingresa los coeficientes la aplicación construye la función en la parte superior. Se presiona el botón de [Enviar para revisión] y la aplicación genera su respectiva retroalimentación.

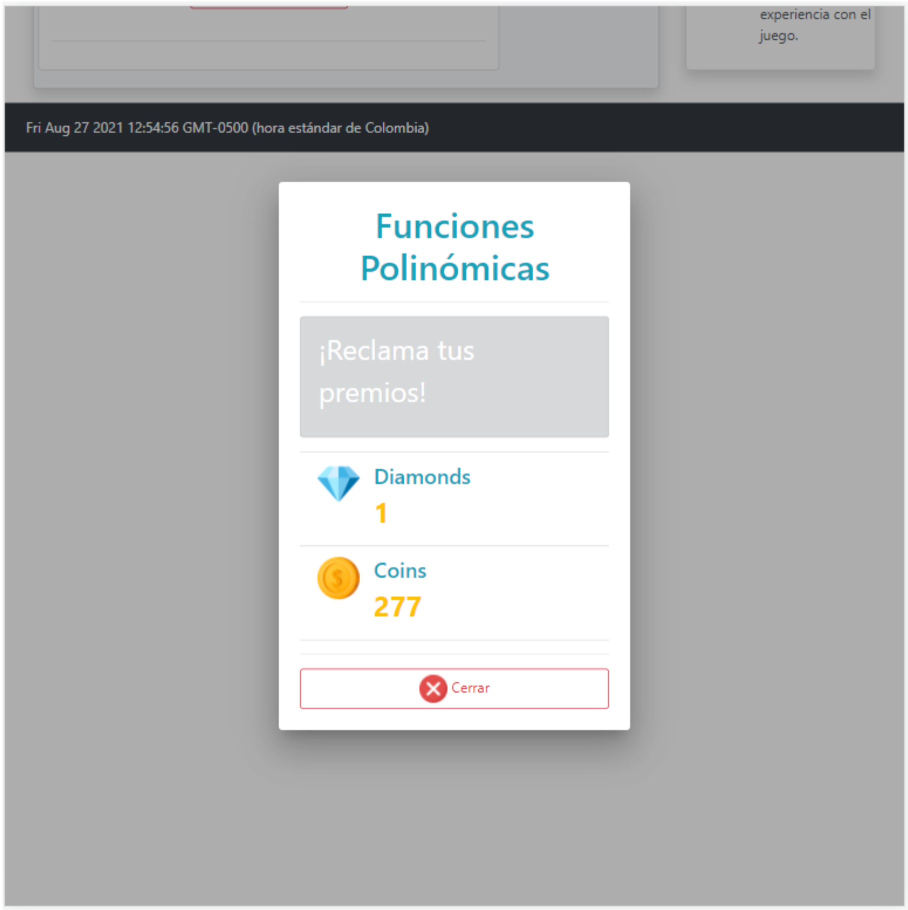


Figura 6.24: Retroalimentación del problema

6.1.4.6.5. Penalización cuando hay error Cuando el usuario/estudiante se equivoca la plataforma generá el siguiente mensaje de penalización, que también provocará un decremento en la nota.

Figura 6.25: Mensaje de penalización

6.1.4.6.6. Conclusión de la aplicación seleccionada La aplicación contiene un método para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en cuanto a los temas de graficación y modelación de funciones polinómicas. Como bien se menciono en la justificación, se **pretende aportar claridad de como usar las herramientas TIC para el proceso de enseñanza y aprendizaje.** En este sentido la aplicación seleccionada hace parte del conjunto de herramientas TIC que aportan el proceso de aprendizaje, puesto que en ningún momento se esta mostrando al estudiante cómo construir el concepto, más bien es una herramienta que le permite recursivamente evaluar los conocimientos adquiridos en una clase tradicional.

Por otra parte se puede precisar que el uso de herramientas como las que se mencionaron al inicio de esta sesión permiten de alguna forma enseñar y construir el concepto de graficación y modelación de funciones polinómicas, por ejemplo aplicaciones como geogebra permiten este proceso, además se puede dar claridad en las herramientas TIC presentes para este tiempo, así, se han descrito cuatro (4) herramientas TIC que permiten por lo general graficar funciones. En este sentido, se debe tener claro el uso que se le puede asignar o dar a cada herramienta, por ejemplo Geogebra, es una herramienta que se pueden usar para enseñar, puesto que el docente/investigador puede realizar sus respectivas construcciones de las funciones polinómicas y enseñar cómo se pueden aplicar estas herramientas en la graficación y modelación de funciones polinómicas. Por otra parte las otras herramientas, tienen el objetivo de una simple verificación del problema y no poseen una herramienta que le permita al estudiante validar sus conocimientos.

Se puede decir, que se pueden encontrar tres tipos de herramientas TIC para el acompañamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas, y a modo general para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

1. Las herramientas para enseñar, consisten en aplicaciones en las cuales el docente/investigador puede realizar construcciones, animaciones,

diagramaciones en tiempo de ejecución, con la finalidad de mostrar al estudiante cuál es el proceso que debe llevar para construir sus conocimientos (Quintero y col., 2005), mientras que,

2. Existen herramientas para **validar** lo aprendido, en este caso se puede hablar de todo el conjunto de calculadoras que existen en el mercado, ya sean de forma física o virtual, además existen aplicaciones instalables en dispositivos móviles o computadoras que hacen las veces de calculadora la cuales únicamente permiten validar los resultados por parte de un experto, es decir que, la persona/usuario que manipula la calculadora debe tener conocimientos claros de los procesos que esta llevando a cabo (Arroyo, 2006), y finalmente,

3. Están las herramientas para **evaluar** el conocimiento adquirido en las clases tradicionales, en la cual se presentan al estudiante diversos problemas y este debe calcular los parámetros, en este caso, la caracterización y modelación de las funciones polinómicas, para dar los resultados a la aplicación y la aplicación determinará si es correcta o no la solución al problema (Arroyo, 2006).

En este sentido este investigación hará uso de la tercer tipo de herramienta, en el cual se le da al estudiante una aplicación que le presenta diferentes tipos de ejercicios y este debe de resolver y enfrentar con la validación de la misma aplicación.

6.1.5 Análisis de videos de youtube

Actualmente una de las fuentes más recurrentes de información son las clases de video online, para lo cual se hará a continuación un análisis de videos de la plataforma YouTube, en la cual se explican conceptos de funciones polinómicas y afines.

Función Polinomial – Nivel 1- Intro y Ejercicios de Ceros

- **Enlace:** https://www.youtube.com/watch?v=OO492AYnv4o

- **Descripción:** En primer lugar, el docente en el video da una introducción al tema de función polinómica, donde enseña la forma que tiene la función, seguido de esto nos explica sobre el termino independiente de la función. A partir de esto el docente empieza con un ejemplo, dando a conocer una función polinómica que de allí nos enseña el grado de la función (n), se diferencia con más ejemplos si es una función polinomial tomando exponentes positivos y exponentes negativos. Después de realizar esta breve introducción a la temática el docente procede a desarrollar varios ejercicios a través de un cuadro el cual lo componen varias funciones y en el cual hace las siguientes preguntas: ¿Cuál es el grado del polinomio?, ¿Cuáles son sus coeficientes?, ¿Es una función polinómica? De esta manera nos muestra y se lleva a cabo el desarrollo de cada uno de los ejercicios como, por ejemplo, organizar la función con respecto a su grado, aplicar productos notables para construir la función y aplicar lo que es la factorización. Por último, habiendo explicado la identificación de estas funciones, procede a la parte gráfica de la función polinómica, en la cual el docente nos explica la forma correcta de hallar los ceros de la función, la cual el docente procede a aplicar la regla de Ruffini para verificar los puntos de corte que tiene la función dentro del eje “x”, y el proceso correspondiente para hallar el punto de corte con el eje “y”.

- **Recorte de pantalla del video:**

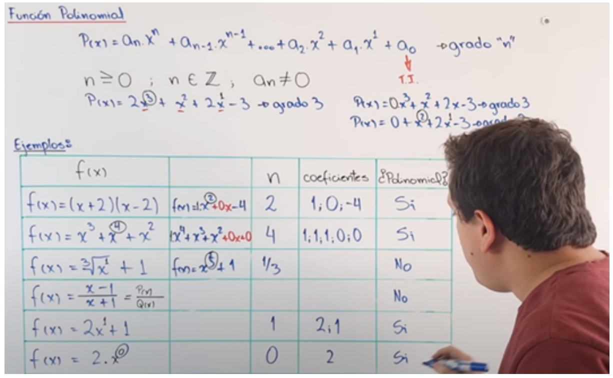


Figura 6.26: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Función Polinomial – Nivel 1- Intro y Ejercicios de Ceros.

Función Polinomial - Nivel 2 - Ejercicios de Gráficas

- **Enlace:** `https://www.youtube.com/watch?v=eySVXB9yIUM`

- **Descripción:** El docente comienza este video educativo, con la explicación detallada de los pasos que se deben de llevar a cabo para la parte de la graficación de una función polinómica. Da explicación de cuando se tiene solo la función graficada, el cómo darnos cuenta si es polinómica o no lo es, y es cuando la gráfica tiene una curva continua, cuando la función presenta una cúspide o un salto sabremos que ya no será una función polinómica. Después está el proceso de como tabular y de esta manera ir obteniendo valores para la variable "y", de seguido el docente realiza un cuadro comparativo en el cual muestra cuatro (4) formas diferentes del comportamiento de la función polinómica, como por ejemplo cuando el (n) es par y $a_n > 0$, y cuando (n) es impar y $a_n < 0$. Seguidamente el docente plantea unos ejercicios, donde dan la función polinómica, en el cual se pide hallar el comportamiento de la función, encontrar los ceros de la función, hacer una tabla para tabular y encontrar las coordenadas y por último es realizar el plano cartesiano y dibujar la curva.

- **Recorte de pantalla del video:**

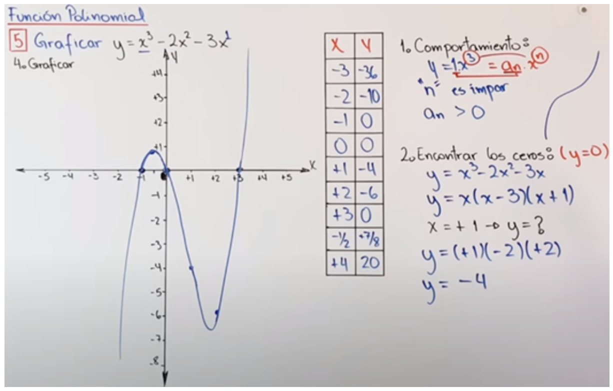


Figura 6.27: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Función Polinomial - Nivel 2 - Ejercicios de Gráficas.

Función Polinomial - Nivel 3 - Ejercicios de Aplicaciones

- **Enlace:**`https://www.youtube.com/watch?v=u0Gs2r-yk1g`
- **Descripción:** En este video se explicará y se llevará a cabo el proceso del cómo resolver ejercicios de aplicación de funciones polinómicas. A partir de este ejercicio a realizar se pide, calcular el volumen en función de x, trazar la gráfica y eliminar el volumen máximo de la caja. A partir de este problema el docente utiliza una herramienta didáctica, en este caso una hoja en la cual tiene una figura (rectángulo) dibujado, en la que va ir recortando cuatro (4) cuadrados y doblar las esquinas para formar una caja similar a la planteada en el ejercicio. Lleva a cabo un proceso para ir calculando el volumen de la caja donde debe aplicar multiplicación de polinomios llegando así a dos (2) expresiones. Para hallar el volumen máximo y a partir de las dos (2) expresiones obtenidas y comienza el proceso de la graficación. Por último, se realiza la graficación correspondiente a partir del proceso de la tabulación llevado a cabo y se realiza una comparación de la gráfica realizada en el tablero con una gráfica realizada en una herramienta TIC la cual es GeoGebra.
- **Recorte de pantalla del video:**

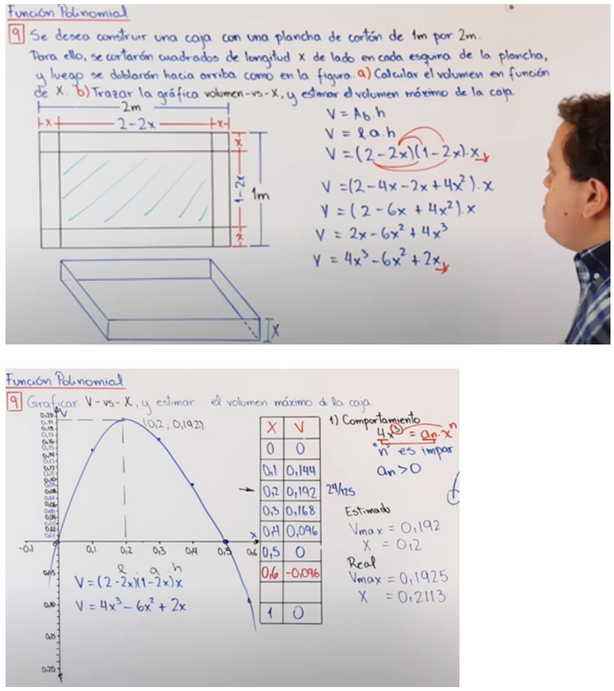


Figura 6.28: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Función Polinomial - Nivel 3 - Ejercicios de Aplicaciones.

Qué es una Función Polinómica | Función Polinomial

- **Enlace:**`https://www.youtube.com/watch?v=pd7ZSI6w5lg`
- **Descripción:** Este docente comienza explicando como esta compuesta la función polinómica o función polinomial en donde ilustra la forma que tiene la función general. Partiendo de esto nos enseña cual es el grado de la función, cuales son sus coeficientes y por último cual es el termino independiente. Luego, se toma el trabajo de ir explicando funciones incrementando el grado de cada una de ellas, a partir de estos ejemplos, plantea unos ejercicios en los cuales se pretende saber si cada una de las funciones planteadas es polinómica, en los cuales hay dos casos particulares en los que la función tiene como exponente una fracción y la función esta expresada con raíz.
- **Recorte de pantalla del video:**

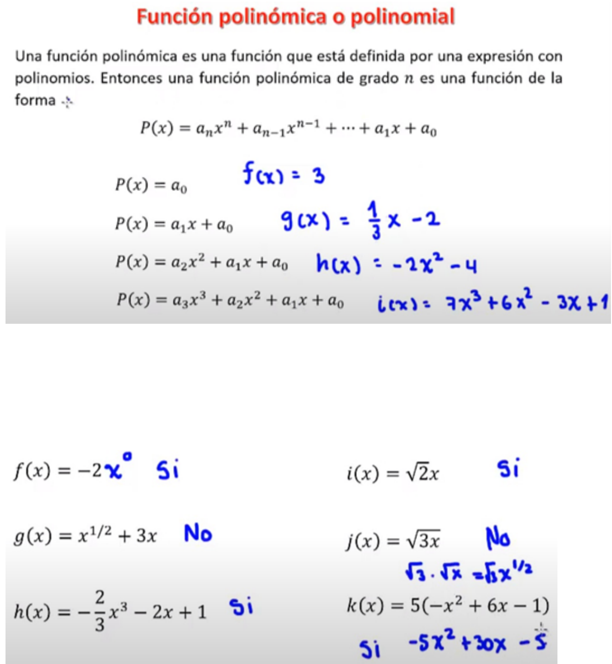


Figura 6.29: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Qué es una Función Polinómica | Función Polinomial.

Dominio y rango de una función polinómica

- **Enlace:** https://www.youtube.com/watch?v=0waASxoLbBI
- **Descripción:** Se comienza hablando del dominio y el rango de una función polinómica, en el cual explica que hay que tener en cuenta el grado de la función si es par o es impar. En el cual comenta que para hallar el dominio de la función polinómica es muy fácil ya que son todos los reales. De seguido, este docente hace uso de una herramienta TIC (GeoGebra), en donde nos presenta una función de grado impar para ilustrarnos que la grafica abarca todo el eje “x”, por esto el dominio son todos los reales y donde da claridad de que el rango también abarca todo el eje “y” y por esto, el rango también son todos los reales. Después de haber hablado de las funciones impares, nos da a conocer que sucede con las funciones pares. En donde a diferencia con las funciones impares, el rango de la función par, jamás serán todos los

reales y en donde el rango siempre va ser tomado de abajo hacia arriba. Por último, el docente propone una secuencia de ejemplos en los cuales a partir de cada uno de ellos va subiendo la dificultad del ejercicio para hallar el dominio y el rango de las funciones.

- **Recorte de pantalla del video:**

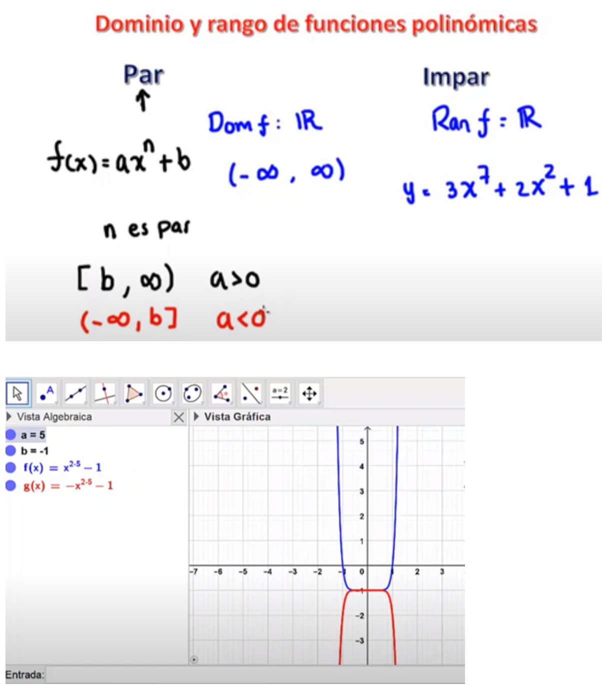


Figura 6.30: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Dominio y rango de una función polinómica.

Función Polinómica

- **Enlace:** `https://www.youtube.com/watch?v=8RYZvwLc_Qc`

- **Descripción:** En este video ya se explica directamente un ejercicio de función polinómica, en el cual se debe hallar las raíces del polinomio, luego de hallar las raíces procede a encontrar la ordenada al origen. De esta manera el docente procede a realizar un plano cartesiano en donde va a ubicar las raíces encontradas anteriormente, implementado y explicando el como darse cuenta de obtener los intervalos positivos o negativos. En otro ejemplo de una función con grado mayor, implementa el proceso de la división sintética. Esta por resaltar que este docente esta enfocado en una clase tradicional en la cual implementa un pizarrón, una tiza y una regla.

- **Recorte de pantalla del video:**

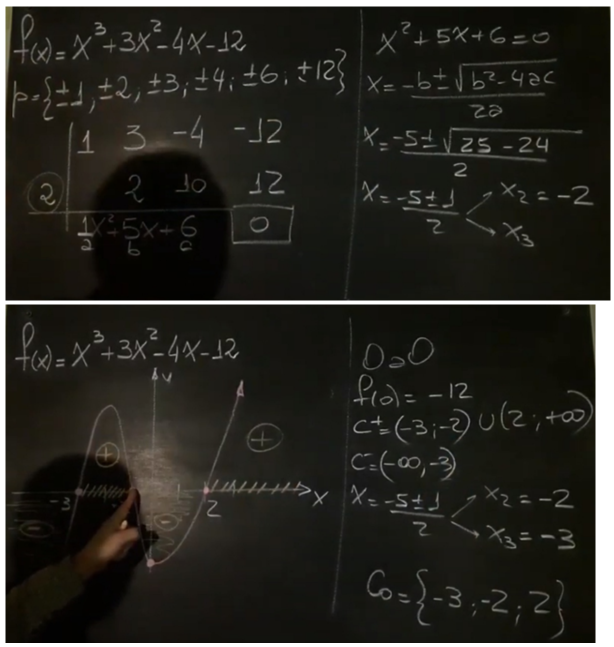


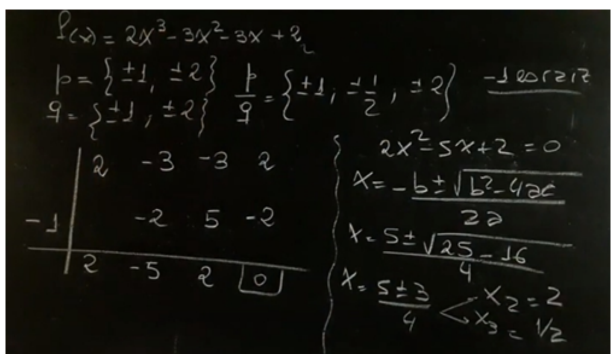
Figura 6.31: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Función Polinómica.

Raíces de una Función Polinómica

- **Enlace:**`https://www.youtube.com/watch?v=y8cag3QwjrQ`

- **Descripción:** En primer lugar, el docente realiza un análisis de una función polinómica de la cual, hallara la intercepción con los ejes. Donde los ejes de las “x” son las raíces que se van a encontrar, las cuales los valores de “x” en donde la función es cero y, en segundo lugar, la intersección con el eje de la “y” que son los valores de “y” para los cuales “x” es cero. Después de esto empieza resolviendo la función polinómica por el método de Gauss, toma el termino independiente y hallar sus divisores. Luego se enfoca en el coeficiente principal y halla sus divisores. Por último, implementa el método de Ruffini en el cual lo realiza con las raíces halladas anteriormente. Después de todo este proceso, el docente sigue con la parte de graficacion ubicando las raíces obtenidas y el punto de corte con el eje “y”, da una explicación de los intervalos positivos y negativos mostrando el comportamiento de las curvas.

- **Recorte de pantalla del video:**



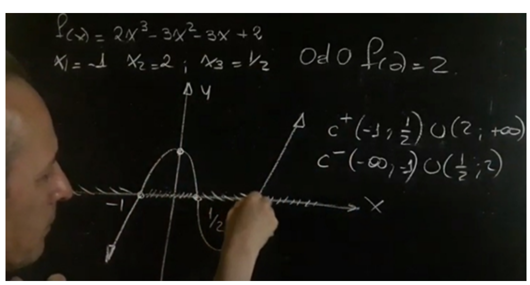


Figura 6.32: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Raíces de una Función Polinómica.

Dominio y Rango Funciones polinomicas: Función Lineal, Función Cuadrática

- **Enlace:** https://www.youtube.com/watch?v=u4R4eL-Xusw

- **Descripción:** Se muestran con tres ejemplos como determinar el dominio de funciones polinómicas a partir de la gráfica: Función Lineal, Función Cuadrática y Función polinómica de orden superior.

- **Recorte de pantalla del video:**

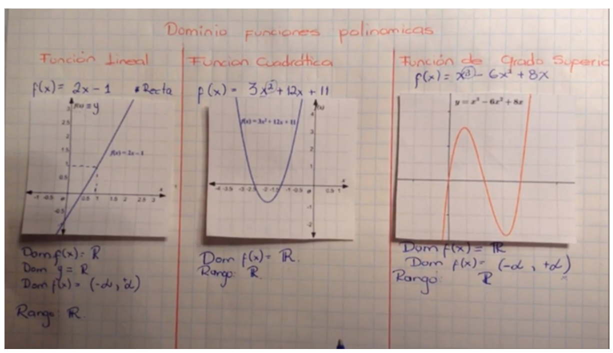


Figura 6.33: **Recorte de pantalla del video de youtube:** Dominio y Rango Funciones polinomicas: Función Lineal, Función Cuadrática.

Tabla estadística de los videos

Para describir las fuente de video en Youtube, se realizó una descripción de toda la información que se tomo de cada uno de los videos y se construyó la siguiente tabla:

Nombre del video	Nombre del autor	Likes	Dislikes	Vistas	Número de comentarios
Función Polinomial – Nivel 1- Intro y Ejercicios de Ceros	Matemovil	7100	336	474,764	257
Función Polinomial - Nivel 2 - Ejercicios de Gráficas	Matemovil	1800	60	119,613	83
Función Polinomial - Nivel 3 - Ejercicios de Aplicaciones	Matemovil	445	9	32,813	20
Qué es una Función Polinómica | Función Polinomial	Pi-ensa Matematik	386	11	18,093	75
Dominio y rango de una función polinómica	Pi-ensa Matematik	154	3	7424	70
Raíces de una Función Polinómica	Ricardo Jara	350	5	12,154	24
Dominio y Rango Funciones polinómicas: Función Lineal, Función Cuadrática	Juliana la profe	279	97	35,159	15

Figura 6.34: Estadística de los videos encontrados en youtube acerca de la graficación y modelación de funciones polinómicas

Esta tabla muestra las estadísticas de interacción de los videos con la comunidad, permitiendo apreciar algunos factores importantes como el número de visitas y las apreciaciones de los usuarios en términos de comentarios y calificaciones positivas o negativas.

6.1.5.1 Conclusión del análisis de clases en la plataforma youtube

Una de la partes importantes dentro del análisis didáctico, especialmente en la ingeniería didáctica es el análisis preliminar que contiene un apartado dedicado al análisis de clases tradicionales (Artigue y col., 1995), se ha desarrollado en esta investigación a través del análisis de videos de youtube.

Esta estrategia surge por la necesidad de observar la clase de algunos docentes, ya que en el desarrollo de la misma investigación surgieron dos problemas relevantes en torno al acto académico, estos son: la pandemia mundial generada por el Covid-19 y el paro nacional, por esta razón se pensó en tomar videos de personas que quisieron compartir sus conocimiento en línea (youtube) y que pueden recibir comentarios acerca de lo que están desarrollando.

En este sentido se observa en cada uno los videos, que la estrategia usada para impartir la clase de funciones polinómicas consiste en la clase magistral usando tablero y marcador y fundamentalmente generando la teoría necesaria para realizar los ejemplos correspondientes. En muy pocos se observa el uso de calculadoras, o herramientas tecnológicas que les permitan realizar los cálculos de forma más rápida y precisa y para detallar o profundizar sobre el tema.

Estos videos se eligen de acuerdo a los resultados entregados por el algoritmo de youtube, dando a entender que cualquier persona que quiere aprender sobre funciones polinómicas ingresará a la plataforma de youtube a buscar el término "función polinómica" y estos son algunos de los videos que encontrará como primeros resultados. Luego, al revisar las estadísticas de cada video, se observa que contiene gran número de visitas y comentarios de la clase, lo cual indica en un porcentaje, sea bajo o alto que son videos que han servido de apoyo para las clases de cálculo diferencial de aproximadamente diez mil quinientos catorce (10514) estudiantes [6].

[6] al momento de la citación de la fuente (Agosto del 2020)

Es así como se puede decir que de alguna forma y en alguna medida las clases de cálculo diferencial, particularmente las clases de graficación y modelación de funciones polinómicas se sigue haciendo de forma tradicional. No se puede decir en este trabajo de investigación en que porcentaje, porque solo son algunos de los videos que se encuentran en la plataforma Youtube en idioma español, pero si se puede decir que a la fecha[7] se continua trasmitiendo conocimientos de forma tradicional.

Por otra parte, los elementos fundamentales en los cuales se baso el análisis de los videos tienen que ver con los siguientes puntos:

- Videos en los que se explica el concepto de función.
- Análisis de los cortes con el eje x
- Análisis del corte con el eje y
- Análisis de los coeficientes de la función.
- Análisis del dominio y rango de la función.
- Análisis de los intervalos positivos y negativos de la función.
- Métodos para graficar y caracterizar una función polinómica.

6.1.6 Análisis de la Prueba Diagnóstico

Para el desarrollo del análisis se implementó una prueba diagnóstico que consistió en dos ejercicios con una serie de conceptos evaluados, tal como se muestra en la siguiente tabla.

[7]Julio de 2021

Propiedad	**Descripción**
Grado de la función	
Tipo de función	
Cortes con el eje x	
Describa el procedimiento para calcular los cortes con el eje x	
Describa los intervalos en donde la función es positiva	
Describa los intervalos donde la función es negativa	

Cuadro 6.6: Modelo del ejercicio de la prueba diagnóstico

Los dos ejercicios propuestos fueron:

1. Dada las siguientes funciones, graficar y caracterizar

   a) $f(x) = x^4 + 25x^3 + 229x^2 + 915x + 1350$

   b) $f(x) = x^4 - 17x^3 + 84x^2 - 148x + 80$

2. Por otra parte se propuso dos ejercicios de modelación, en el primero los cortes con el eje x fueron $x = 11, -11, -6, -9$ y en el segundo ejercicio $x = -5, -2, 3, 7$.

A continuación se presenta el análisis de algunas de las pruebas, determinando en una tabla si el estudiante cumplía o no, con el concepto evaluado. También se tomaron evidencias de los resultados obtenidos, y finalmente se realizó un análisis descriptivo de los datos obtenidos en una matriz de dos entradas. Los demás análisis están dispuestos en el apéndice del documento.

6.1.6.1 Estudiante 3

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante comprende los conceptos básicos de las funciones polinómicas, pero desconoce aspectos de mas profundidad, tales como determinar si una función es par o impar, cómo calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, modelar y graficar funciones polinómicas.

> Primero saque los valores de 1350 y realice una división sintética, y los números que me sirvieron fueron X= -5, X= -6, por lo tanto, ya tenemos dos puntos y convertimos esta función de cuarto grado a una función cuadrática, luego desarrollamos la función cuadrática la cual me dio los puntos de X=-9 y X=-5, por ende, ya sabemos los cortes en el eje x; de igual manera tabule y si me daban los cortes.

Figura 6.35: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

Primero saque los valores de 80 y realice una división sintética, y los números que me sirvieron fueron X=1, X=2, por lo tanto ya tenemos dos puntos y convertimos esta función de cuarto grado a una función cuadrática, luego desarrollamos la función cuadrática la cual me dio los puntos de X=10 y X=4, por tal motivo ya sabemos los cortes en el eje x; y al momento de tabular ,si me daban los cortes.

Figura 6.36: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

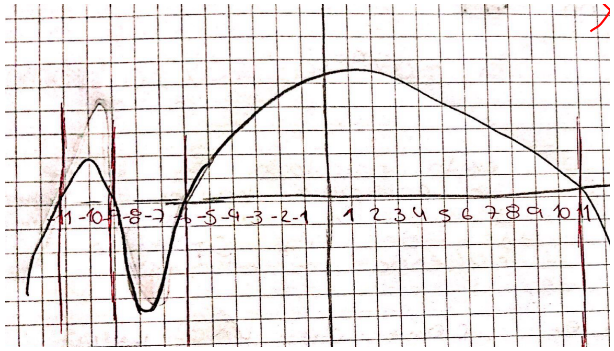
Evidencias

6.1.6.2 Estudiante 4

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
5	Modelación de Funciones Polinómicas		X
6	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Se evidencia en esta prueba diagnóstico que el estudiante apenas si conoce la forma de la función polinómica, no tiene establecidas competencias para analizar funciones polinómicas.



La gráfica realizada por el estudiante es incorrecta, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos positivos y negativos estan truncados.

Figura 6.37: Bosquejo de función elaborada por el estudiante

Evidencias

6.1.6.3 Estudiante 9

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
5	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
6	Graficación de Funciones Polinómicas	X	

Resumen de la Evaluación

Este estudiante realizó todos los ejercicios de la prueba diagnóstico, dando a entender que tiene buen manejo de toda la temática.

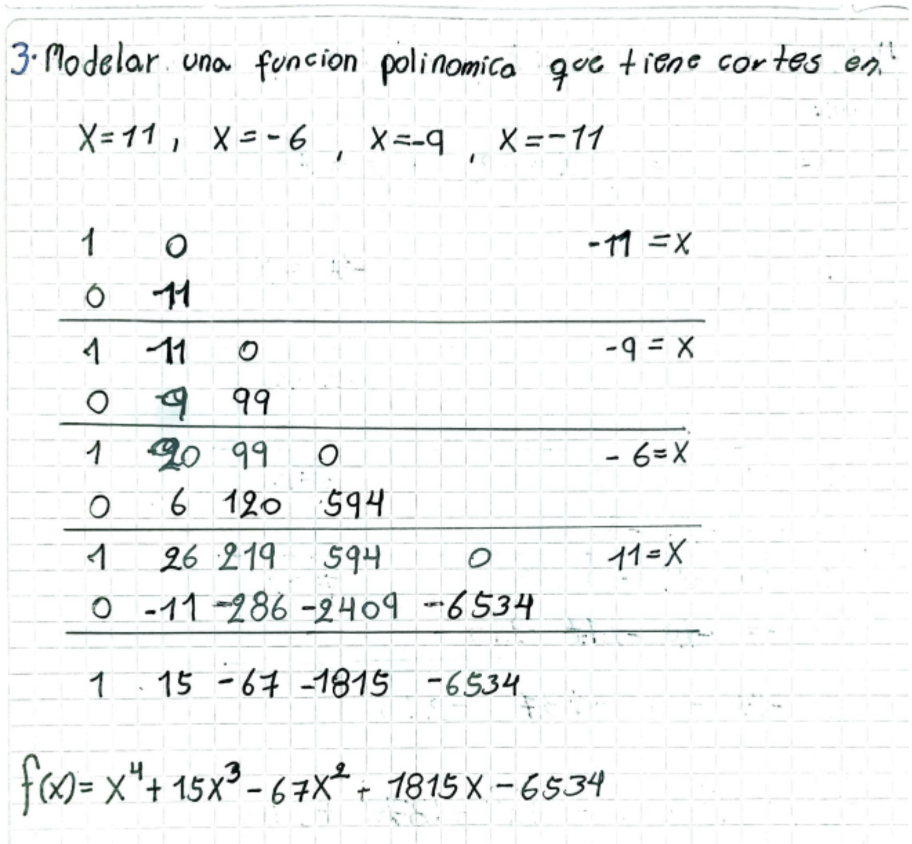


Figura 6.38: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

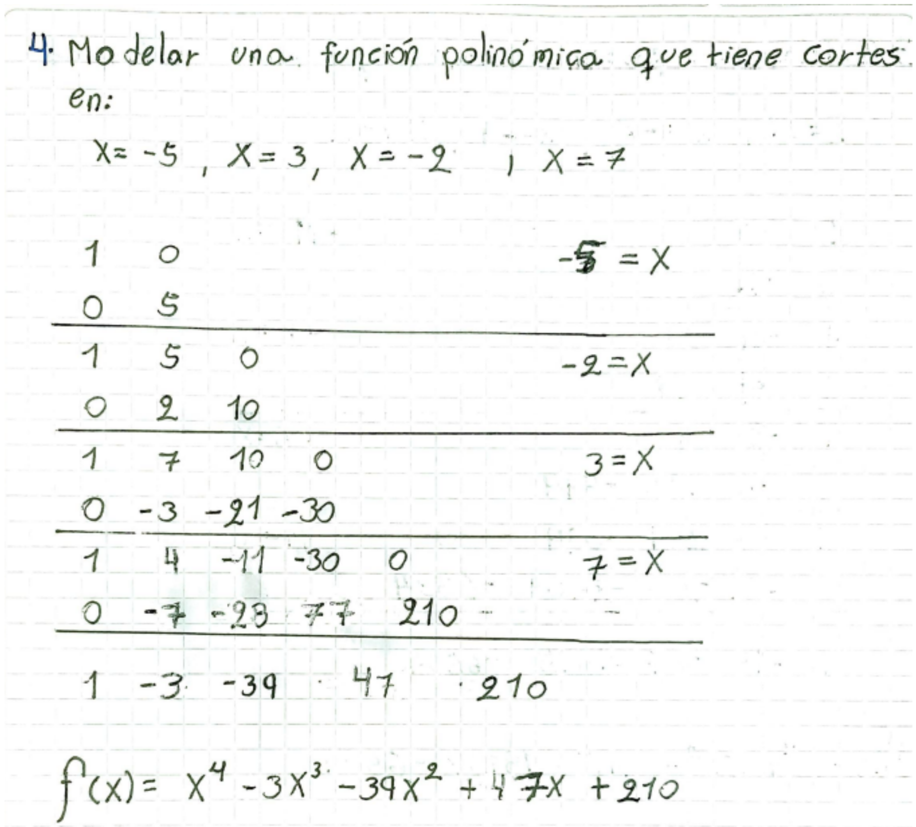


Figura 6.39: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

6.1.6.4 Estudiante 10

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
5	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
6	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Este estudiante presenta conocimientos básicos del tema, presenta dificultades al momento de determinar si la función es par e impar, de cómo graficar la función, si la función es simétrica, en el cómo sacar los intervalos de la función.

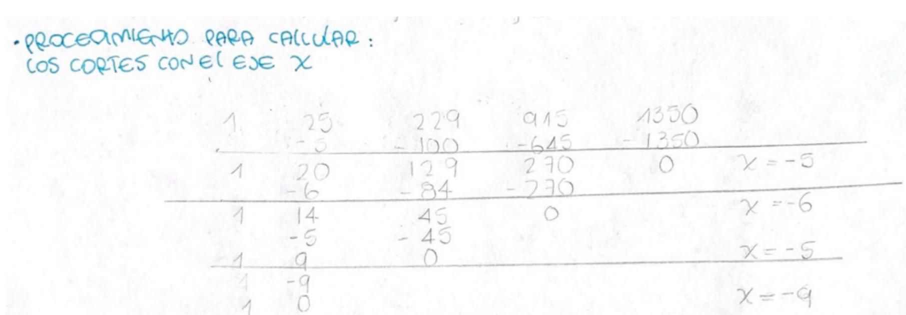


Figura 6.40: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

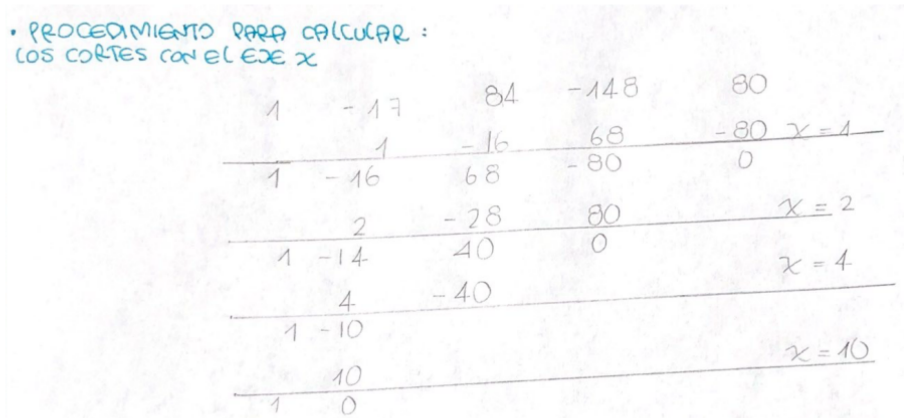


Figura 6.41: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

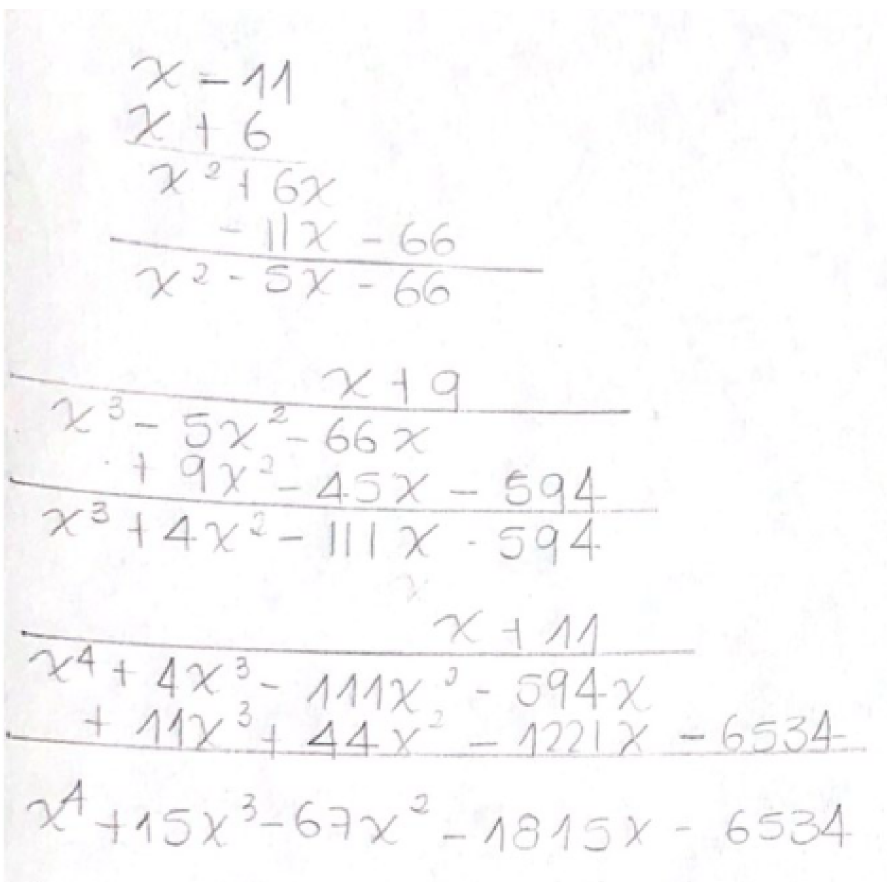


Figura 6.42: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

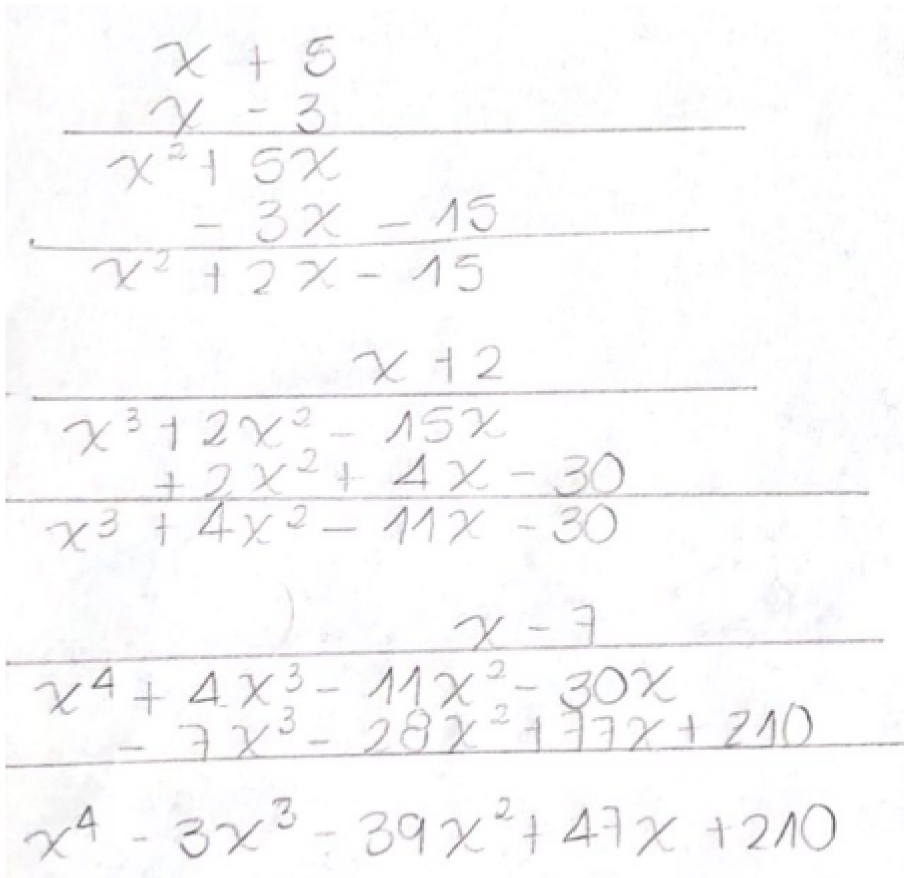


Figura 6.43: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

6.1.6.5 Análisis de los Resultados

Una vez terminada la evaluación de la prueba diagnóstica por estudiante se ha elaborado una matriz de datos con dos entradas, en la primera entrada el registro de cada estudiante y en la segunda entrada la respuesta de la evaluación adquirida por cada estudiante en la prueba diagnóstico como se muestra en la tabla 6.7

Conocimiento a Evaluar	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**Calificación Total**
Estudiante 1	1	1	0	0	0	0	2
Estudiante 2	1	1	1	0	1	0	5
Estudiante 3	1	1	1	1	0	0	5
Estudiante 4	1	0	0	0	0	0	1
Estudiante 5	1	1	1	0	0	0	3
Estudiante 6	1	1	1	0	0	0	3
Estudiante 7	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 8	1	1	1	0	1	0	4
Estudiante 9	1	1	1	1	1	1	9
Estudiante 10	1	1	1	0	1	0	4
Estudiante 11	1	1	1	0	0	0	3
Estudiante 12	1	1	1	0	0	0	3
Estudiante 13	0	0	0	0	0	0	0
Estudiante 14	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 15	1	1	1	0	1	1	5
Estudiante 16	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 17	1	0	0	0	0	0	1
Estudiante 18	0	0	0	0	0	0	0
Estudiante 19	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 20	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 21	0	0	0	0	0	0	0
Estudiante 22	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 23	1	1	1	1	1	0	5
Estudiante 24	1	1	1	0	1	0	4
Estudiante 25	0	0	0	0	1	0	1
Estudiante 26	1	1	1	0	0	0	3
Estudiante 27	1	0	0	0	1	0	2
Estudiante 28	1	1	1	0	1	0	4
Total Prueba/Conocimiento	24	21	20	9	16	2	

Cuadro 6.7: Matriz de doble entrada del análisis de la prueba diagnóstico

Las categorías asociados a los conocimientos a evaluar son los siguientes:

C1. Tipo de la Función.

C2. Cortes con el eje x.

C3. Procedimiento para calcular los cortes.

C6. Intervalos donde la función es positiva/negativa.

C8. Modelación de Funciones Polinómicas.

C9. Graficación de Funciones Polinómicas.

El total ponderado de la prueba por conocimiento permite configurar un diagrama de barras como el que se muestra en la figura 6.44.

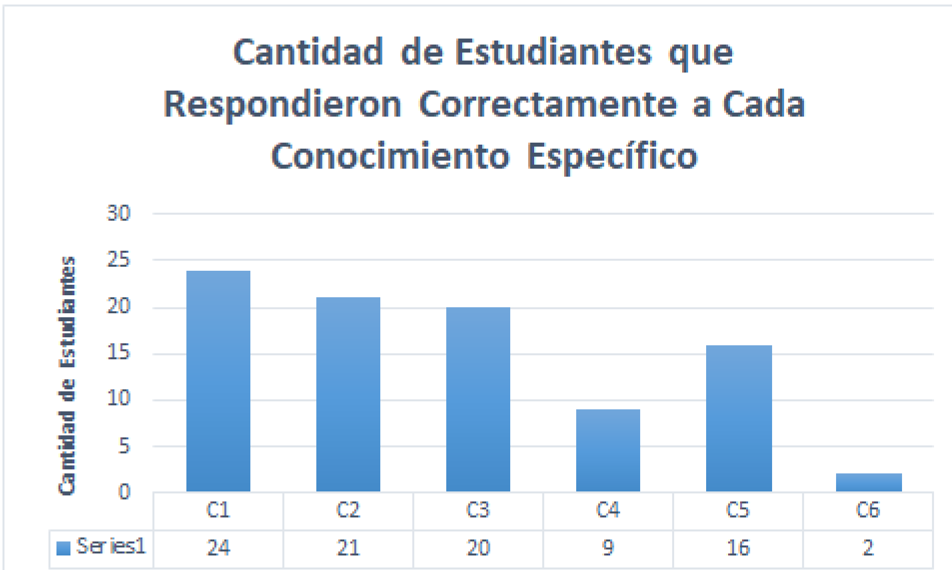


Figura 6.44: Diagrama de barras de la Cantidad de Estudiantes que Respondieron Correctamente a Cada Conocimiento Específico

El diagrama permite apreciar que los conocimientos evaluados con más deficiencia corresponden a las categorías C4 y C6, en la que se evidencia que menos de diez (10) estudiantes de veintiocho (28) que participaron en la prueba resolvieron de forma satisfactoria tales categorías, particularmente están son:

C4. Intervalos donde la función es positiva/negativa.

C6. Graficación de Funciones Polinómicas.

6.1.6.5.1. Conclusión de la prueba diagnóstico Esta prueba permite concluir para la primera fase de la investigación que los conocimientos que más se deben abordar en el diseño de una situación adidáctica para la enseñanza aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas a través de la resolución de problemas en un juego computarizado, son los mencionados anteriormente:

C4. Intervalos donde la función es positiva/negativa.

C6. Graficación de Funciones Polinómicas.

6.1.7 Análisis de encuestas a docentes

Con la intención de llevar acabo la investigación en la línea de informática educativa, se diseñó una encuesta para docentes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío, usando el aplicativo de google formularios, en la cual se cuestiona acerca de la enseñanza-aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas. A continuación se presenta el análisis y estadísticas de los resultados de las respuestas de seis docente pertenecientes al programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío.

1. ¿Dónde cree que reside el problema de aprendizaje del cálculo diferencial, particularmente en la modelación y graficación de las funciones polinómicas?

    a) Falta de justificación.

    b) Desarrollo cognitivo no adecuado.

    c) Conceptos débilmente adquiridos.

    d) Falta de visualización de los problemas.

    e) Otros:

    A continuación se presenta el resultado obtenido de la respuesta de seis docentes.

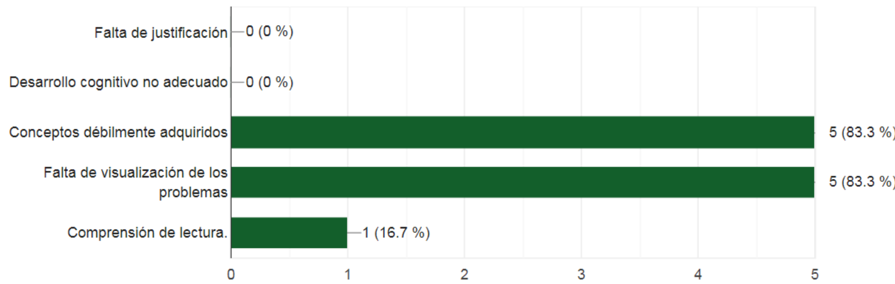


Figura 6.45: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 1

2. ¿Qué tipo de metodología usa para enseñar cálculo diferencial , particularmente en la modelación y graficación de las funciones polinómicas?

    a) Operativo-participativo.

    b) Clases magistrales.

    c) Trabajos individuales o en grupo.

    d) Clases prácticas.

    e) Otros:

    A continuación se presenta el resultado obtenido de la respuesta de seis docentes.

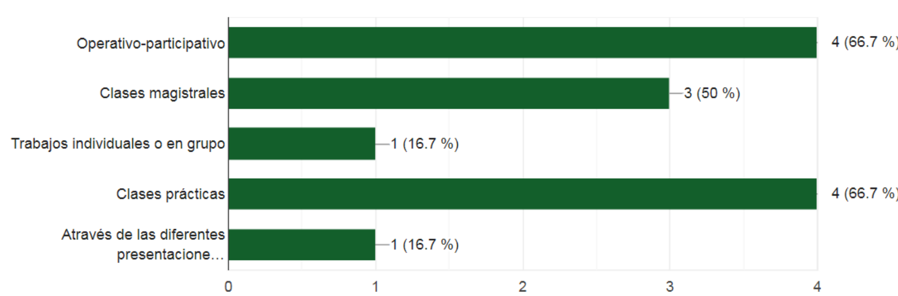


Figura 6.46: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 2

3. ¿En qué tipo de recursos didácticos se apoya para enseñar calculo diferencial, particularmente en la modelación y graficación de las funciones polinómicas?

a) Tablero.

b) Apuntes de libros de texto.

c) TIC.

d) Otros:

A continuación se presenta el resultado obtenido de la respuesta de seis docentes.

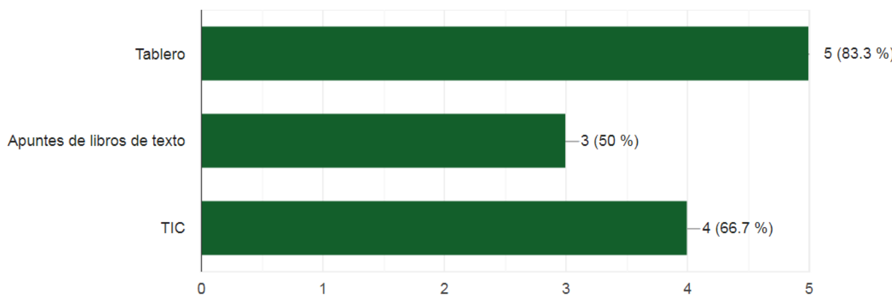


Figura 6.47: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 3

4. ¿En las instalaciones educativas tienen acceso a equipos como computadores, proyector o televisor en buenas condiciones?

a) SI.

b) NO.

A continuación se presenta el resultado obtenido de la respuesta de seis docentes.

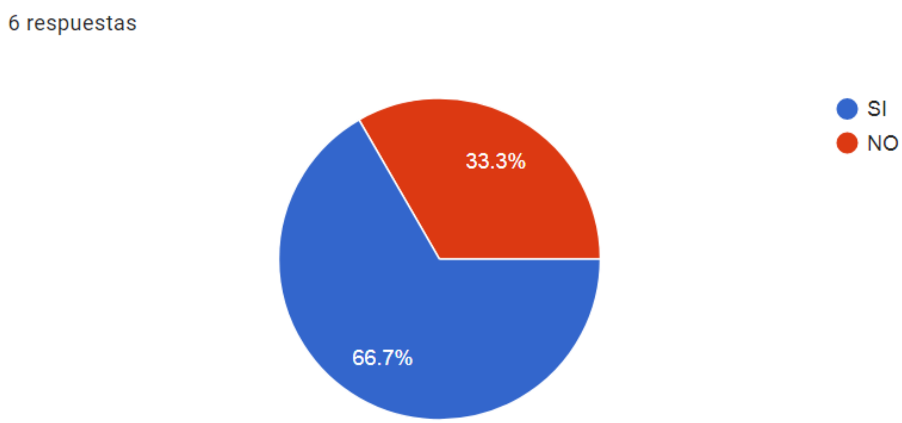


Figura 6.48: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 5

5. Cuáles de los siguientes recursos usa en la preparación de sus clases:

   a) Materiales físicos.

   b) Libros.

   c) Programas por computadora.

   d) Páginas de internet.

   e) Otros:

   A continuación se presenta el resultado obtenido de la respuesta de seis docentes

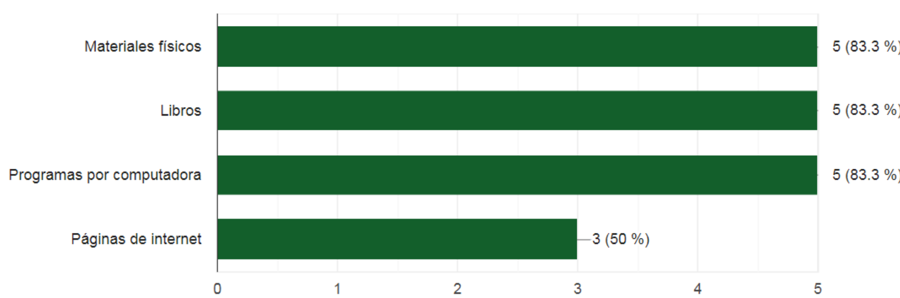


Figura 6.49: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 6

6. ¿Utiliza las TIC como recurso didáctico en el proceso de la enseñanza-aprendizaje?

a) SI.

b) NO.

c) Otros:

A continuación se presenta el resultado obtenido de la respuesta de seis docentes.

Figura 6.50: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 7

7. Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, diga cuales herramientas:

Geogebra, Calculadoras, Aplicaciones Personalizadas

Geogebra, Matlab

Geogebra

GeoGebra

Clases virtuales, y el uso de las plataformas educativas.

GeoGebra, Matlab, páginas interactivas

Figura 6.51: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 8

8. ¿Cree que la calidad educativa se ve afectada por el uso de

los ambientes virtuales de aprendizaje, como complemento a la presencialidad?

a) SI.

b) NO.

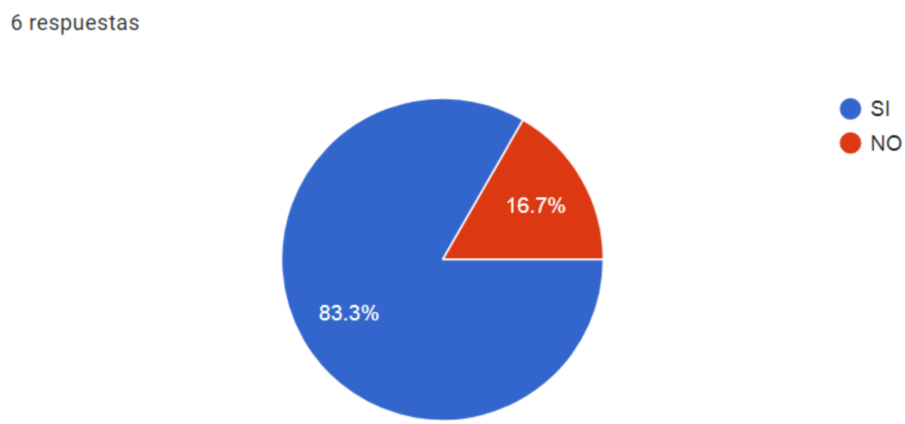


Figura 6.52: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 9

9. ¿Por que?

A través de herramientas TIC se pueden lograr aprendizajes sólidos, a través de la manipulación de ambientes de simulación

Falta de atención, no copian, no hacen los talleres.

Apoyan y facilitan el proceso

Falta de interacción con los estudiantes

La interacción directa con los estudiantes es muy importante , la presencialidad nos permite estar más cerca de ellos.

Puede ayudar a visualizar mejor y comprender mejor los problemas

Figura 6.53: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 10

10. ¿Ha usado algún software para trabajar cálculo diferencial, particularmente en la modelación y graficación de funciones polinómicas?

a) SI.

b) NO.

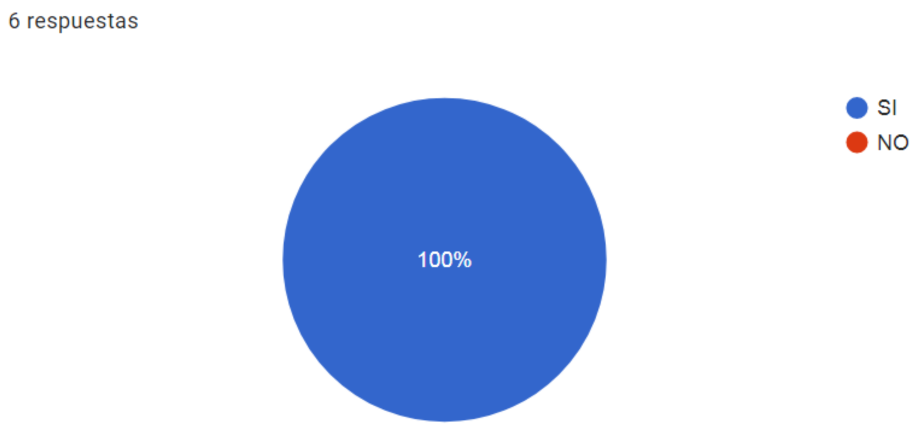


Figura 6.54: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 11

11. Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, especifique cuál o cuáles:

Geogebra

GeoGebra

Geogebra, Aplicaciones personalizadas

Deslizadores de Geogebra

Figura 6.55: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 12

12. ¿Haría uso de herramientas didácticas realizadas en software educativo para el desarrollo del plan de estudios de cálculo diferencial, particularmente en la graficación y modelación de funciones polinómicas?

a) SI.

b) NO.

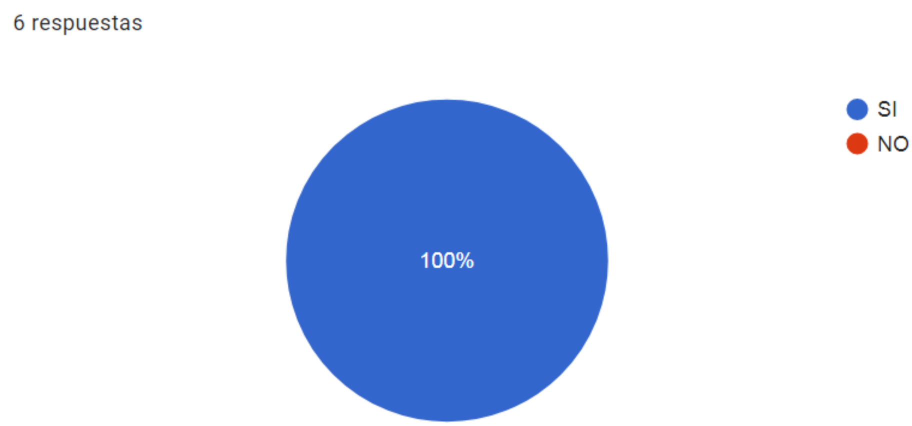


Figura 6.56: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 13

13. ¿Por que?

Contienen una intención guiada

Si potencializan el aprendizaje de los estudiantes son bienvenidas, sin embargo la herramienta no es la solución al aprendizaje de los conocimientos matemáticos

Apoyar el proceso

Es distinto un software educativo a uno q solo presente gráficas

Porque el software Educativo permite identificar las propiedades los cambios de una forma interactiva de las gráficas

Porque son de apoyo para el docente

Figura 6.57: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 14

14. Describa como se imagina una herramienta tecnológica para enseñar adecuadamente la graficación y modelación de funciones polinómicas

Herramienta de simulación y resolución de problemas

No se.

Sencilla y completa

Q muestre el proceso, q se puedan variar parámetros

De fácil manejo y sobre todo con colores llamativos

Figura 6.58: Imagen obtenida de la aplicación de google formularios: Respuesta a la pregunta 15

6.1.7.1 Conclusión de la encuesta realizada a docentes

En la encuesta realizada a docentes, se evidencia que las problemáticas mas comunes en el momento de abordar un curso de cálculo diferencial, particularmente la enseñanza de las funciones polinómicas, reside en conocimientos débilmente adquiridos y en la falta de visualización de los problemas, por otra parte los docentes usan dentro de su plan metodológico de clase, las clases magistrales y las clases prácticas. Principalmente los docentes se apoyan en el uso del tablero y frecuentemente usan las TIC como herramienta de apoyo, pero se evidencia que algunas de las instituciones donde laboran no cuentan con una buena apropiación de herramientas tecnológicas, lo cual da ha entender que el docente es quien muestra a los estudiantes tales herramientas por su propio esfuerzo, y dentro de estas se observan con mayor frecuencia las siguientes: Geogebra y Matlab.

Por otra parte los docentes en su gran mayoría usan el enfoque de resolución de problemas para abordar el concepto de función polinómica y describen de forma básica una herramienta por medio de la cual puedan enseñar el concepto de función polinómica.

Sin embargo hay dos posturas diferenciadoras en la pregunta, ¿Cree que la calidad educativa se ve afectada por el uso de los ambientes virtuales de aprendizaje, como complemento a la presencialidad?, mostrando en primer lugar un ánimo por el uso de las TIC como recurso de apoyo, argumentando que a través de las herramientas TIC se pueden lograr aprendizajes sólidos por medio de la manipulación de ambientes de simulación, o, que pueden ayudar a visualizar mejor y comprender mejor los problemas propuestos, y por otra parte la postura de los docentes muestra que la calidad se ve afectada ya que se pierde la atención de los estudiantes, no copian y no hacen los talleres y que la interacción directa con los estudiantes es muy importante, la presencialidad les permite estar más cerca de los estudiantes.

Así, este tipo de posturas permite dilucidar que algunos docentes aun desconfían de las TIC como recurso de apoyo, ya sea por la falta de conocimiento en su manipulación o porque tienen una postura crítica en cuánto a los diversos testimonios negativos acerca del uso de las TIC en el aula de clase.

6.2 Fase 2: Análisis apriori

El análisis apriori consiste en el desarrollo de una serie de cuestionamientos didácticos por medio de los cuales se desarrollan las estrategias para diseñar la secuencia didáctica (Advíncula, 2020), que se llevó a ejecución con los estudiantes de cálculo diferencial del programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Quindío.

Es importante señalar que los resultados obtenidos en la fase anterior, análisis preliminar son tomados en esta fase para realizar el diseño de la secuencia didáctica. En este sentido el análisis apriori tiene la siguiente estructura: (1) Análisis del concepto de función polinómica, (2) Tipos de problemas planteados por el docente/investigador, (3) Diseño del sistema de situaciones adidácticas a presentar a los estudiantes, (4) Presentación y discusión de la herramienta TIC a usar, tal como lo argumenta Artigue y col. (1995) concibiendo un plan de acuerdo con los objetivos de la investigación.

Por otra parte el análisis apriori busca concebir un plan de acción que permita en la fase de la experimentación determinar los posibles caminos, rutas, tipos de estrategia y soluciones propuestas por los estudiantes frente a la misma secuencia didáctica diseñada (Artigue y col., 1995; Brousseau, 2007). En este sentido se deben proponer una serie de preguntas que permitan orientar el proceso de la investigación hacia la etapa final y realizar las respectivas conclusiones.

Al final de esta sección se explicita la secuencia didáctica que se presentó para el desarrollo de las actividades y una serie de preguntas que se le hicieron al estudiante en una prueba final para determinar el tipo de estrategia usada para resolver los problemas planteados en la secuencia didáctica.

6.2.1 Análisis del concepto de función polinómica

Como se mencionó brevemente en el marco teórico, para abordar un concepto matemático es necesario descomponer el concepto de tal forma que se pueda determinar los tipos de situaciones didácticas que pueden resolver los estudiantes (Rincón, 2015).

Hernández y Trigueros (2012) citados por (Jaimes, Chaves y Vargas, 2017) definen la descomposición genética como un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. Hernández y Trigueros argumentan, que en ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto.

Jaimes, Chaves y Vargas (2017) definen que en la teoría de la descomposición genética existen tres construcciones mentales, acción, proceso y objeto. La acción es cualquier actividad mental o física que transforma de alguna manera un objeto físico o mental, estas acciones tienden a ser algorítmicas y se adquieren a través de la repetición. Por otra parte Jaimes, Chaves y Vargas (2017) mencionan que un proceso en el individuo corresponde a una reflexión sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre el, sin embargo un proceso se puede generar por la coordinación de dos o mas procesos, permitiendo establecer relaciones entre los procesos para determinar un nuevo proceso. Por otra parte Jaimes, Chaves y Vargas (2017) explicitan que un objeto se da cuando un individuo puede reflexionar de forma más general sobre un proceso y lo puede concebir en su totalidad posibilitando realizar transformaciones globales, es decir, una vez comprendido el conjunto de procesos y acciones de un concepto determinado puede encapsular estos en un objeto asignándole una etiqueta que mas adelante usará para la resolución de otros problemas en los cuales se pueda aplicar el conjunto de procesos incorporados al esquema.

En este sentido, se puede concebir cómo descomponer el concepto de función polinómica para lograr el aprendizaje en los estudiantes.

Una función polinómica tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y generalmente el exponente de la función polinómica indica cuántos cortes tiene la función polinómica sobre el eje x.

En esta investigación se trabajó con funciones polinómicas que tienen soluciones en el conjunto de los números racionales. Este tipo de ejercicios se generan cuando se modela la función a través de multiplicación de binomios de la forma $(x - r)$ o de productos notables, es así como el concepto función polinómica contiene una estructura que permite la exploración de varios tipos de problemas que se mencionan a continuación.

6.2.2 Tipos de problemas planteados por el docente/investigador

Las funciones por lo general tiene dos tipos de problemas asociados, el primero de ellos es la caracterización de la función, que consiste en encontrar los puntos de corte con el eje x,el punto de corte con el eje y, los intervalos positivos y negativos y si es posible a través de conocimientos en derivación conocer los puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento (Rincón, 2015), sin embargo, como se dijo líneas atrás se requieren conceptos de derivación que no se ocuparon en esta investigación.

El segundo tipo de problema asociado a las funciones polinómicas consiste en modelar la función polinómica a través de los puntos de corte con el eje x de la forma $x = r_n$, usando algunas de las dos técnicas posibles para realizar el cálculo, con productos notables o usando multiplicación sintética.

6.2.2.1 Graficar y caracterizar una función polinómica

Caracterizar una función polinómica consiste en determinar todos los detalles de la función, dominio, rango, puntos de corte con el eje x,punto de corte con el eje y, puntos máximos y mínimos, intervalos positivos y negativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, determinar si la función es par o impar y evaluar la función en valores determinados de la función (Rincón, 2015). Sin embargo desde la prueba diagnóstico se determino que los estudiantes no tienen algunos conceptos claros, por otra parte desde el análisis de libros de textos y los videos analizados de la plataforma youtube de las clases tradicionales, algunos de los cálculos y conceptos descritos anteriormente no se tienen en cuenta hasta que el estudiante aprende a derivar.

De tal forma que la investigación solo abordará los siguientes elementos para la caracterización de la función polinómica para su graficación y caracterización:

1. Cálculo de los cortes con el eje x
2. Cálculo del corte con el eje y.
3. Intervalos positivos y negativos.

4. Dominio de la función.

5. Evaluación de valores en la función.

Ejemplo: Graficar y caracterizar la siguiente función polinómica

$$f(x) = x^5 + 12x^4 + 28x^3 - 78x^2 - 173x + 210$$

Solución: Para graficar esta función polinómica el estudiante debe determinar en primer lugar los cortes de la función con el eje x, así, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Calcular los divisores del término independiente, así:

1	2	3	5	6	7	10	14
210	105	70	42	35	30	21	15

2. Realizar el proceso de la evaluación de la función con cada uno de estos divisores tanto positivos como negativos, así, en la función dada

   a) $f(-7) = 0$

   b) $f(-5) = 0$

   c) $f(-3) = 0$

   d) $f(1) = 0$

   e) $f(2) = 0$

3. Por lo tanto el proceso de la división sintética se desarrolla como se muestra en la siguiente tabla.

1	12	28	-78	-173	210	$x=-7$
	-7	-35	49	203	-210	
1	5	-7	-29	30	0	$x=-5$
	-5	0	35	-30		
1	0	-7	6	0		$x=-3$
	-3	9	-6			
1	-3	2	0			$x=1$
	1	-2				
1	-2					$x=2$
	2					
1	0					

De tal forma que los cortes con el eje x están en $x=-7$; $x=-5$; $x=-3$; $x=1$ y $x=2$

4. Para calcular el corte con el eje y se evaluá la función en cero (0), de tal forma que

$$f(0)=210$$

5. Se Calculan los intervalos positivos y negativos a través de la ley de los signos

$x \geq -7$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \geq -5$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \geq -3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x \geq 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x \geq 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
		-7	-5	-3	1	2

Los intervalos negativos se definen en $(-\infty,-7]\cup[-5,-3]\cup[1,2]$ y los intervalos positivos se definen en $[-7,-5]\cup[-3,1]\cup[2,+\infty)$

6. Finalmente se realiza la gráfica de la función a través de los datos encontrados en los pasos del uno (1) al cinco (5) como se muestra en la figura 6.59.

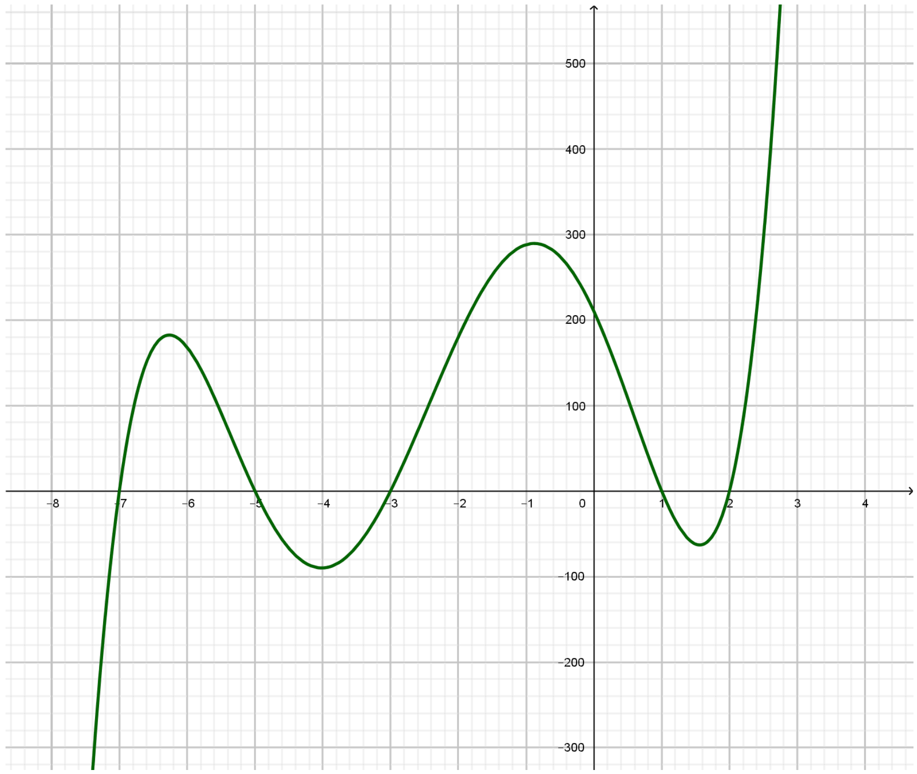


Figura 6.59: Gráfica de la función $f(x) = x^5 + 12x^4 + 28x^3 - 78x^2 - 173x + 210$

6.2.2.2 Modelar una función polinómica

En el segundo caso, modelar una función polinómica consiste en tomar los cortes con el eje x, transponer los términos números al lado de la x y luego usar productos notables o multiplicación sintética [8]. A continuación se presenta un ejemplo.

Ejemplo: Modelar una función polinómica que tiene cortes en el eje x en $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$.

[8]El método de multiplicación sintética no es común en los libros de texto de cálculo o álgebra. Ha sido un desarrollo experimental del Magister Julián Andrés Rincón Penagos en sus experiencias de clase en la Universidad del Quindío, al llevar el proceso inverso de la División Sintética.

Solución: Se transponen los términos numéricos al lado de las x, así

$$(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)$$

y se realiza el proceso de la multiplicación sintética de la siguiente forma:

1	0				$x-2$
	-2				
1	-2	0			$x-3$
	-3	6			
1	-5	6	0		$x-5$
	-5	25	-30		
1	-10	31	-30	0	$x-7$
	-7	70	-217	210	
1	-17	101	-247	210	

El proceso consiste en dibujar una tabla en la que en cada fila se va desarrollando la multiplicación sintética, se multiplica el coeficiente uno (1) por el valor que acompaña a la x, en el primer caso 1×-2 y el resultado se escribe a la diagonal del coeficiente (1) y se calculan los resultados mediante suma. El proceso se repite para los siguientes factores, siempre llevando el resultado en la diagonal del coeficiente que se multiplica. En la tabla se puede observar como se van incrementando las columnas, siempre llevando el resultado a la diagonal siguiente. Finalmente se observan que los coeficientes encontrados son $1, -17, 101, -247, 210$ que corresponden a los coeficientes de la siguientes función:

$$f(x) = x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210$$

Para graficar esta función el estudiante debe tener en cuenta la ley de los signos que se desarrolla de la siguiente forma:

$x \geq 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x \geq 3$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x \geq 5$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x \geq 7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
		2	3	5	7

a partir de esta cálculo se determinar que la gráfica tiene los siguientes intervalos positivos

$$(-\infty, 2] \cup [3, 5] \cup [7, +\infty)$$

y los intervalos negativos están dados por

$$[2, 3] \cup [5, 7]$$

la gráfica de esta función es la siguiente:

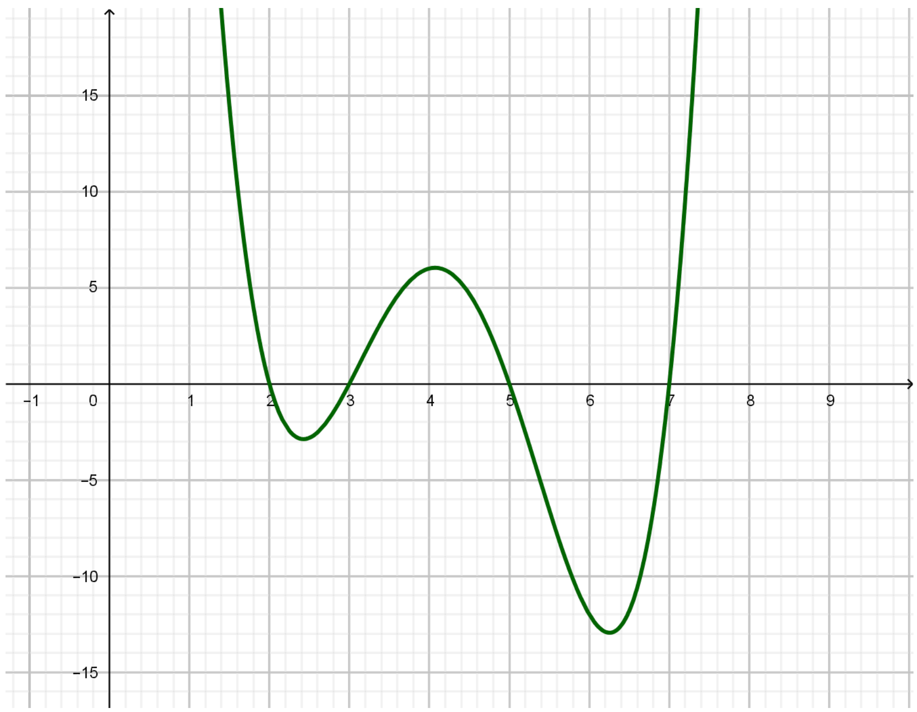


Figura 6.60: Gráfica de la función $f(x) = x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210$

6.2.3 Diseño del sistema de situaciones adidácticas a presentar a los estudiantes

A través de estos dos ejemplos se introdujo a los estudiantes al tema de funciones polinómicas y el software se introduce como apoyo para la solución de problemas, de tal forma que el estudiante pueda generar una practica constante de los ejercicios propuestos en el mismo software.

Como se mencionó anteriormente se presentaron a los estudiantes dos tipos de problemas a través del software educativo, uno a través del cual se debe calcular las raíces de la función polinómica para realizar la gráfica de la función y el segundo en el cual se dan los cortes con el eje x y se debe modelar la función.

La experiencia del estudiante se centra en el desarrollo de un conjunto de situaciones problemas de la función polinómica de los tipos de problemas que se mencionaron con anterioridad. A medida que el estudiante resuelve problemas la aplicación genera un registro digital del avance del estudiante, el cual será usado en la última fase de la investigación para generar las conclusiones acerca del aprendizaje por adaptación generado en el estudiante y determinar algunas tendencias en el grupo de estudiantes.

Luego, para determinar la experiencia del estudiante con la secuencia didáctica se debe realizar una prueba final (que se puede observar en los anexos) en la cual resuelva un problema de graficación y caracterización de la función polinómica, juntamente con otro ejercicio de modelación y graficación y realizar las siguientes preguntas clave:

1. ¿Qué es una función polinómica?
2. ¿Cómo se identifica una función polinómica?
3. ¿Haga una lista del proceso a seguir para graficar y caracterizar una función polinómica?
4. ¿Haga una lista del proceso a seguir para modelar una función polinómica?
5. ¿Cómo podemos determinar los intervalos positivos y negativos de la función, explique el proceso?
6. ¿Cómo se calcula el punto de corte de una función polinómica con el eje y?
7. Explique el siguiente resultado: En una función polinómica se evaluá un número $x = a$ y el resultado es cero.

6.3 Fase 3: Experimentación

La experimentación se llevo a cabo con estudiantes del programa de ingeniería civil del primer semestre de la Universidad del Quindío. Esta experimentación se ejecuto a través de la resolución de ejercicios en la aplicación mencionada en el análisis apriori (Funciones Polinómicas)

Esta aplicación lleva un registro de las actividades realizadas por los estudiantes. En este sentido se pudo evidenciar una participación masiva por parte de los estudiantes, tal como se muestra en la siguiente figura 6.61, una lista de clasificación de los estudiantes de acuerdo con el puntaje obtenido.


Clasificación del Juego

Puesto	Nombre	Diamonds	Coins	Cards	Rating
		Ordenar	Ordenar	Ordenar	Ordenar
1	Estudiante 1	254	$263.00	8	4.8
2	Estudiante 2	211	$24,207.00	19	4.41
3	Estudiante 3	205	$15,514.00	12	4.64
4	Estudiante 4	204	$22,284.00	18	4.7
5	Estudiante 5	201	$185.00	18	4.64
6	Estudiante 6	200	-$6,220.00	11	4.59
7	Estudiante 7	197	-$3,867.00	9	4.69
8	Estudiante 8	185	$2,800.00	3	4.94

Figura 6.61: Lista de clasificación del juego de funciones polinómicas

Los resultados, indican que por cada ejercicio resuelto el estudiante gana un diamante, así, algunos estudiantes realizaron hasta doscientos cincuenta y cuatro (254) ejercicios.

Por otra parte la aplicación cuenta con una opción para dejar comentarios, en la cual se obtuvieron los siguientes:

- Muy buena aplicación, nos ayuda a repasar el tema de funciones de una manera más didáctica. Me gustaría que las bonificaciones fueran más equitativas ya que en algunos ejercicios sencillos dan muchas coins pero en otros más complicados no tantas.
- Es un buen método y la aplicación esta muy completa, sin embargo, la parte de las tarjetas posee algunos errores, porque puedo comprar las tarjetas y el dinero no disminuye, no obstante no otorga los diamantes de recompensa.
- Muy bien, sin embargo hay veces que le oprimo "tirar" y no sale un ejercicio, eso es todo
- La aplicación esta muy bien diseñada me gusto muchísimo la dinámica de la actividad sin embrago deben de cambiar lo de la navegación no segura a segura
- Excelente para repasar y gracias a las diferentes dificultades de cada ejercicio, uno puede darse cuenta en que nivel está y que necesita para mejorar.
- La aplicación es muy buena y practica, pero un comentario para mejorar, seria que los ejercicios también obtengan signos negativos, por lo que mire se enfoca mas en los signos positivos.

Es de anotar que esta serie de comentarios, tiene que ver más con la parte técnica de la aplicación, y algunos muy pocos mencionan la utilidad que les ha dejado a nivel académico.

Además, al revisar los tipos de problemas que resolvieron los estudiantes se obtuvo la siguiente cuadro, en la cual se muestra una etiqueta por estudiante, y la cantidad de ejercicios que resolvió de forma correcta, tanto del problema de modelar una función polinómica a través de productos notables o multiplicación y el problema de calcular las raíces del polinomio a través del método de la división sintética.

Nombre	**Modelación de la Función Polinómica**	**Cálculo de las raices de la función polinómica dada**
Estudiante 1	69 %	93 %
Estudiante 2	86 %	96 %
Estudiante 3	74 %	82 %
Estudiante 4	86 %	97 %
Estudiante 5	31 %	100 %
Estudiante 6	100 %	100 %
Estudiante 7	76 %	100 %
Estudiante 8	96 %	96 %
Estudiante 9	94 %	90 %
Estudiante 10	100 %	100 %
Estudiante 11	50 %	0 %
Estudiante 12	89 %	100 %
Estudiante 13	100 %	0 %
Estudiante 14	100 %	100 %
Estudiante 15	100 %	100 %
Estudiante 16	100 %	100 %
Estudiante 17	67 %	100 %
Estudiante 18	85 %	100 %
Estudiante 19	97 %	99 %
Estudiante 20	75 %	100 %
Estudiante 21	75 %	100 %
Estudiante 22	67 %	100 %
Estudiante 23	60 %	87 %
Estudiante 24	100 %	0 %
Estudiante 25	89 %	100 %
Estudiante 26	86 %	100 %
Estudiante 27	0 %	88 %
Estudiante 28	100 %	100 %

Estudiante 29	100 %	100 %
Estudiante 30	100 %	100 %
Estudiante 31	98 %	100 %
Estudiante 32	82 %	100 %
Estudiante 33	80 %	100 %
Estudiante 34	85 %	95 %
Estudiante 35	0 %	95 %
Estudiante 36	56 %	92 %
Estudiante 37	100 %	100 %
Estudiante 38	85 %	97 %
Estudiante 39	25 %	60 %
Estudiante 40	94 %	100 %
Estudiante 41	100 %	100 %
Estudiante 42	93 %	100 %
Estudiante 43	94 %	75 %
Estudiante 44	100 %	100 %
Estudiante 45	50 %	100 %
Estudiante 46	69 %	95 %
Estudiante 47	100 %	0 %
Estudiante 48	78 %	100 %
Estudiante 49	91 %	0 %
Estudiante 50	73 %	92 %
Estudiante 51	100 %	100 %
Estudiante 52	80 %	100 %
Estudiante 53	100 %	100 %
Estudiante 54	65 %	0 %
Estudiante 55	91 %	100 %
Estudiante 56	83 %	100 %
Estudiante 57	83 %	0 %
Estudiante 58	92 %	94 %
Estudiante 59	100 %	89 %
Estudiante 60	62 %	94 %
Estudiante 61	100 %	100 %

Estudiante 62	84 %	96 %
Estudiante 63	82 %	100 %
Estudiante 64	96 %	0 %
Total	76.04 %	78.6 %

Al calcular el promedio de porcentaje de ejercicios correctos en ambos tipos de problema se concluye que a nivel promedio el setenta y siete por ciento (77.32 %) de los estudiantes resolvieron de forma correcta los ejercicios de ambos tipos de problema.

Además se ejecuto la secuencia didáctica elaborada en la fase de análisis apriori, en la cual se obtuvieron las respuestas de los estudiantes y que se mostrarán a continuación, detalladas por cada uno de los ejercicios.

6.3.1 Análisis de los resultados de la ejecución de la secuencia didáctica

Para realizar este análisis se toman las respuestas de cada uno de los estudiantes por cada tipo de ejercicio propuesto y se desarrolla un análisis cualitativo descriptivo y una estadística básica del ponderado de las respuestas. En cada caso se tomaron únicamente a cinco estudiantes para la ejemplificación, sin embargo, todos los registros y los análisis se pueden encontrar en el apéndice. A continuación se presenta cada uno de los ejercicios propuestos en la secuencia didáctica así como su respectivo análisis.

6.3.1.1 Ejercicio 1: Modelar una función polinómica

El estudiante tenia que resolver la siguiente tarea (Tomada textualmente del archivo de word, que se aconseja revisar en la sección de anexos, antes de continuar con la lectura):

- En la aplicación, generé un ejercicio de modelación que contenga tres (3) raíces, a continuación, tome un pantallazo del problema y lo pega en la caja. Ahora resuelva el problema usando multiplicación sintética o productos notables, tome una foto y péguela en el cuadro. Seguidamente escriba la función resultante en la caja. Resuelva el ejercicio en la aplicación agregando los coeficientes de la función, tome un pantallazo antes de enviar el ejercicio de los coeficientes escritos en la aplicación. Describa con sus palabras el proceso que realizo para resolver el ejercicio. Seguidamente use el método de la ley de los signos para saber cuáles son los intervalos positivos y negativos de la función, tome una foto al procedimiento y péguelo en el cuadro. Para terminar el ejercicio, calcule el corte de la función encontrada con el eje y, y escríbalo en la caja y realice la gráfica de la función a la cual le tomará una foto y la pegará en la caja.

Estudiante	**Respuesta**

Estudiante 1	Cuando nos dan las raíces de la función y hay que hallar la función polinómica. Primero; se debe de pasar la raíz al lado de la X y así esta quedar positiva. Segundo; se debe de realizar una tabla donde en el lado derecho se pondrán las raíces ya positivas y en la esquina superior izquierda de la tabla se pondrá el primer coeficiente (1). Tercero, se empieza a multiplicar la primera raíz que en este caso es $(+4)$ por el primer coeficiente (1) y el resultado se pone un espacio más debajo del (1) y uno a la derecha, seguido de esto, bajamos los coeficientes que nos quedaron $(1-4)$ a las casillas de la raíz de 12. Cuarto; una vez multiplicada la primera raíz continuamos con la segunda $(+12)$, se realiza el paso 3, multiplicar doce por el primer coeficiente (1, el resultado de la multiplicación se debe de poner debajo de 4 para después sumarlos) Quinto; una vez la raíz de doce multiplicada por los coeficientes se suman los dos resultados y estos mismos se ponen en las casillas de la raíz de $(+4)$ y se repiten los pasos. Una vez multiplicadas todas las raíces y sumados los coeficientes queda como resultado la función polinómica.
Estudiante 2	Para modelar este polinomio del cual nos dieron sus puntos de corte realice: 1.pasar los números que están después del $=$ de la$x$ a lado de ella para realizar **multiplicación sintética** y ya luego acomodé los resultados con sus respectivos x e índices.

Estudiante 3	Primero realizamos la **multiplicación sintética** para poder obtener la función, Luego se procedió a usar la **ley de los signos** para saber los intervalos negativos y positivos y graficamos.
Estudiante 4	Principalmente pase a sumar al otro lado los números que estaban restando, luego con los números ya despejados realice la **multiplicación con productos notables** para tener la función polinómica.
Estudiante 5	Genere un ejercicio de modelación, en este caso con 3 raíces, luego con los cortes que me dio, en primer lugar pase los cortes al lado de la X para poder hacer la **multiplicación sintética** y empecé a multiplicar cada uno de los términos hasta llegar a una ecuación final, además con los cortes en X encontré los **intervalos negativos y positivos** para luego graficar.

6.3.1.1.1. Conclusión del ejercicio 1 Una vez leídas las respuestas de los treinta y dos (32) estudiantes, se puede concluir que la mayoría mencionaron el término multiplicación sintética siendo este valor el $84.3\,\%$ de los estudiantes, para encontrar la función que tenia los cortes con el eje x. Por otra parte el $15.6\,\%$ usaron el método de los productos notables. Se debe mencionar que todos los estudiantes generaron diferentes problemas en la plataforma lo que permitió que cada uno de ellos abordará problemas diferentes. También se puede mencionar alrededor de nueve (9) ($15.6\,\%$) estudiantes mencionaron el método usado para determinar los intervalos positivos y negativos de la función (ley de los signos) y solo un estudiante realizo el cálculo del corte con el eje y y el cálculo del dominio y rango.

Estas conclusiones se obtienen al analizar cada una de las respuestas dadas por los estudiantes en el ejercicio uno (1).

6.3.1.2 Ejercicio 2: Modelar una función polinómica

En el ejercicio se pregunto por dos cuestiones: Cada estudiante debía describir con sus palabras que significan los intervalos positivos y negativos en la gráfica de la función.

- **Estudiante 1** Estos intervalos significan para la gráfica de la función si **crece** o **decrece**.
- **Estudiante 2** Esos intervalos en la gráfica significan si el comportamiento de la función, es decir si esta abre hacía arriba o abajo dependiendo si es positivo o negativo.
- **Estudiante 3** Significa que en la gráfica, los dos extremos o las dos puntas se van hacia el infinito positivo.
- **Estudiante 4** Los intervalos en la gráfica nos ayuda a saber el posicionamiento de la función porque sin ellos no sabríamos si la gráfica estaría en sentido positivo o negativo en el eje Y.
- **Estudiante 5** Estos intervalos son los que define si la gráfica está por arriba o por debajo del eje X es decir si es negativa$(-)$ o positiva $(+)$ entre cada uno de los puntos de corte.

Conclusiones del Ejercicio 2

Al revisar las respuestas de los estudiantes se ha concluido que solamente ocho (8) estudiantes que corresponden el $25\,\%$ tienen claridad acerca de los intervalos positivos y negativos de la función y cuál es su significado sobre la gráfica de la función.

6.3.1.3 Ejercicio: Conclusiones de Modelación

Para esta actividad se pregunta al estudiante:

- Explique cuál es la diferencia entre la gráfica de la función del ejercicio (1) con la gráfica del ejercicio (2)

- Si una función polinómica tiene cinco cortes con el eje x, cómo puede describir los intervalos positivos y negativos de la función.

- **Estudiante 1**

    - La diferencia entre la gráfica del primer y el segundo es que en la primera gráfica el intervalo es negativo de modo que esta viene de forma descendente, por el contrario, la segunda el intervalo es positivo por lo cual esta viene de forma ascendente. Otra diferencia que podemos notar es que la primera función tiene cuatro puntos de cortes y la segunda tiene tan solo tres.
    - Si la función tiene cinco cortes en el eje x, los intervalos pueden venir de manera ascendente, descendente, ascendente, descendente, y finalmente ascendente.

- **Estudiante 2**

    - Las diferencias que tienen las gráficas de la función del ejercicio (1) y (2) es la cantidad cortes en x lo cual afecta el comportamiento de la función dentro del intervalo negativo o positivo y cambia si abre de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba.
    - Sí una función polinómica tiene 5 cortes en el eje X, sus intervalos negativos se pueden presentar de este modo (El estudiante Anexa una imagen).

- **Estudiante 3**

- La diferencia entre estas dos gráficas es que no tienen los mismos puntos de corte en el eje x en la gráfica 1 una de sus puntas se va hacia el menos infinito y entre sus intervalos no tiene rebotes, en la gráfica 3 tiene rebotes entre sus intervalos y sus dos puntas se van hacia el infinito positivo.

- Eso depende del resultados de la tabla de valores de los intervalos.

- **Estudiante 4**

- La diferencia que se puede ver es que la primera función esta conformada por tres puntos de corte en el eje X por lo que la gráfica iniciara en un intervalo negativo, esto se puede apreciar en el cálculo de los intervalos positivos y negativos que es lo que nos da a conocer el comportamiento de la gráfica, mientras que la segunda al poseer cuatro puntos de corte con el eje X la gráfica iniciara en un intervalo positivo.
- Si una función polinómica tiene cinco cortes en el eje X sus intervalos serían: negativo, positivo, negativo, positivo, negativo, positivo.

- **Estudiante 5**

  - La diferencia que podemos encontrar entre las gráficas 1 y 2 es que en la gráfica 1 solo tiene 2 curvas y en la 2 tiene 3 curvas, debido que en la función original la primera es con 3 variables y en la segunda con 4 variable por lo que en los términos positivos y negativos también cambia.
  - Si en una función tiene 5 cortes con el eje x tendría 3 intervalos positivos y 3 negativos así, negativo, positivo, negativo, positivo, negativo, positivo.

Conclusiones de la comprensión de los cortes de la función versus intervalos positivos y negativos

Al revisar las respuestas de los estudiantes, se puede concluir que el $34.4\,\%$ de los estudiantes hicieron una clarificación sobre el comportamiento de los cortes de una función con sus intervalos positivos y negativos, explicando que sucede si la función tiene puntos con multiplicidad par.

6.3.1.4 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 1

En este ejercicio, se pidió al estudiante lo siguiente:

- Describa con sus palabras los pasos que uso para realizar la división sintética y que herramientas uso para calcular los divisores del término independiente.

- **Estudiante 1** Para poder realizar la división sintética, primero se deben de hallar los divisores del término independiente que es "18144". Estos divisores los halle con la utilización de la **calculadora**, en el modo de tabulación, una vez en el modo de tabulación allí coloque $f(x) =$ termino independiente, sustituí los valores y posterior a esto, elegí que calculara X los divisores desde menos diez hasta diez, seguidamente calcule los divisores que me dieran 0 en la función. Con los divisores listos di inicio a la división sintética. Para la división sintética; Primero; en la fila superior coloque los coeficientes del polinomio y a la derecha de estos el primer divisor (-3). Segundo; baje el primer coeficiente (1) y multiplique el divisor por este mismo. Tercero; el resultado de la multiplicación (-3) lo puse debajo del segundo coeficiente (34) y posterior a esto resté los términos dando como resultado (31). Cuarto; una vez finalizada la resta se realiza de nuevo el segundo paso que es multiplicar el divisor que tenemos en este momento (-3) por el resultado de a resta (31). Quinto; el resultado de la multiplicación se pone debajo del tercer coeficiente (454) y se restan los términos. Sexto; se debe de realizar los pasos ya mencionados hasta llegar al termino 0, seguido de esto realizar el mismo procedimiento con todos los divisores del término independiente y llegar al mismo resultado 0.

- **Estudiante 2** Primero encontré los divisores del termino independiente. Luego puse la función en la calculadora e identifiqué cuales **evaluaban la función en cero**. Empecé a dividir hasta que me quedara un 1 y un 0 y ahí ya supe que había terminado (Para hallar los divisores del termino independiente dividí el número y tomaba los números que dividían a este a un número entero).

- **Estudiante 3** Primero escogí la ecuación luego se procede a sacar los divisores del término independiente (el número que no está acompañado de la x) y se comienza a buscar un numero sea positivo o negativo, que al multiplicarlos con toda la ecuación llegue al resultado de 0 y así buscamos todos los ceros de la ecuación , se utilizó **calculadora** , lápiz #2 y 2 borradores.

- **Estudiante 4** Inicialmente, para hacer la división sintética se debe calcular los divisores del término independiente, después remplazamos en "X" de la función los divisores del termino independiente y los que nos den como resultado cero son los valores que vamos a usar como los valores de corte en "X", en este caso se tiene que usar nuevamente los divisores ($y - 2$) para que al final nos de 1 y 0.

- **Estudiante 5** Para realizar la división, primero saque todos los divisores del termino independiente de la ecuación, luego coloque toda la ecuación sin las Xs en una tabla y empecé a evaluar uno por en la ecuación los divisores encontrados. Para encontrar los divisores del termino independiente utilicé la **calculadora** en el modo tabla.

6.3.1.4.1. Conclusiones del ejercicio 3 parte 1 Las respuestas dadas por los estudiantes se pueden clasificar en cuatro (4) grupos, estos son: (1) Cálculo de los divisores, que en un porcentaje de $84.3\,\%$ de las respuestas se menciona su cálculo, seguidamente (2) Se usa la calculadora para realizar la evaluación, en donde los estudiantes mencionaron en sus respuestas con unos porcentajes de $50\,\%$ para el uso de la calculadora y $25\,\%$ para la evaluación de la función en los divisores encontrados, y finalmente (3) $75\,\%$ de los estudiantes mencionaron que realizaron la división sintética para determinar los cortes de la función con el eje x.

Por otra parte, algunas respuestas indican que utilizaron dispositivos de graficación para encontrar los puntos de corte de la función y no realizaron los pasos habituales para caracterizar la función, los cuales son: (1) calcular los divisores del termino independiente, (2) evaluar la función en los términos independientes para determinar en cuáles valores la función se hace cero, y (3) realizar la división sintética (como paso de comprobación).

6.3.1.5 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 2

En este ejercicio, se pidió al estudiante lo siguiente:

- Explique porque las raíces del polinomio se calculan de los divisores del término independiente.

- **Estudiante 1** Las raíces del polinomio se deben de calcular con el termino independiente porque al multiplicarse la raíz por el divisor y restar su resultado será cero.

- **Estudiante 2** Las raíces del polinomio se calculan del término independiente porque al darle un valor en la calculadora a x con los divisores del independiente esta debe dar cero.

- **Estudiante 3** Podemos decir que las raíces enteras de un polinomio de coeficientes enteros serán divisores del término independiente.

- **Estudiante 4** Principalmente se usa el termino independiente porque no tiene ninguna parte literal y no esta elevado a una potencia por lo cual se le pueden encontrar sus divisores estos nos permitirán descomponer los polinomios en factores y va a ser más fácil hacer la división de polinomios.

- **Estudiante 5** Ya que el termino independiente es el único valor en la ecuación que se encuentra sin X y sin potencia, por lo cual a este le sacamos los divisores, además este es el punto de intersección con el eje Y.

6.3.1.5.1. Conclusiones del ejercicio 3 parte 2 Si bien en este ejercicio se esperaba encontrar un razonamiento que mostrará que el producto de la raíces generá el término independiente, solamente un estudiante logra identificar este aspecto pero no con mucha claridad. Otro grupo determina que dentro de los divisores del término independiente se encuentran las raíces y un poco mas alejados de concepto otro grupo de estudiantes mencionan que el término independiente tiene esta naturaleza porque no esta acompañado de la variables x o porque no están elevado a la potencia. En este sentido se puede estimar que aproximadamente la tercera parte del grupo tiene alguna claridad de la función del término independiente en la función polinómica.

6.3.1.6 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 3

En este ejercicio, se pidió al estudiante lo siguiente:

- Explique con sus palabras cuáles elementos tiene en cuenta para realizar la gráfica de la función.

- **Estudiante 1** Los elementos que tengo en cuenta para realizarla gráfica de una función son; los cortes en el eje X, los intervalos para saber si crece o decrece la gráfica y el corte en el eje Y.

- **Estudiante 2** Para graficar la función tengo en cuenta los puntos de corte tanto del eje x como de eje y, además los intervalos positivos y negativos .

- **Estudiante 3** Se gráfica según el resultado del cálculo de intervalos positivos y negativos usando la ley de los signos, en este caso rebotaría porque hay dos signos positivos seguidos.

- **Estudiante 4** Para realizar la gráfica los datos que se tienen que tener en cuenta es: los cortes con ele eje X obtenidos en la división sintética y el valor de corte en Y que se lo obtiene de remplazar X por "0" en la función.

- **Estudiante 5** Para realizar la gráfica de la función tengo en cuenta los siguientes elementos: las raíces o puntos de intersección con eje X y su ubicación, los intervalos positivos y negativos encontrados a través de la ley de signos en un tabla y el punto de intersección con el eje Y.

6.3.1.6.1. Conclusiones del ejercicio 3 parte 3 A nivel general se observa que la mayoría de los estudiantes llega a la misma idea o conclusión, y es una serie de pasos para realizar la gráfica de la función polinómica, obtener los cortes con el eje x, obtener el corte con el eje y y determinar los intervalos positivos y negativos de la función.

6.3.1.7 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 4

En este ejercicio, se pidió al estudiante lo siguiente:

- Explique con sus palabras un proceso completo para caracterizar y graficar una función polinómica.
- **Estudiante 1** Para caracterizar y graficar una función polinómica se debe de tener como mínimo ya sea una función de la forma; $f(x) = xn + xn - xn - xn + xn \ldots$ x, o las raíces de esta. Cuando se tiene la forma $f(x) = xn + xn - xn - xn + xn \ldots$ x se puede resolver mediante multiplicación sintética o factorización. Mediante la cual se va a buscar los divisores del término independiente y así sacar las raíces, una vez estén las raíces se empezará la multiplicación sintética. Una vez que todas las raíces hallan sido multiplicadas por el coeficiente y todas den cero se procede a sacar los intervalos negativos y positivos para saber como la gráfica viene, de manera creciente o decreciente. Una vez estén listos los intervalos se procede a graficar donde las raíces del termino independiente serán los cortes en el eje x y el termino independiente será el corte en el eje y.
- **Estudiante 2** Para caracterizar una función polinómica primero se debe identificar el termino independiente encontrar sus divisores, realizar una evaluación de que divisores evalúan la función en cero, realizar la división sintética con estos, cuando la división termine en 1 y 0 ya comprobamos que esta correcta, para graficar tomamos esos números con los que realizamos la división ya que estos son los cortes en x y estos los ponemos con en la tabla de intervalos positivos con el número expresado x\ge# y ya con esto sabemos el comportamiento

de la función entre un número y otro , luego para hallar el corte en y ponemos en la f(X)x=0 y el resultado que nos va dar es el corte en y .

- **Estudiante 3** paso 1 se saca los divisores del termino independiente paso 2 se multiplica (se suma o se resta dependiendo del signo) paso 3 saca el resultado de los puntos de corte en el eje x y se hace la tabla de cálculo de intervalos positivos y negativos usando la ley de los signos paso 4 se gráfica según los signos resultados de la tabla.

- **Estudiante 4** El proceso para realizar una función polinómica es: obtener los divisores del término independiente, luego remplazar estos divisores por X en la función para obtener los valores del corte con el eje "X", después se hace la división sintética con los valores anteriormente obtenidos, el paso siguientes es obtener el punto de corte con el eje Y remplazando la X de la función por "0" y finalmente hacer la tabla de los intervalos positivos y negativos para poder saber cómo será el comportamiento de la gráfica.

- **Estudiante 5** Para caracterizar y graficar una función polinómica, en primer instancia debemos sacar los divisores al termino independiente de la ecuación, luego de tener los divisores realizo la división sintética evaluando cada uno de los divisores encontrados en la ecuación y los que dan cero (0) son las raíces o puntos de intersección en el eje X, encuentro los intervalos positivos y negativos de la ecuación a través de la ley de signos para saber cómo hacer la gráfica, para graficar debo ubicar los puntos de corte o raíces poniendo atención a los intervalos positivos y negativos, además de ubicar el punto de intersección en el eje Y que es el termino independiente de la ecuación.

6.3.1.7.1. Conclusiones del ejercicio 3 parte 4 De forma muy similar a la parte tres (3) los estudiantes resumen en algunos pasos importantes la forma de graficar y caracterizar una función polinómica. Algunos estudiantes tienen claro los nombres de los procesos, tal como: Ley de los signos, raíces del polinomio, término independiente, intervalos positivos y negativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, al igual que el nombre de las herramientas que deben usar para estos cálculos como lo son la división sintética, la multiplicación sintética o los productos notables.

6.3.1.8 Resultados de la fase de Experimentación

Como se ha mencionado desde los antecedentes y la metodología, esta investigación, se enmarca en una metodología cualitativa, como lo es la ingeniería didáctica, además, revisando constantemente el título de la investigación (mejoramiento del proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de la ejercitación en un juego computarizado) y el objetivo general (mejorar el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de la ejercitación en un juego computarizado.) se puede concluir que en esta fase de experimentación se logró llevar a cabo este objetivo, puesto que se presento a los estudiantes una herramienta por medio de la cual pudieran desarrollar a través de la práctica el concepto de función polinómica, en dos tipos de ejercicios, el primero modelar la función polinómica a través de las raíces y el segundo determinar las raíces de una función polinómica dada.

En este sentido, y después de realizar un análisis de los ejercicios resueltos de forma correcta por los estudiantes en cada tipo de problema se concluye que a nivel promedio el setenta y siete por ciento (77.32 %) de los estudiantes resolvieron de forma correcta los ejercicios de ambos tipos de problema.

Por otra parte se implementó a través de la secuencia didáctica, sobre los estudiantes que generaran situaciones adidácticas de acción, es decir que estuvieran constantemente reinterpretando la solución del ejercicio para conseguir un puntaje correcto en el juego.

6.4 Fase 4: Análisis aposteriori

Este fase, es la última de la investigación, en la cual se pretende determinar todos los procesos que se realizaron en la ejecución de la investigación.

Hasta este punto se ha desarrollado el análisis preliminar, el análisis apriori y la experimentación, y se debe dar cuenta de todo este proceso para conseguir las conclusiones mas relevantes de la investigación, de tal forma que a continuación se mostraran las conclusiones obtenidas en cada una de las fases anteriores con la finalidad de observar la estructura general conseguida hasta este punto y de esta forma generar las conclusiones finales

6.4.1 Conclusión de los antecedentes

En cuanto a los antecedentes, Rodríguez, Romero y Vergara 2017 en su investigación realizan una reflexión acerca del uso de las TIC por los Ministerios de Educación Nacional. Según el autor se realiza muchos esfuerzos para incluir las TIC, pero pocos para tratar de armonizar el contenido disciplinar con la misma. También, Arango (2013) argumenta y justifica el objetivo de esta investigación al incorporar herramientas TIC para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas. Por otra parte, Irazoqui (2015) a través de su propuesta determinó que el diseño de actividades modulares permite una mejor aprehensión de los conceptos, es decir, enfocándose únicamente en la resolución de una tarea particular, como lo es la graficación y modelación de funciones polinómicas, lo que permitido modularizar las tareas propuestas a los estudiantes y realizar un análisis cualitativo de cada una de las tareas.

6.4.2 Conclusiones de la fase de análisis preliminar

El análisis preliminar, corresponde a la primera fase de la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue y col., 1995). En esta fase se han desarrollado una serie de descripciones y análisis que permiten a la investigación un panorama general del estado del arte del problema de investigación a nivel conceptual, didáctico y tecnológico. Para detallar, en esta fase, se realizó una descripción breve acerca de la epistemología del concepto de graficación (caracterización) y modelación de funciones polinómicas y cómo a través de la historia, el concepto a tomado importancia desde la aplicación de soluciones de ecuaciones cuadráticas con los babilónicos y egipcios, hasta la época moderna con la aplicación de fórmulas y métodos para la solución de ecuaciones polinómicas (De Lucas, 1996; Gonzales, 2010; Pérez, 2011; Pérez, 2017; Molina, 2018; León, 2022).

Por otra parte, en la descripción de algunos libros de texto (Prado y col., 2006; Pérez, 2008; Espinosa y col., 2009; Galván y col., 2006; Rivera, 2014) se evidencio que la mayoría de los libros de cálculo diferencial y precálculo realizan una breve introducción a los conjuntos numéricos, procesos algebraicos y llegan directamente al concepto de función, iniciando por la función lineal, cuadrática, cúbica y generalizando algunas características para las funciones polinómicas.

Además desde la dimensión tecnológica, autores como (Quintero y col., 2005; Arroyo, 2006) muestran algunas características y descripciones que debe adoptar el software educativo, permitiendo distinguir, de algunos de estos consultados explicar porque no adquieren la categoría de software educativo, si no más bien de simples visualizadores de funciones, permitiendo así incorporar y describir el software educativo (aplicación web) diseñada por (Rincón, 2021) para la llevar a cabo la fase de la experimentación en ésta investigación.

También se desarrolló una descripción de algunos videos encontrados en la plataforma youtube encontrando que en su gran mayoría se reduce a la trasmisión del conocimiento y la explicitación de las técnicas necesarias para resolver los ejercicios propuestos entorno a la problemática planteada, graficación (caracterización) y modelación de funciones polinómicas.

Por último, se desarrolló una prueba diagnóstica con un grupo de veintiocho estudiantes en la cual se determinó que los procesos en los cuales los estudiantes tienen falencias tiene que ver con la determinación de la paridad de la función, el cálculo de los intervalos positivos y negativos de la función y la comprensión de cómo usar los parámetros dados en la función para plasmar la gráfica de la función en un lienzo bidimensional.

6.4.3 Conclusiones del Análisis Apriori

En el análisis apriori, se debe generar un instrumento que de cuenta de la concepción del docente/investigador (Artigue y col., 1995) acerca de cómo los estudiantes llegaran al concepto de función polinómica, tanto en la graficación y caracterización como en la modelación de la función. Por ello es importante resaltar que el concepto que se debe descomponer en actividades que permitan al estudiante generar un conocimiento en contexto partiendo de las situaciones adidácticas (Brousseau, 2007). En la siguiente imagen se observa como se descompone el concepto de función polinómica para lograr generar una secuencia de actividades que le permitan al docente/investigador imprimir una intención sobre el conjunto de situaciones adidácticas propuesta al estudiante y por medio de la cual se construye el conocimiento en contexto.

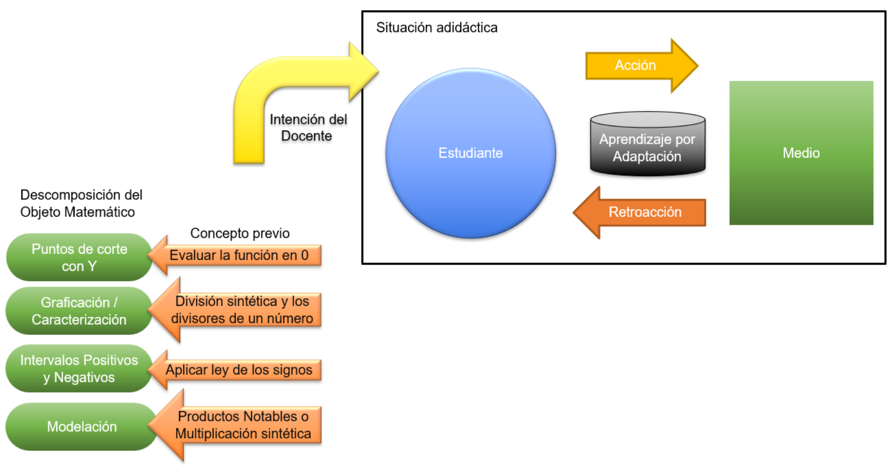


Figura 6.62: Descomposición del objeto matemático teniendo en cuenta la situación adidáctica

Por tanto la descomposición lograda se describe de la siguiente manera:

1. Punto de corte con el eje y en el cual debe tener como conocimiento previo la evaluación de funciones.

2. Caracterización de la función a través del método del cálculo de la raíces usando los divisores del término independiente y la división sintética.

3. La determinación de los intervalos positivos y negativos a través del método de la ley de los signos.
4. La modelación de la función a través de productos notables, multiplicación de binomios o multiplicación sintética.

En este sentido se dio origen a la secuencia didáctica que permite paso a paso orientar al estudiante en la resolución de ejercicios generados por el software y conocer cómo el estudiante interpreta la situación y la soluciona con respecto a los conocimientos previos.

6.4.4 Conclusiones de la Experimentación

En este fase se ejecuto una secuencia didáctica con los estudiantes (ver anexos) en la cual participaron treinta y dos (32) estudiantes, y a partir de las respuestas dadas en los apartes de la misma secuencia se obtuvieron los siguientes resultados.

Una vez leídas las respuestas de los treinta y dos (32) estudiantes, se puede concluir que la mayoría mencionaron el término multiplicación sintética siendo este valor el $84.3\,\%$ de los estudiantes, para encontrar la función que tenia los cortes con el eje x. Por otra parte el $15.6\,\%$ usaron el método de los productos notables. Se debe mencionar que todos los estudiantes generaron diferentes problemas en la plataforma lo que permitió que cada uno de ellos abordará problemas diferentes. También se puede mencionar alrededor de nueve (9) ($15.6\,\%$) estudiantes mencionaron el método usado para determinar los intervalos positivos y negativos de la función (ley de los signos) y solo un estudiante realizo el cálculo del corte con el eje y y el cálculo del dominio y rango. Estas conclusiones se obtienen al analizar cada una de las respuestas dadas por los estudiantes en el ejercicio uno (1).

Además, al revisar las respuestas de los estudiantes se ha concluido que solamente ocho (8) estudiantes que corresponden el $25\,\%$ mencionan en sus descripciones la comprensión de los los intervalos positivos y negativos de la función y cuál es su significado sobre la gráfica de la función. También, al revisar las respuestas de los estudiantes, se puede concluir que el $34.4\,\%$ de los estudiantes hicieron una clarificación sobre el comportamiento de los cortes de una función con sus intervalos positivos y negativos, explicando que sucede si la función tiene puntos con multiplicidad par.

Así mismo, las respuestas dadas por los estudiantes se pueden clasificar en cuatro (4) grupos, estos son: (1) Cálculo de los divisores, que en un porcentaje de $84.3\,\%$ de las respuestas se menciona su cálculo, seguidamente (2) Se usa la calculadora para realizar la evaluación, en donde los estudiantes mencionaron en sus respuestas con unos porcentajes de $50\,\%$ para el uso de la calculadora y $25\,\%$ para la evaluación de la función en los divisores encontrados, y finalmente (3) $75\,\%$ de los estudiantes mencionaron que realizaron la división sintética para determinar los cortes de la función con el eje x.

Por otra parte, algunas respuestas indican que utilizaron dispositivos de graficación para encontrar los puntos de corte de la función y no realizaron los pasos habituales para caracterizar la función, los cuales son: (1) calcular los divisores del termino independiente, (2) evaluar la función en los términos independientes para determinar en cuáles valores la función se hace cero, y (3) realizar la división sintética (como paso de comprobación). En cuanto al concepto de término independiente, si bien, en este ejercicio se esperaba encontrar un razonamiento que mostrará que el producto de la raíces generá el término independiente, solamente un estudiante logra identificar este aspecto pero no con mucha claridad. Otro grupo determina que dentro de los divisores del término independiente se encuentran las raíces y un poco mas alejados de concepto otro grupo de estudiantes mencionan que el término independiente tiene esta naturaleza porque no esta acompañado de la variables x o porque no están elevado a la potencia. En este sentido se puede estimar que aproximadamente la tercera parte del grupo tiene alguna claridad de la función del término independiente en la función polinómica.

A nivel general se observa que la mayoría de los estudiantes llega a la misma idea o conclusión, y es una serie de pasos para realizar la gráfica de la función polinómica, obtener los cortes con el eje x, obtener el corte con el eje y y determinar los intervalos positivos y negativos de la función. De forma muy similar a la parte tres (3) los estudiantes resumen en algunos pasos importantes la forma de graficar y caracterizar una función polinómica. Algunos estudiantes tienen claro los nombres de los procesos, tal como: Ley de los signos, raíces del polinomio, término independiente, intervalos positivos y negativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, al igual que el nombre de las herramientas que deben usar para estos cálculos como lo son la división sintética, la multiplicación sintética o los productos notables.

Como se ha mencionado desde los antecedentes y la metodología, esta investigación, se enmarca en una metodología cualitativa, como lo es la ingeniería didáctica (Artigue y col., 1995), se puede concluir que en esta fase de experimentación se logro llevar a cabo el objetivo general, puesto que se presento a los estudiantes una herramienta por medio de la cual pudieran desarrollar a través de la práctica el concepto de función polinómica, en dos tipos de problemas, el primero modelar la función polinómica a través de las raíces y el segundo determinar las raíces de una función polinómica dada.

En este sentido, y después de realizar un análisis de los ejercicios resueltos de forma correcta por los estudiantes en cada tipo de problema se concluye que a nivel promedio el setenta y siete por ciento (77.32 %) de los estudiantes resolvieron de forma correcta los ejercicios de ambos tipos de problema. Por otra parte se implemento a través de la secuencia didáctica sobre los estudiantes que generaran situaciones adidácticas de acción, es decir que estuvieran constantemente reinterpretando la solución del problema para conseguir un puntaje correcto en el juego.

6.4.5 Resultados de la fase de análisis aposteriori y evaluación

Una vez consolidadas las conclusiones a través de la investigación se puede decir que el concepto de función polinómica y los procesos de graficación y caracterización en algunos casos sigue siendo un proceso tradicional, y que en algunas investigaciones como se ha mostrado en el estado del arte (Artigue y col., 1995; Posada y Villa, 2006; Cuicas y col., 2007; López, 2008; Pizarro, 2009; Arguedas, Coto y Trejos, 2010; Guevara, 2011; Arango, 2013; Aedo y Cabrera, 2013; Roumieu, 2014; Irazoqui, 2015; Pérez, 2015; Narváez, 2015; Rodríguez, Romero y Vergara, 2017) se ha tratado de incorporar herramientas TIC para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo se debe tener en cuenta que en la actualidad se han desarrollado muchas herramientas TIC y que cada una de ellas esta categorizada en un grupo diferente según su utilidad, herramientas para enseñar, herramientas para aprender y herramientas para enseñar y aprender.

Desde esta investigación se ha determinado que las herramientas para enseñar son aquellas en las que el docente puede realizar construcciones, animaciones y en las que le puede mostrar al estudiante como se va generando un concepto. Estas herramientas no son adecuadas para usarse en una situación adidáctica, puesto que el estudiante debe aprender en primer lugar conceptos técnicos del software que le pueden generar otros problemas aparte del que ya se tiene acerca del concepto a aprender.

En este sentido las herramientas para aprender son aquellas en las cuales los conceptos están todos disponibles y el estudiante únicamente esta manipulando el concepto a través de sus diferentes representaciones. Así en esta investigación se hizo uso de una herramienta Online diseñada por el Grupo de Estudio y Desarrollo de Software de la Universidad del Quindío, en la cual el estudiante se debe registrar y operar con ejercicios de graficación y caracterización de funciones polinómicas en forma directa e inversa.

Por otra parte desde el análisis preliminar se evidenciaron algunos elementos importantes para la consolidación del concepto de función polinómica, sobre todo las herramientas matemáticas usadas para construir y caracterizar las funciones, como lo son, la división sintética, la multiplicación sintética, los productos notables y la ley de los signos. Estos elementos han sido evidenciados desde el análisis de clases tradicionales y los libros de texto.

Una vez contemplados estos elementos se diseño una secuencia didáctica en la cual haciendo uso de la herramienta TIC se pregunta al estudiante por un proceso modular que le permite poco a poco llegar al concepto de función polinómica, tanto en su caracterización como graficación que se pudo evidenciar en las respuestas obtenidas durante la fase de experimentación y sobre la cual se puede decir que los estudiantes presentaron argumentos que demuestran la adquisición del concepto.

Capítulo 7

Conclusiones y resultados de la investigación

En todo proceso de investigación en educación matemática se inicia con una revisión bibliográfica del estado del arte y/o los antecedentes en torno al problema de investigación.

Autores como (Artigue y col., 1995; Posada y Villa, 2006; Cuicas y col., 2007; López, 2008; Pizarro, 2009; Arguedas, Coto y Trejos, 2010; Guevara, 2011; Arango, 2013; Aedo y Cabrera, 2013; Roumieu, 2014; Irazoqui, 2015; Pérez, 2015; Narváez, 2015; Rodríguez, Romero y Vergara, 2017) han desarrollado investigaciones en educación matemática, ya sea usando la metodología de la ingeniería didáctica, aplicando la teoría de las situaciones didácticas o simplemente aplicando algún modelo de uso de las TIC como medio para lograr el aprendizaje.

Esto permitió desarrollar en cada fase, bajo un objetivo y planteamiento específico como los siguientes:

1. Analizar el efecto de la enseñanza tradicional en el aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas, a través del análisis de libros de texto, practicas pedagógicas y conocimientos previos de los estudiantes

En este sentido, este objetivo se logró y se responde, a través del análisis de diferentes dimensiones en las que se relacionan los elementos didácticos y pedagógicos en el aprendizaje del concepto de graficación y modelación de las funciones polinómicas. Asi, por ejemplo, a través de los análisis preliminares de la investigación autores como De Lucas (1996); Segovia (2009); Gonzales (2010); Pérez (2011); Pérez (2017); Molina (2018); León (2022) muestran la importancia de la concepción de las funciones polinómicas a través de la historia, y cómo diferentes civilizaciones y momentos en el tiempo han permitido que este concepto se desarrolle hasta este tiempo, consiguiendo métodos y procesos que permiten a los estudiantes crear un esquema complejo y dinámico para la resolución de ejercicios en otros ambitos del saber disciplinar.

Además, en la mayoría de los libros analizados, inician con el concepto de número real, luego se introducen algunas operaciones básicas con números reales, y posteriormente, se hace la introducción a las funciones, por lo general pasando en primer lugar por la función lineal, luego la función cuadrática, en ambos casos mostrando como graficar y como modelar estas funciones a través de sus puntos característicos. Posteriormente y dando por hecho que el estudiante ya tiene como conceptos previos la factorización, productos notables y división sintética se procede a enseñar el concepto de función polinómica. Solo en uno de los libros se realiza una caraterización de varios tipos de funciones, antes de llegar al concepto de función polinómica. Esto da ha entender que en la mayoría en los textos guía de cálculo diferencial, se expone el concepto de función polinómica, iniciando en su orden, función lineal, función cuadrática y función polinómica.

Por otra parte, y en concordancia con el uso adecuado de las TIC (Quintero y col., 2005; Arroyo, 2006; Pérez, 2015) y el cambio de modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje (Delgado, 2019) se observa que aún hay algunos agentes del entorno educativo que no aceptan el cambio de paradigma o modelo de construcción del conocimiento, y en los libros de texto en las clases tradicionales se plasma el modelo de trasmisión de conocimientos, dilucidando los resultados que se obtienen en las evaluaciones en las aulas de clase.

En ese sentido el tipo de herramientas TIC que se pueden usar en el aula con los estudiantes, se describen en (Arroyo, 2006) que propone esta categorización así: **(1)** software educativo para enseñar, **(2)** software educativo para evaluar y **(3)** software educativo para validar.

Por otra parte es importante resaltar como lo argumentan Rodríguez, Romero y Vergara (2017), que el Ministerio de Educación Nacional resalta la importancia del uso de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y aunque se realizan muchos esfuerzos por incluir estas tecnologías en el aula, hay pocos esfuersos por armonizar estas tecnologías con el contenido disciplinar y más importante un método eficaz para lograrlo.

Finalmente el análisis se concluye con la prueba diagnóstico en la cual se determinó que los estudiantes presentaron falencia en la determinación de los intervalos positivos y negativos de la función, y en la graficación y caracterización de la función.

2. Describir una estrategia o método, para dise ñar una secuencia didáctica, en el marco de las situaciones didácticas de Brousseau, para el aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas, a través de la resolución de ejercicios en un juego computarizado.

   En cuanto a la descripción de una estrategía o método para diseñar una secuencia didáctica se concluyó que, a través del análisis del flujo de información, en la secuencia didáctica, el investigador observó, qué situaciones de acción priviligiar para la concepción de ejercicios, que permitan la adquisición del conocimiento por adaptación al medio.

En este sentido, se debe generar un instrumento que de cuenta de la concepción del docente/investigador (Artigue y col., 1995), acerca de cómo los estudiantes llegaron al concepto de función polinómica, tanto en la graficación y caraterización como en la modelación de la función. Por ello es importante, resaltar que el concepto se debe descomponer, en activadades, que permitan al estudiante generar un conocimiento en contexto, partiendo de las situaciones adidácticas (Brousseau, 2007).

Es decir, que es necesario, proponer un plan que permita, concebir una estrategia que le de lugar a los estudiantes a aprender y elaborar esquemas completos, complejos y dinámicos, en sus modelos o estructuras mentales (Jaimes, Chaves y Vargas, 2017). Es así como se resalta la importancia, de realizar un análisis del objeto matemático estudiado, y realizar una descomposición genética del mismo (Jaimes, Chaves y Vargas, 2017), que permita la construcción clara y precisa de una secuencia didáctica que oriente el proceso de aprendizaje.

3. Identificar y categorizar los avances obtenidos por los estudiantes en la implementación de una secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje de la graficación y modelación de funciones polinómicas a través de la ejercitación en un juego computarizado

   Como se muestra a continuación, el término **multiplicación sintética** fue usado por el $84.3\,\%$ de los estudiantes, para encontrar la función que tenia los cortes con el eje x. Por otra parte el $15.6\,\%$ usaron el método de los **productos notables**. Se debe mencionar que todos los estudiantes generaron diferentes ejercicios en la plataforma lo que permitió que cada uno de ellos abordará ejercicios diferentes, también se puede mencionar, que alrededor, de nueve (9) estudiantes que corresponden al ($15.6\,\%$) mencionaron el método usado, para determinar los intervalos positivos y negativos de la función **(diagrama de signos),** y solo un estudiante realizó el cálculo del corte con el eje y y el cálculo del dominio y rango.

   Además, únicamente ocho (8) estudiantes que corresponden al $25\,\%$, tienen claridad acerca de los intervalos positivos y negativos y cuál es su significado sobre la gráfica de la función, de la misma forma, el $34.4\,\%$ de los estudiantes hicieron una clarificación sobre el comportamiento de los cortes de una función, con sus intervalos positivos y negativos, explicando, qué sucede si la función tiene puntos con multiplicidad par.

Por otra parte, las respuestas dadas por los estudiantes en los ejercicios de caracterización de una función polinómica, se pueden clasificar en tres (3) grupos, estos son: **(1) Cálculo de los divisores**, que en un porcentaje de $84.3\,\%$ de las respuestas se menciona su método de cálculo, **(2) Uso la calculadora** para realizar la evaluación, en donde el $75\,\%$ de los estudiantes mencionaron su uso para evaluar la función y el $25\,\%$ para el cálculo de los divisores encontrados, y finalmente **(3) División sintética**, el $75\,\%$ de los estudiantes mencionaron que realizaron la división sintética para determinar los cortes de la función con el eje x.

Además, en el ejercicio de caracterización de la función polinómica, se esperaba encontrar un razonamiento que mostrará, que el producto de la raices genera el término independiente, solomente un estudiante logra identificar este aspecto, pero, no con mucha claridad. Otro grupo determina que, dentro de los divisores del término independiente, se encuentran las raices, y un poco mas alejados de concepto, otro grupo de estudiantes mencionan que el término independiente tiene esta naturaleza, porque no esta acompañado de la variables x, o porque no estan elevado a la potencia. En este sentido se puede estimar que aproximadamente la tercera parte del grupo, tiene alguna claridad de la función del término independiente en la función polinómica.

4. Evaluar los resultados obtenidos en el análisis preliminar, análisis a priori y la implementación de la secuencia didáctica a través de un método de análisis cualitativo.

Así, una vez concluidas las tres fases anteriores, se determinó, como se ha mencionado desde los antecedentes y la metodología, esta investigación, se enmarca en una metodología cualitativa, como lo es la ingeniería didáctica, así, se puede concluir que se logró en cierta medida el objetivo general **"diseñar una situación adidáctica para el aprendizaje de la modelación de funciones polinómicas a través de la resolución de ejercicios en un juego computarizado"**, puesto que se presentó a los estudiantes una herramienta por medio de la cual pudieran desarrollar a través de la práctica el concepto de función polinómica, en dos tipos de ejercicios, el primero modelar la función polinómica a través de las raices y el segundo determinar las raices de una función polinómica dada.

En este sentido, y despúes de realizar un análisis de los ejercicios resueltos de forma correcta por los estudiantes en cada tipo de problema se concluye que a nivel promedio el setenta y siete por ciento (77.32 %) de los estudiantes resolvieron de forma correcta los ejercicios de ambos tipos de problema.

Referencias

Advíncula, E. (2020). *Análisis a priori de una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial a estudiantes de las carrreras de humanidades, en el nivel superior*. Pontificia Universidad Católica del Perú. URL: http://funes.uniandes.edu.co/17063/1/Advincula2010Analisis.pdf.

Aedo y Cabrera (2013). "El aprendizaje del cálculo diferencial mediante el uso de un software multimedia". En: *Revista de la facultad de ciencias económicas* 10.3, págs. 1-7.

Arango, J. (2013). *Implementación de tecnologías de la información y la comunicación en el proceso enseñanza y aprendizaje de la asignatura de cálculo diferencial*. Tésis de Maestría. Universidad de Manizales, Manizales.

Arguedas, Coto y Trejos (2010). *Propuesta para la enseñanza del cálculo utilizando las TICs como recurso didáctico en el curso MA-1210*. Tesis de Pregrado. Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

Arroyo, F. (2006). "Software educativo y colaborativo para el aprendizaje de la asignatura Tecnología Didáctica I". En: *Omnia* 12.3, págs. 109-122.

Artigue, M. y col. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Universidad de los Andes, Bogotá: Grupo editorial iberoamericana. URL: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf.

Bahamonde, S. y J. Vicuña (2011). *Resolución de problemas matemáticos*. Universidad de Magallanes - Chile. URL: http://www.umag.cl/biblioteca/tesis/bahamonde_villarroel_2011.pdf.

Briceño, E y L. Alamillo (2017). "Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria". En: *IE Revista de Investigación*

Educativa de la REDIECH 8.15, págs. 111-131. URL: https://www.redalyc.org/journal/5216/521653370008/html/.

Briceño, O. (2014). *Una secuencia de modelación para la introducción significativa de la función cuadrática.* Instituto politécnico nacional, México.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Primera edicación en frances, 1998. Grenoble, Francia: La Pensée.

– (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Traducido por Dilma Fregona. Libros del Zorzal.

Castañeda, A., A. Rodas y J. Molina (2012). "Institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas". En: *Red de Revistas Científicas de America Latina, el Caribe, España y Portugal* XXXIV.135, págs. 26-40. URL: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13223042003.

Castro, S., B. Guzmán y D. Casado (2007). "Las TIC en los procesos de la enseñanza y aprendizaje". En: *Laurus* 13.23, págs. 213-234.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos aires: Aique.

Cuetos, M. y col. (2020). "Potencialidades de las TIC y su papel fomentando la creatividad: percepciones del profesorado". En: *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia* 23.2, págs. 287-306. URL: https://www.redalyc.org/journal/3314/331463171015/html/.

Cuicas y col. (2007). "El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas". En: *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación* 7.2, págs. 36-44. URL: https://www.redalyc.org/pdf/447/44770209.pdf.

De León, M. (2020). *Los múltiples usos prácticos de los polinomios*. Blog. URL: https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2020/02/29/147396.

De Lucas, J. (1996). *Los Matemáticos*. URL: http://platea.pntic.mec.es/~jdelucas/losmatematicos.htm.

Delgado, L. (2019). "Aprendizaje centrado en el estudiante, hacia un nuevo arquetipo docente". En: *Enseñanza & Teaching* 37.1. URL: https://doi.org/10.14201/et2019371139154.

Espinosa y col. (2009). *Calculo diferencial e integral I.* URL: https://books.google.com.co/books?id=BXx5tzR_L7oC\&printsec=frontcover\&dq=calculo+diferencial\&hl=es-419\&sa=X\&ved=2ahUKEwjaiYz7q9rrAhXSslkKHTQdDjIQ6AEwBXoECAUQAg#v=onepage\&q=calculo\%20diferencial\&f=false.

Galván y col. (2006). *Calculo diferencial para administración y ciencias sociales.* Segunda Edición. México: Pearson Educación.

Gonzales, V. (2010). *Historia de los polinomios.* URL: http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Historia_polinomios.pdf.

Guevara, C. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación.* Tesis de Maestría. Medellin, Colombia.

Irazoqui, E. (2015). "El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización". Tesis de Maestría. Tesis doct. UNED. URL: http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:Educacion-Esirazoqui/IRAZOQUI_BECERRA_Elias_Tesis.pdf.

Jaimes, L., R. Chaves y J. Vargas (2017). "La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática". En: *Dialnet* 6.8. Boletin virtual, págs. 73-78. URL: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6245325.pdf.

Larson, R., R. Hostetler y B. Edwards (1999). *Cálculo y Geometría Analítica.* 6.ª ed. Madrid: Mc Graw Hill.

Latorre, D. y col. (2013). "La teoría de las situaciones didácticas como metodología en el proceso de enseñanza aprendizaje de la estructura aditiva y multiplicativa: Problemas verbales en una aula de acelaración". En: *Revista científica* Edición Especial, págs. 627-631. URL: http://funes.uniandes.edu.co/6725/1/Martinez2013Teoria.pdf.

León, S. (2022). *Educaplay.* URL: https://es.educaplay.com/juegoimprimible/4556169-actividad_factoreo.html.

López, R. (2008). *Nuevas tecnologías en la enseñanza-aprendizaje del cálculo: Una aproximación al estado de la cuestión.* Granada, Esáña. URL: https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Rubi.pdf.

Manfredi, V (2008). *Funciones Matemáticas ... Â¿Para qué se utilizan?* Dirección general de cultura y educación. URL: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779659.pdf.

Martinez, E. (2017). *Efectividad del uso de las TIC, en la comprensión de los Teoremas*. Tesis de pregrado. Universidad del Quindío, Armenia.

Martínez, P., C. Armengol y J. Muñoz (2019). "Interacciones en el aula desde prácticas pedagógicas efectivas". En: *REXE. Revista de Estudios y Experiencias en Educación* 18.36, págs. 55-74. URL: https://doi.org/10.21703/rexe.20191836martinez13.

Molina, A. (2018). "Funciones Polinómicas". En: URL: https://prezi.com/9lgbafsazvbv/funciones-polinomicas/.

Morales, F. y L. Peña (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo en ingeniería, basada en la modelación matemática*. Montevideo, Uruguay: VII CIBEM. URL: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/942.pdf.

Narváez, J. (2015). "Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo Geogebra". En: *Biblioteca Digital Repositorio Académico* 3.5, págs. 1-11. URL: https://www.redalyc.org/html/310/31045567047/.

Nava, R. (2017). "Socialización del conocimiento académico con el uso de tecnologías de información y comunicación (TIC)". En: *Enl@ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento* 4.3, págs. 41-56. URL: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2504595.pdf.

Pérez, F. (2008). "Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable". Universidad de Granada. URL: https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf.

– (2011). "Matemáticas Grado 8". En: Medellín: Universidad de Antioquia.

Pérez, M. (2017). *Polinomios*. URL: https://prezi.com/k_npxvr4dkae/polinomios/.

Pérez, P. (2009). "Problemas y Ejercicios en Matemáticas". En: *Innovación y experiencias educativas* 15, págs. 1-9.

Pérez, R. (2015). "Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". En: *Biblioteca digital repositorio académico* 3.9, págs. 1-6. URL: http://www.redalyc.org/pdf/310/31045567047.pdf.

Pizarro, R. (2009). *Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas. Aplicación al caso de Métodos Numéricos*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de la Plata, La Plata. URL: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/4152/Documento_completo.pdf?sequence=1.

Posada, F. y J. Villa (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tésis de Maestría. Medellín, Colombia. URL: http://tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/7093/1/FabianPosada_2006_didacticafuncionlineal.pdf.

Prado y col. (2006). *Cálculo Diferencial para Ingeniería.* Primera edición. México: Person educación de méxico.

Programa de Ingeniería Civil de la Universidad del Quindío (2020). *Perfil ocupacional.* URL: https://www.uniquindio.edu.co/programas/publicaciones/285/ingenieria-civil/.

Quintero, H. y col. (2005). "Desarrollo de software educativo: una propuesta metodológica". En: *Revista Telos* 7.3, págs. 383-396. URL: https://www.redalyc.org/pdf/993/99318837004.pdf.

Rangel, G. y J. Reyes (2014). "Relación maestro alumno y sus implicaciones en el aprendizaje". En: *Ra Ximhai* 10.5, págs. 279-290. URL: https://www.redalyc.org/pdf/461/46132134019.pdf.

Rincón, J. (2015). *Comprensión del Problema del Cálculo de la Medida del Volumen de Sólidos de Revolución, en el Marco de las Situaciones Didácticas Utilizando los Ambientes Informáticos como Medio.* Tesis de Maestría. Armenia.

– (2018). *Uso de software educativo para el mejoramiento del aprendizaje de las coordenadas polares*. Editorial Académica Española. URL: https://www.amazon.com/-/es/Juli\%C3\%A1n-Andr\%C3\%A9s-Rinc\%C3\%B3n-Penagos/dp/6202122218.

– (2021). *Jarincon App.* Aplicación web. Armenia. URL: http://jarincon.com/jarinconapp/2021.

Rincón, J., E. Carmona y E. Aldana (2015). "Cálculo Integral mediado por las TIC". En: Armenia: Elizcom S.A.S.

Rios, J. (2007). "Una Ingeniería Didáctica aplicada sobre fracciones". En: *Omnia* 13, págs. 120-157.

Rivera, A. (2014). *Cálculo diferencial: Fundamentos, aplicaciones y notas históricas.* Primera edición. Méxido, D.F.: Grupo editorial patria.

Rodríguez, J., J. Romero y G. Vergara (2017). "Importancia de las TIC en enseñanza de las matemáticas". En: *Revista del programa de matemáticas* 4.2, págs. 41-49. URL: http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/download/1861/1904.

Roumieu, S. (2014). *La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1*. Buenos Aires, Argentina: Congreso iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.

Sabogal y col. (2013). "Cálculo diferencial: aprendiendo con nuevas tecnologías". En: *Revista de Tecnología | Journal Technology* 12.2, págs. 42-51. URL: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6041506.pdf.

Salat, R. (2013). "La enseñanza de las matemáticas y la tecnología". En: *Innovación Educativa* 13.62, págs. 61-74. URL: http://www.scielo.org.mx/pdf/ie/v13n62/v13n62a5.pdf.

Sampieri, R., C. Fernández y P. Baptista (2014). *Metodología de la Investigación*. Sexta edición. México: Mc Graw Hill - Education.

Sánchez, J., J. De la Cruz y C. Urrutia (2009). *álgebra de funciones aplicando ingeniería didáctica*. URL: http://dcb.ïňĄ-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_27.pdf.

Santos, M. (2012). "El Papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza". En: *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 7, págs. 151-163. URL: http://funes.uniandes.edu.co/21404/1/Santos2012El.pdf.

Sarmiento, M. (2004). "La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente." Tesis doct. Universitat Rovira i Virgili. Departament de Pedagogia. URL: https://www.tdx.cat/handle/10803/8927#page=1.

Segovia, F. (2009). "Los polinomios tienen su historia". URL: http://yair.es/multimedia/datos/polinomios_historia_203009_201111_6867.pdf.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable transcendentes tempranas*. 7.ª ed. McMASTER UNIVERSITY: CENGAGE, Learnong. URL: https://www.

fbioyf.unr.edu.ar/evirtual/pluginfile.php/107533/course/section/2765/calculo-james-stewart-7ed.pdf.

Suarez, A. (2020). *Importancia de las TIC en educación: Ventajas y desventajas del e-learning*. URL: https://www.armadilloamarillo.com/blog/las-tic-la-educacion-ventajas-desventajas-del-e-learning/.

Varsity, T. (2022). *Hotmath*. URL: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/quadratic-function.

Villa, D. (1995). *Precálculo*. Universidad del Quindío, Armenia: Universidad del Quindío.

Capítulo A

Secuencia didáctica

Para desarrollar un trabajo con los estudiantes se generó el siguiente taller guía.

Taller de Funciones Polinómicas

Introducción

Las funciones polinómicas son funciones muy usadas en la vida cotidiana, por ejemplo, en la construcción de sólidos, cajas cerradas con tapa, cálculo del volumen de una columna o una viga (Rincón, 2015) y en este taller se quiere implementar una aplicación educativa en línea con el fin de ejercitarse más acerca de este tema.

Para acceder a la aplicación haga clic en el siguiente vínculo `http://jarincon.com/jarinconapp/2021/#/home` y accederá a la página principal. Si no está registrado haga clic en el botón de [Registrarme] de lo contrario inicie sesión y diríjase a la aplicación de funciones polinómicas.

Modelar funciones polinómicas

Ejercicio No1

Modelar una función polinómica, consiste en encontrar una función que satisfaga a los puntos de corte dados, o que pasa por cada uno de los puntos de corte establecidos en el problema. Para ello se debe usar el método de la multiplicación sintética o el método de los productos notables.

En la aplicación, generé un ejercicio de modelación que contenga tres (3) raíces, a continuación, tome un pantallazo del problema y lo pega en la siguiente caja.

Ahora resuelva el problema usando multiplicación sintética o productos notables, tome una foto y péguela en el siguiente cuadro.

Seguidamente escriba la función resultante en la siguiente caja:

Resuelva el ejercicio en la aplicación agregando los coeficientes de la función, tome un pantallazo antes de enviar el ejercicio de los coeficientes escritos en la aplicación.

Describa con sus palabras el proceso que realizo para resolver el ejercicio.

Seguidamente use el método de la ley de los signos para saber cuáles son los intervalos positivos y negativos de la función, tome una foto al procedimiento y péguelo en el siguiente cuadro.

.

Para terminar el ejercicio, calcule el corte de la función encontrada con el eje y, y escríbalo en la siguiente caja y realice la gráfica de la función a la cual le tomará una foto y la pegará en la siguiente caja.

Corte con el eje Y	Gráfica de la función
.	.

Ejercicio No2

Ahora genere otro ejercicio de modelación de funciones polinómicas, en esta ocasión que tenga cuatro (4) raíces o puntos de corte con el eje x, tome un pantallazo del ejercicio y lo pega en la siguiente caja.

.

Realice el proceso de modelación, toma una foto del procedimiento y lo pega en la siguiente caja.

.

Escriba la función obtenida en la siguiente caja

Seguidamente, realice el cálculo de los intervalos positivos y negativos usando la ley de los signos, tome una foto del procedimiento y péguela en el siguiente cuadro.

Ahora describa con sus palabras que significan estos intervalos en la gráfica de la función.

Calcule el punto de corte con el eje y y realice la gráfica de la función, a la cual le tomará una foto y la pegará en la siguiente caja.

Resuelva el problema en la aplicación y antes de enviar el ejercicio a revisión, tome un pantallazo de los coeficientes y péguelo en la siguiente caja.

Conclusiones del Ejercicio de Modelación

Explique cuál es la diferencia entre la gráfica de la función del ejercicio (1) con la gráfica del ejercicio (3)

Si una función polinómica tiene cinco cortes con el eje x, cómo puede describir los intervalos positivos y negativos de la función.

Caracterización de una función polinómica

Ejercicio 1

Generé un ejercicio de graficación de función polinómica de grado seis (6), tomé un pantallazo y péguelo en la siguiente caja.

Realice el proceso de la división sintética, tome una foto del procedimiento y lo pega en la siguiente caja.

Describa con sus palabras los pasos que uso para realizar la división sintética y que herramientas uso para calcular los divisores del término independiente.

Explique porque las raíces del polinomio se calculan de los divisores del término independiente.

Calcule el corte con el eje y y realice el cálculo de los intervalos positivos y negativos usando la ley de los signos, tome una foto del procedimiento y la pega en la siguiente caja.

Ahora realice la gráfica de la función, tome una foto y la pega en la siguiente caja.

Explique con sus palabras cuáles elementos tiene en cuenta para realizar la gráfica de la función.

Resuelva el ejercicio en la aplicación y antes de enviar para revisión tome un pantallazo de la solución y péguelo en la siguiente gráfica.

Conclusiones del Ejercicio de Caracterización

Explique con sus palabras un proceso completo para caracterizar y graficar una función polinómica.

Capítulo B

Análisis de la prueba diagnóstico

A continuación se registran los análisis realizados para la prueba diagnóstico elaborada en la fase de análisis preliminar, ver en la 6.1.6 en la página 145.

B.0.5.1 Estudiante 1

		Cumple	**No Cumple**
No	**Conceptos Evaluados**		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante posee escasos conocimientos en la graficación y modelación de funciones polinómicas. No presento evidencias en el desarrollo de los ejercicios.

B.0.5.2 Estudiante 2

		Cumple	**No Cumple**
No	**Conceptos Evaluados**		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica	X	
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante tiene algunos conceptos previos para identificar una función polinómica, en lo que tiene que ver con el análisis detallado de la función no tiene claro los conceptos. Esta en la capacidad de obtener los puntos de corte de la función así como de modelar una función con los cortes dados. Se presenta en la siguiente sección evidencias del proceso de cálculo.

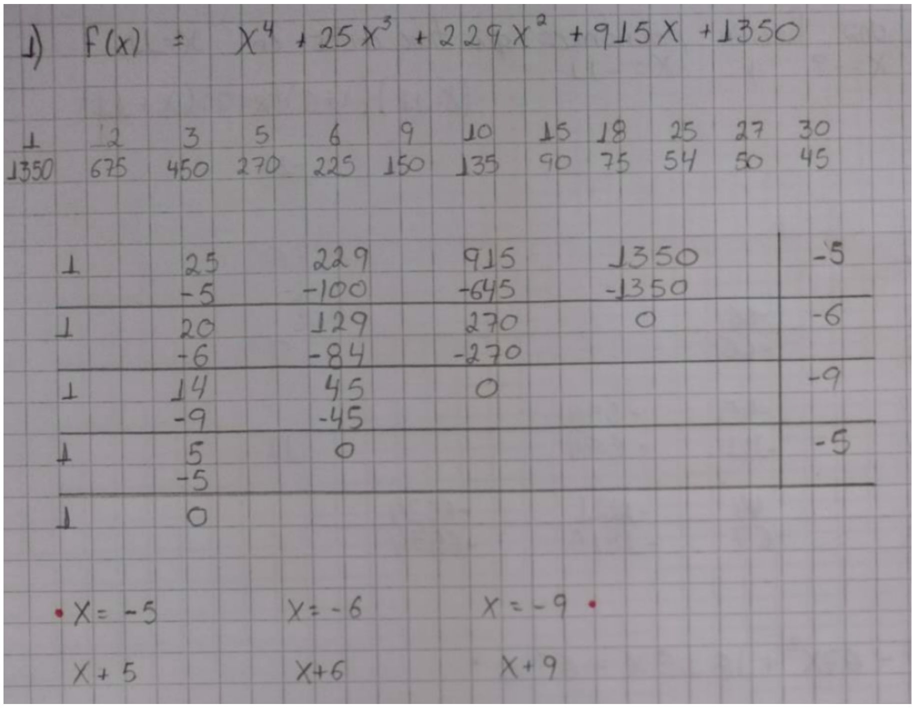


Figura B.1: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

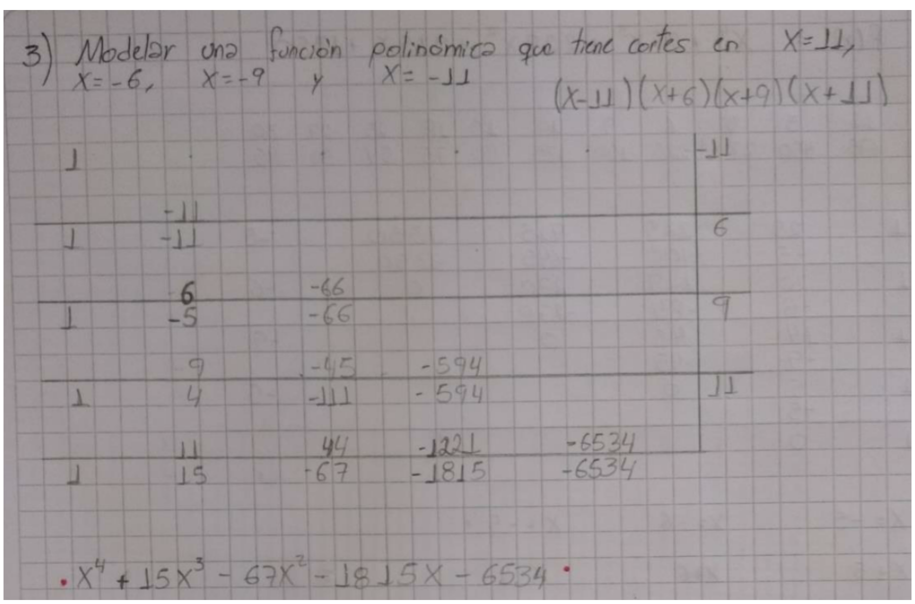


Figura B.2: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.3 Estudiante 5

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante posee escacos conocimientos en la graficación y modelación de funciones polinómicas. No presento evidencias en el desarrollo de los ejercicios.

B.0.5.4 Estudiante 6

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante posee escacos conocimientos en la graficación y modelación de funciones polinómicas. No presento evidencias en el desarrollo de los ejercicios.

B.0.5.5 Estudiante 7

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Algunos de los conocimientos no adquiridos por el estudiante en su experciencia, son la determinación de la simetría de una función, que inherentemene tiene que ver con la paridad de la función. Otros aspectos también son deconocidos como el de graficar la función y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

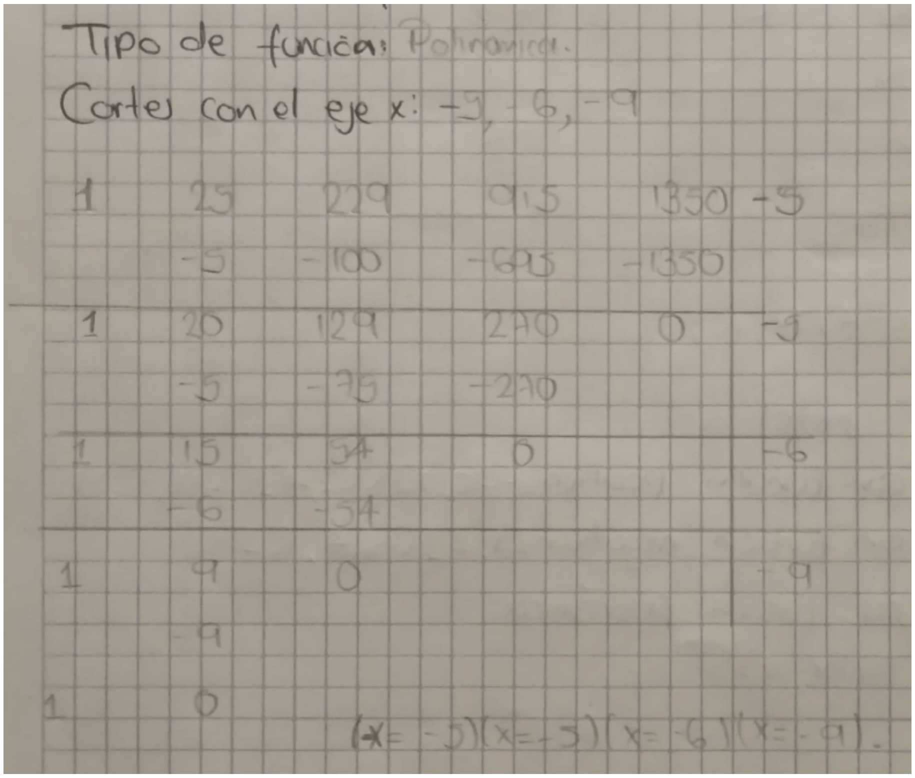


Figura B.3: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

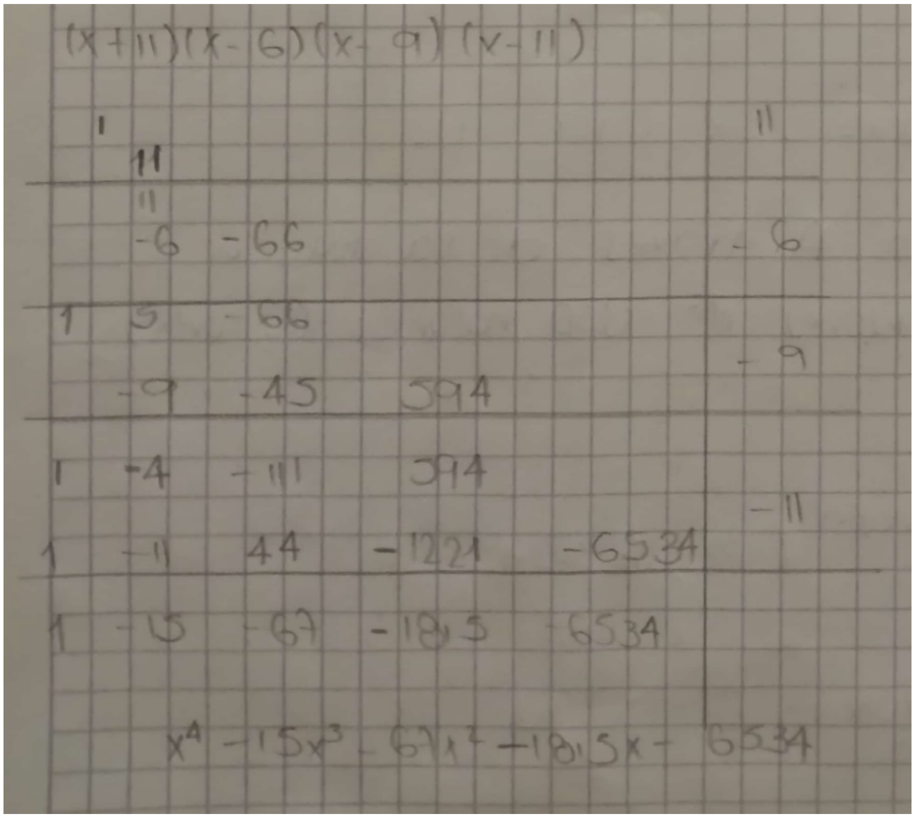


Figura B.4: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

Evidencias

B.0.5.6 Estudiante 8

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante comprende el tipo de función, como calcular los cortes con el eje x y cuales son los procesos para calcular los cortes. Por otra parte comprende también como modelar una función polinómica a través de los cortes dados. El resto de conceptos evaluados no los cumple.

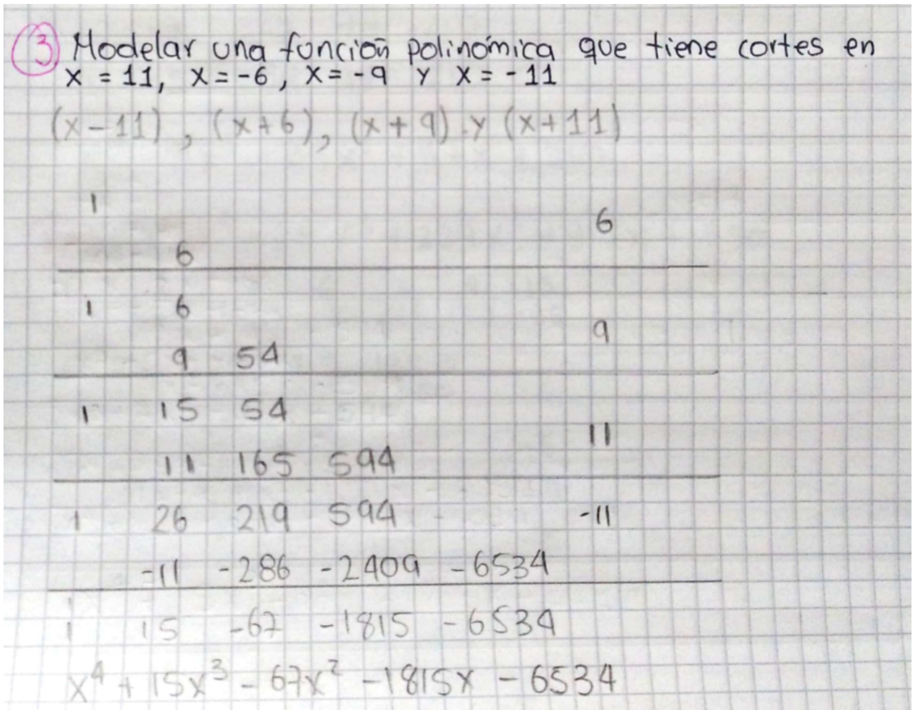


Figura B.5: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

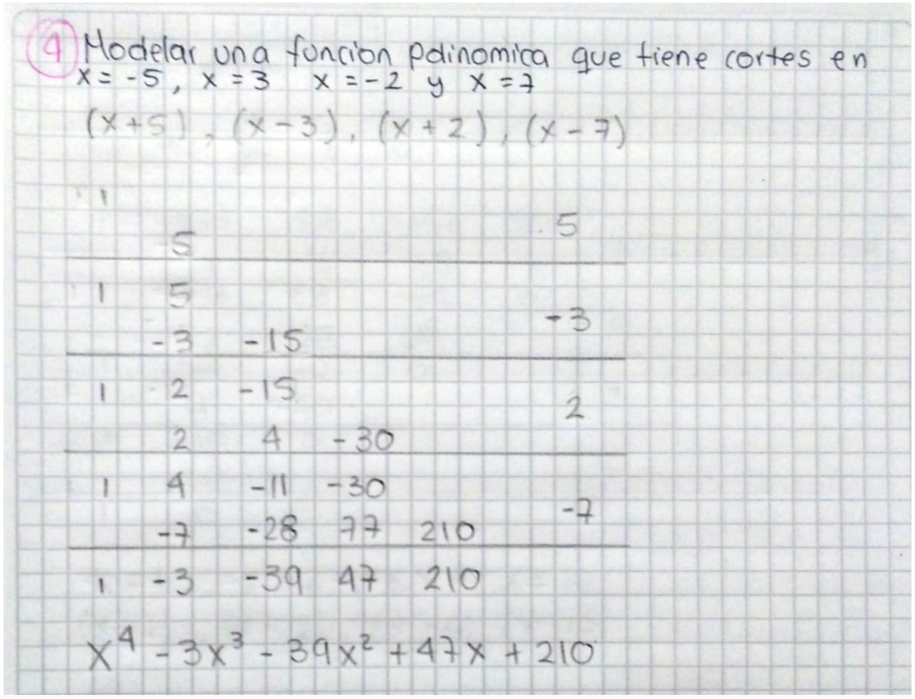


Figura B.6: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

B.0.5.7 Estudiante 11

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante posee escacos conocimientos en la graficación y modelación de funciones polinómicas. No presento evidencias en el desarrollo de los ejercicios.

B.0.5.8 Estudiante 12

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante presenta muy poco conomiento frente al tema. No evidencio cómo graficar y modelar una función polinómica.

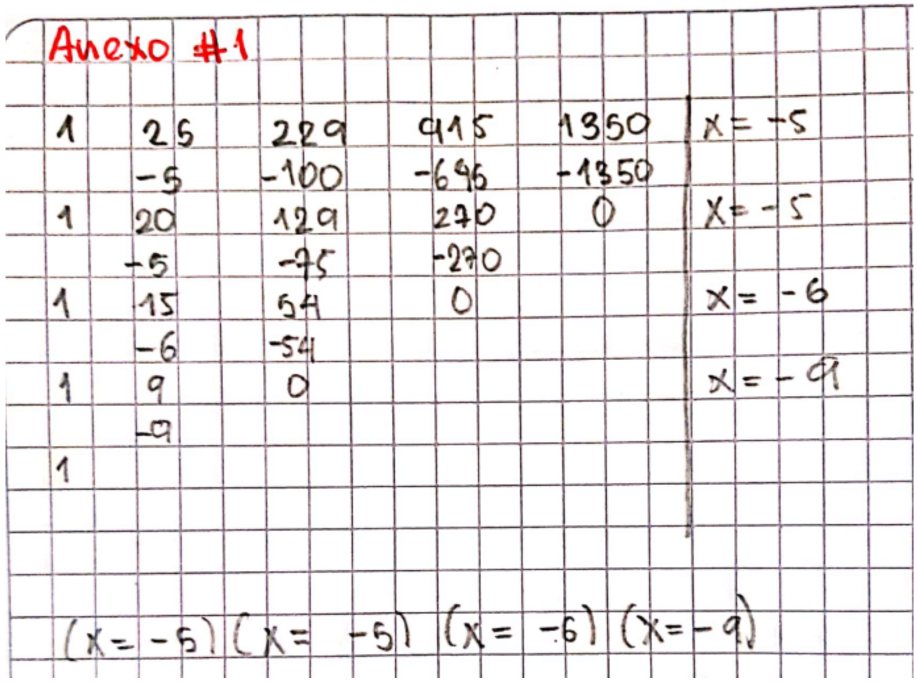


Figura B.7: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

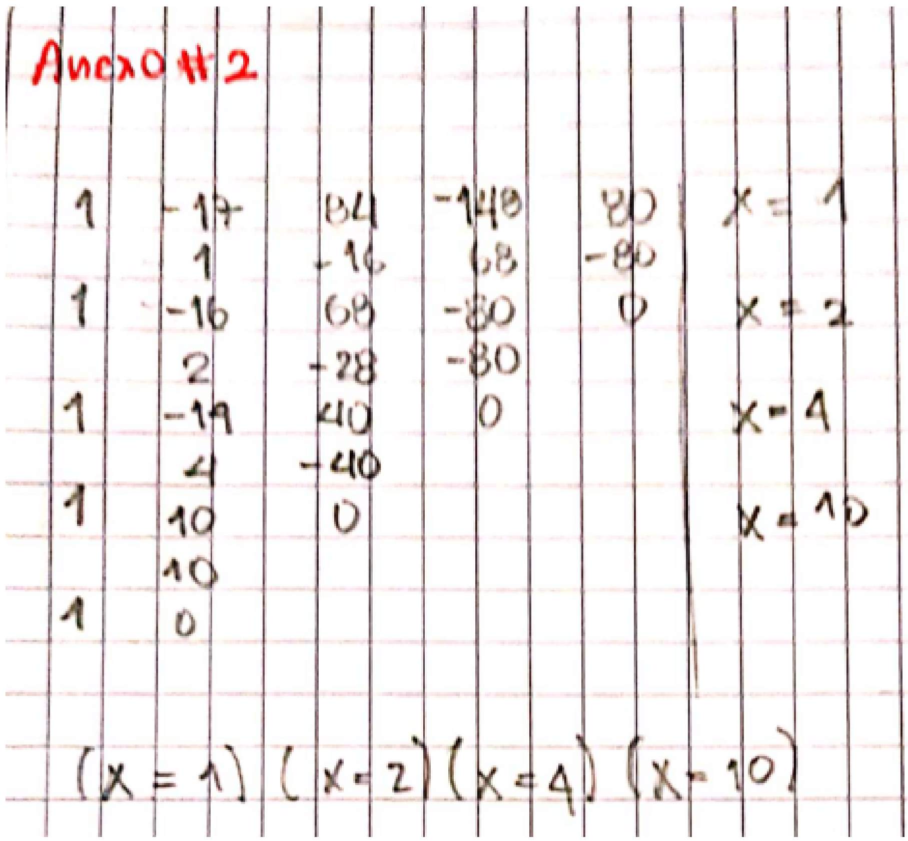


Figura B.8: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

Evidencias

B.0.5.9 Estudiante 13

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función		X
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante indica que no entiende los ejercicios y que requiere explicación de métodos para resolver los ejercicios.

B.0.5.10 Estudiante 14

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante tiene idea de como realizar el proceso para calcular los puntos de corte de una función polinómica, pero no sabe como graficar la función.

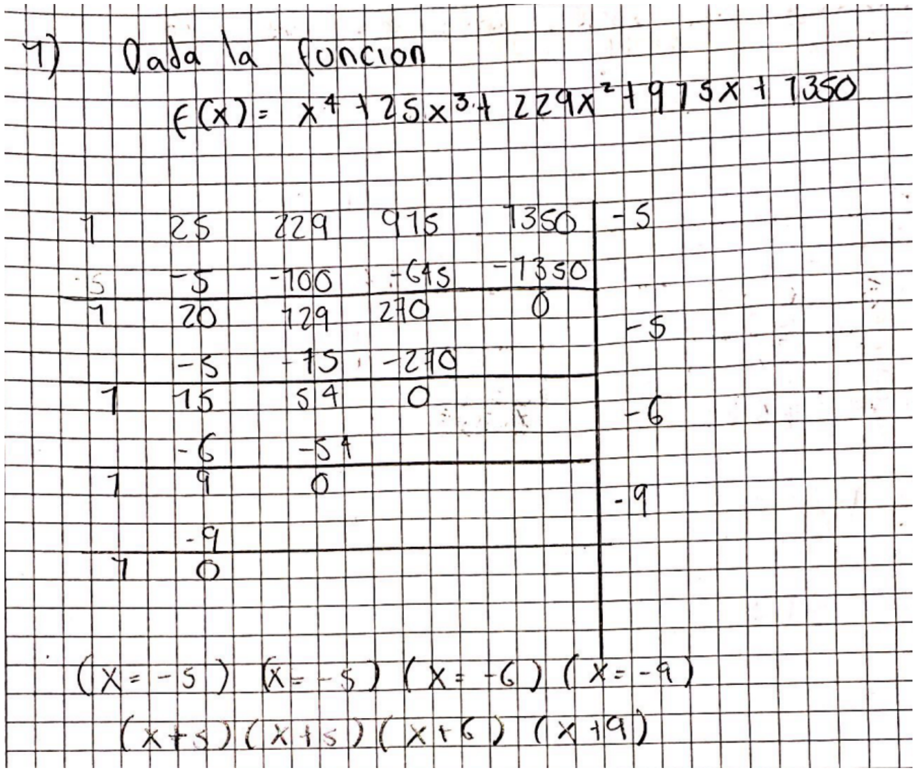


Figura B.9: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

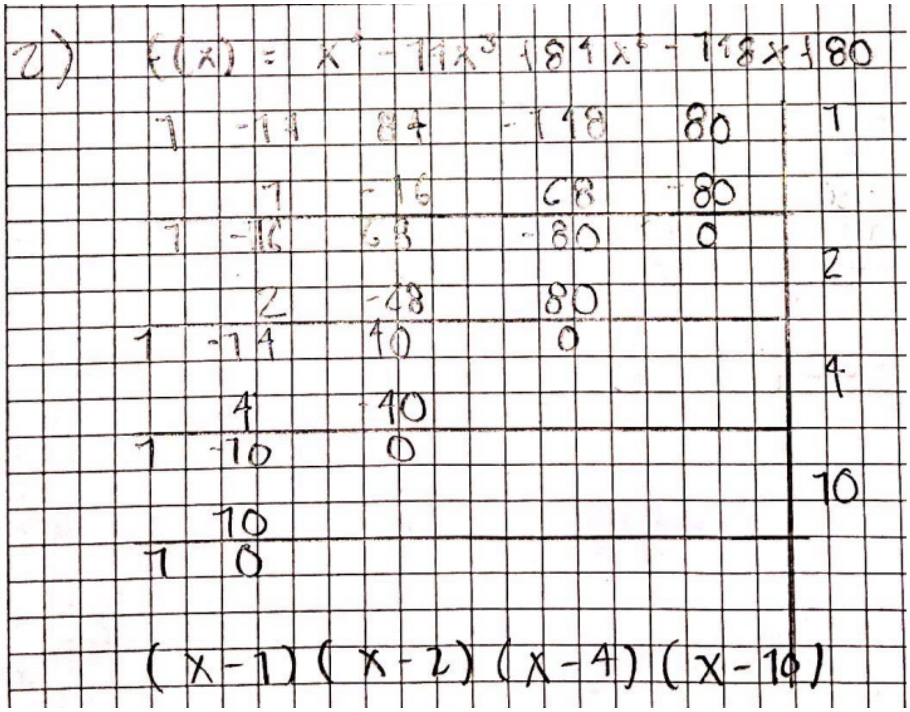


Figura B.10: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

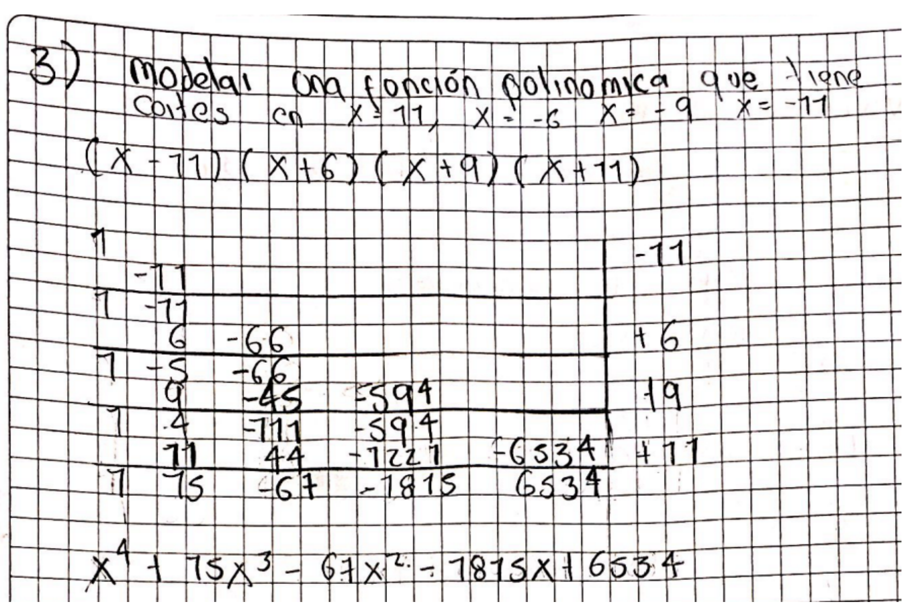


Figura B.11: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

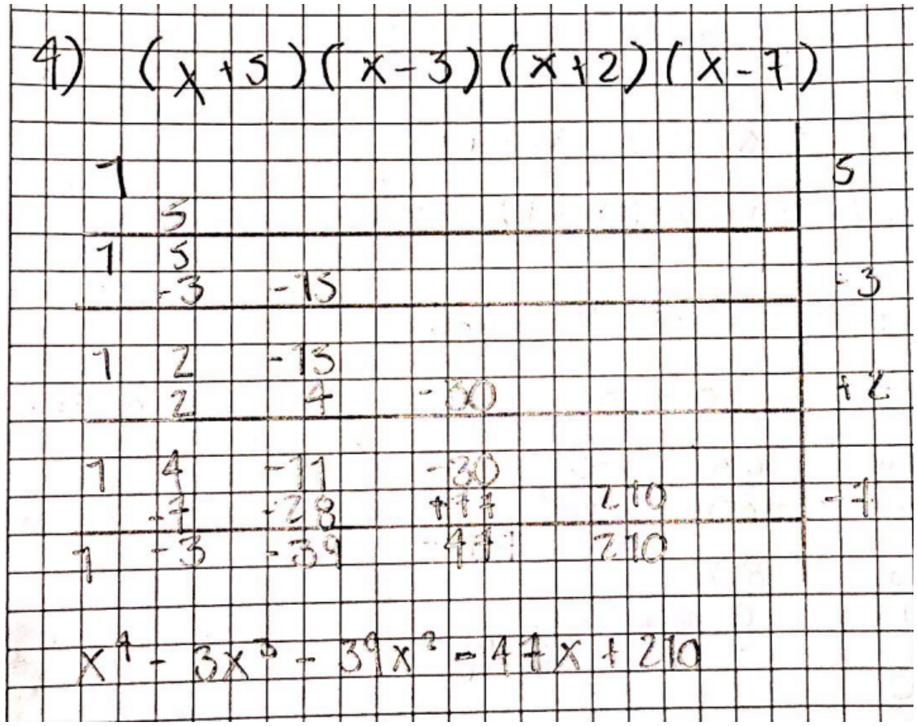


Figura B.12: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.11 Estudiante 15

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas	X	

Resumen de la Evaluación

El estudiante sabe realizar el proceso para hallar los puntos de corte de la función polinómica, también sabe como hacer la graficación y modelación de la función, pero desconoce al momento de saber si la función es par o impar, en como sacar los intervalos y diferenciar si la función es simétrica.

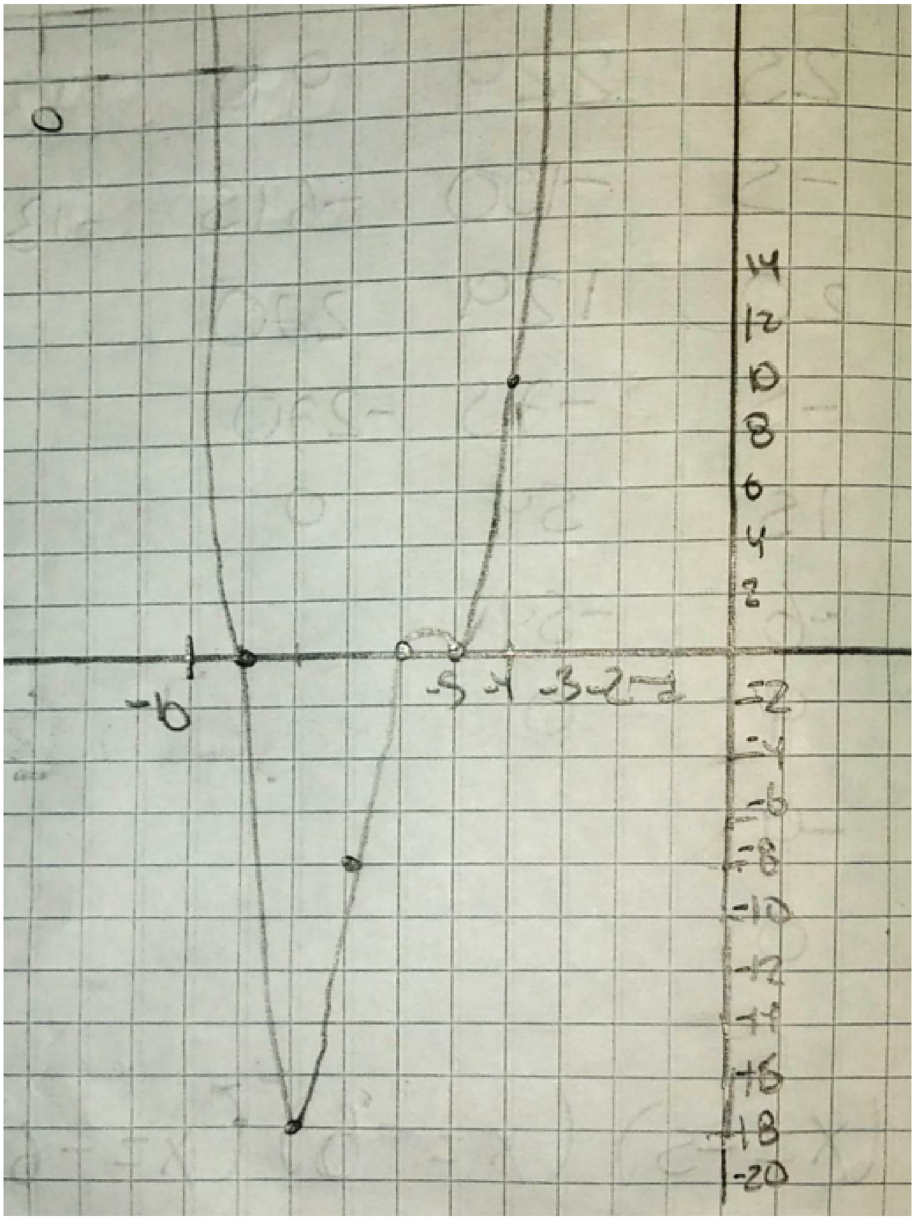


Figura B.13: Bosquejo de la función 1

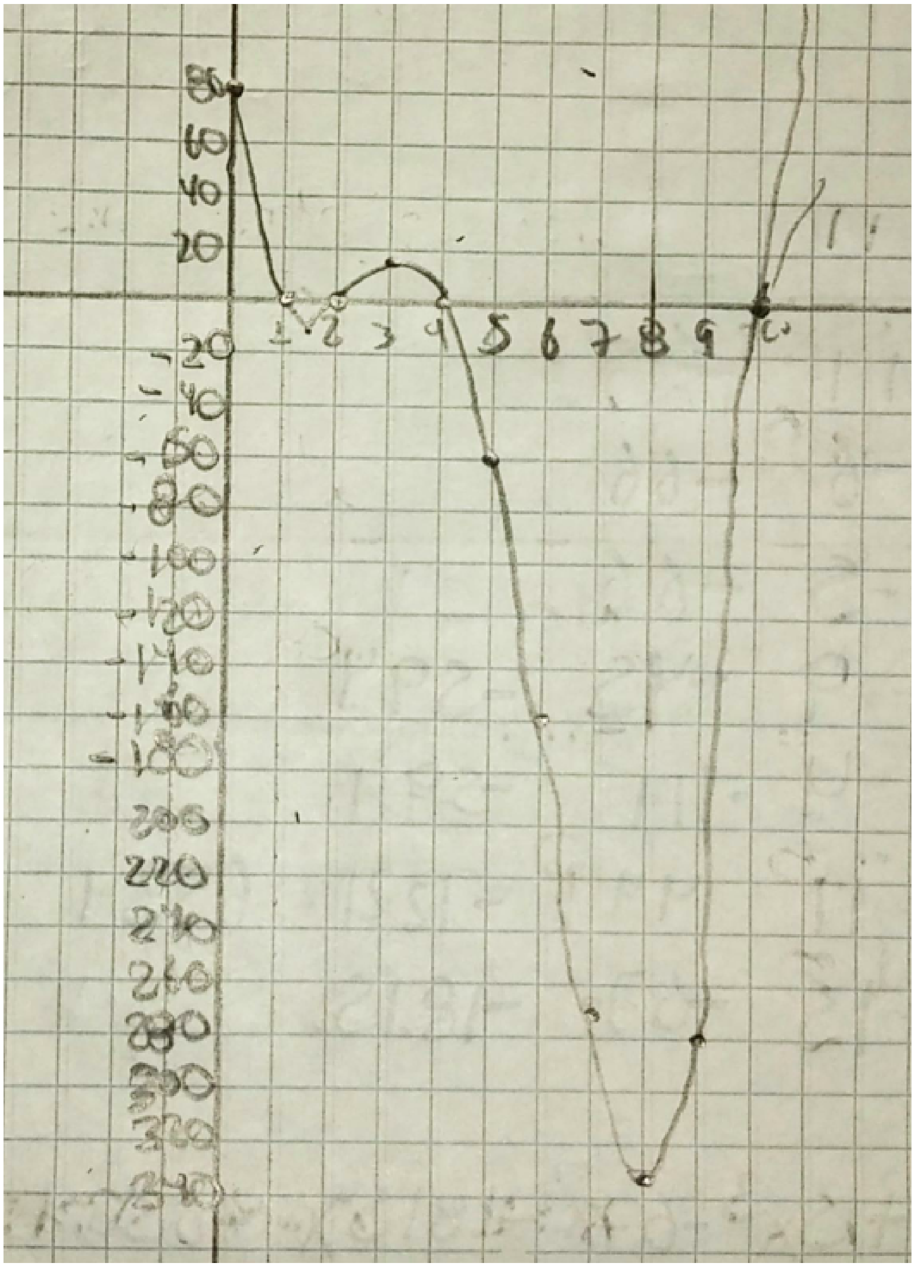


Figura B.14: Bosquejo de la función 2

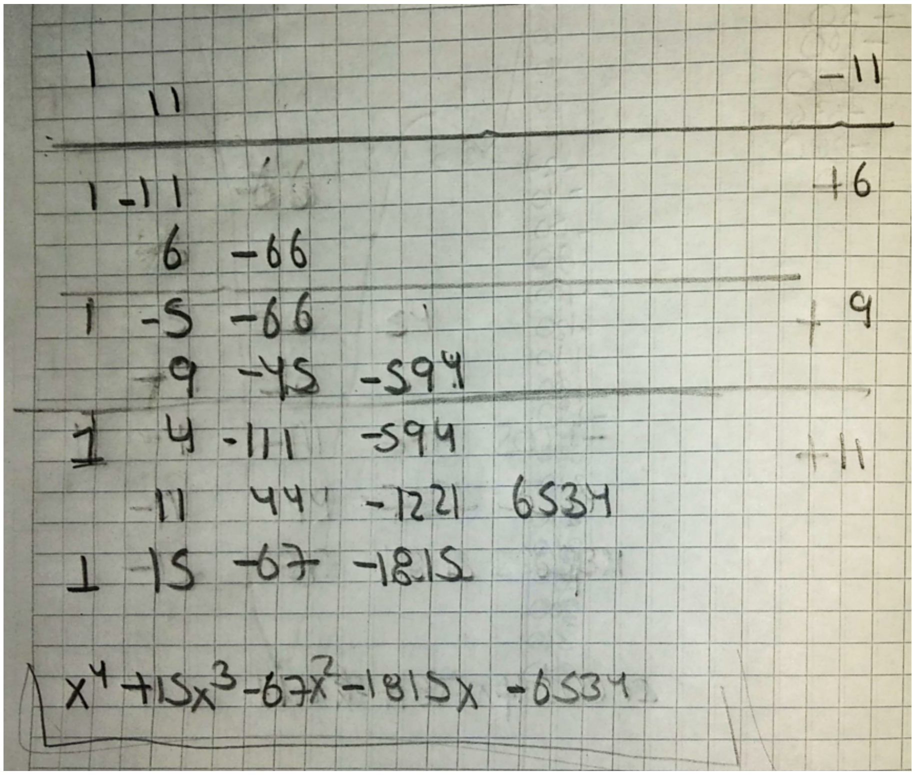


Figura B.15: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

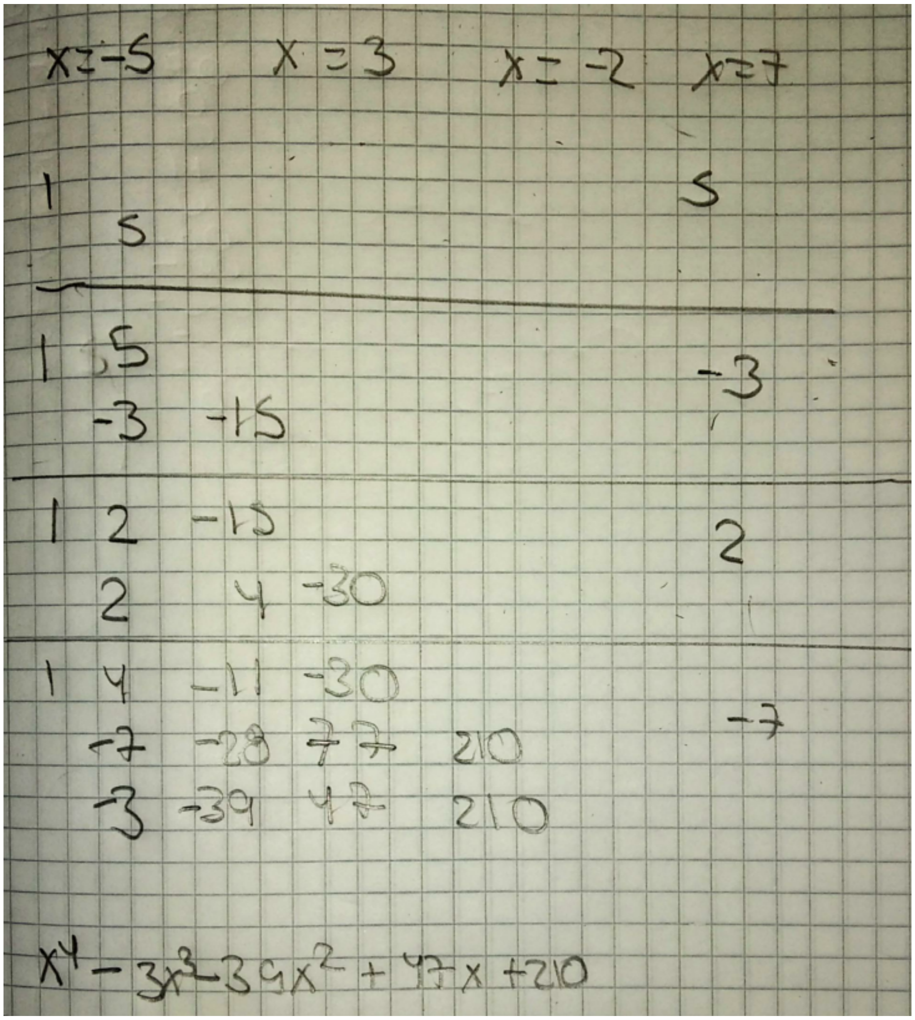


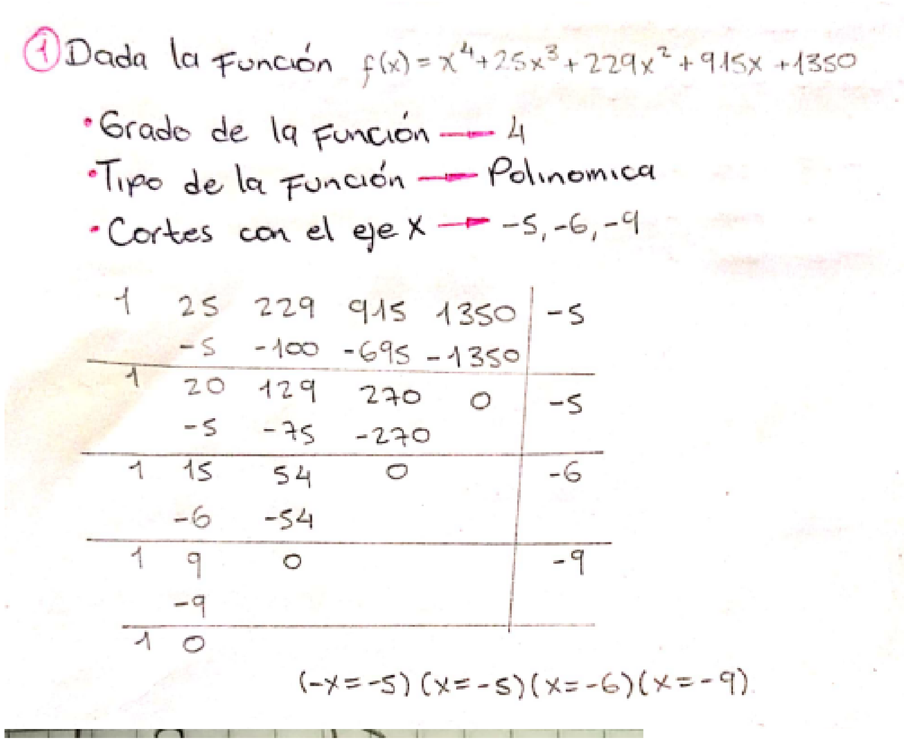
Figura B.16: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

B.0.5.12 Estudiante 16

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Este estudiante presenta la mayoria de conocimientos evaluados, pero presenta dificultad al momento de graficar la función.



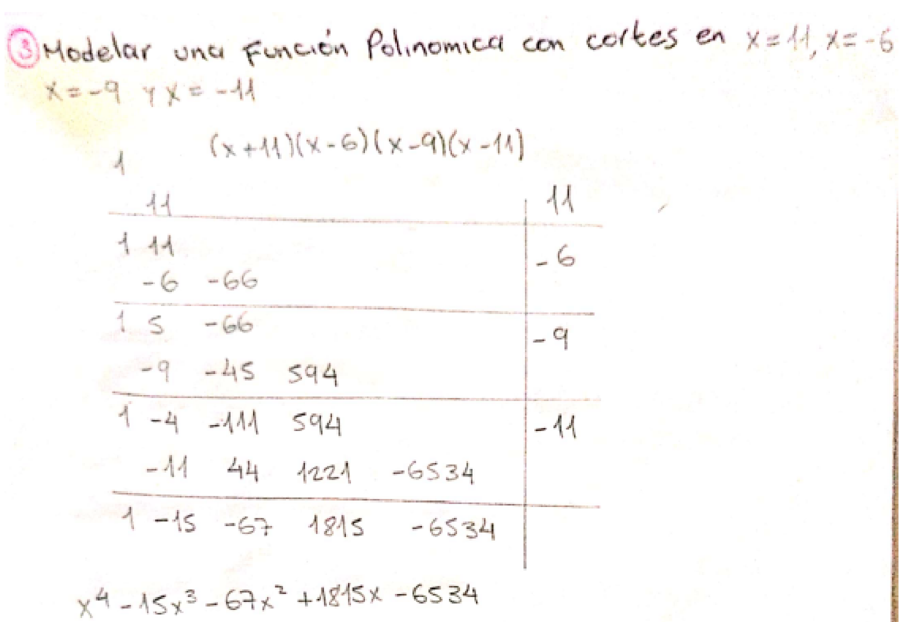
① Dada la función $f(x)=x^4+25x^3+229x^2+915x+1350$

- Grado de la función → 4
- Tipo de la función → Polinomica
- Cortes con el eje X → -5, -6, -9

1	25	229	915	1350	-5
	-5	-100	-695	-1350	
1	20	129	270	0	-5
	-5	-75	-270		
1	15	54	0		-6
	-6	-54			
1	9	0			-9
	-9				
1	0				

(-x=-5)(x=-5)(x=-6)(x=-9)

Figura B.17: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x



③ Modelar una función Polinomica con cortes en x=11, x=-6, x=-9 y x=-11

$(x+11)(x-6)(x-9)(x-11)$

1					
11					11
1	11				-6
	-6	-66			
1	5	-66			-9
	-9	-45	594		
1	-4	-111	594		-11
	-11	44	1221	-6534	
1	-15	-67	1815	-6534	

$x^4-15x^3-67x^2+1815x-6534$

Figura B.18: Método para modelar una función polinómica dados los puntos de corte

Evidencias

B.0.5.13 Estudiante 17

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante posee escacos conocimientos en la graficación y modelación de funciones polinómicas. No presento evidencias en el desarrollo de los ejercicios.

B.0.5.14 Estudiante 18

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función		X
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante indica que el tema no se explicó en la institución educativa de la cual se graduo.

B.0.5.15 Estudiante 19

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante comprende los saberes básicos de las funciones polinómicas, pero presenta dificultades tales como saber si la función es simétrica, si es par o impar y al momento de la graficación.

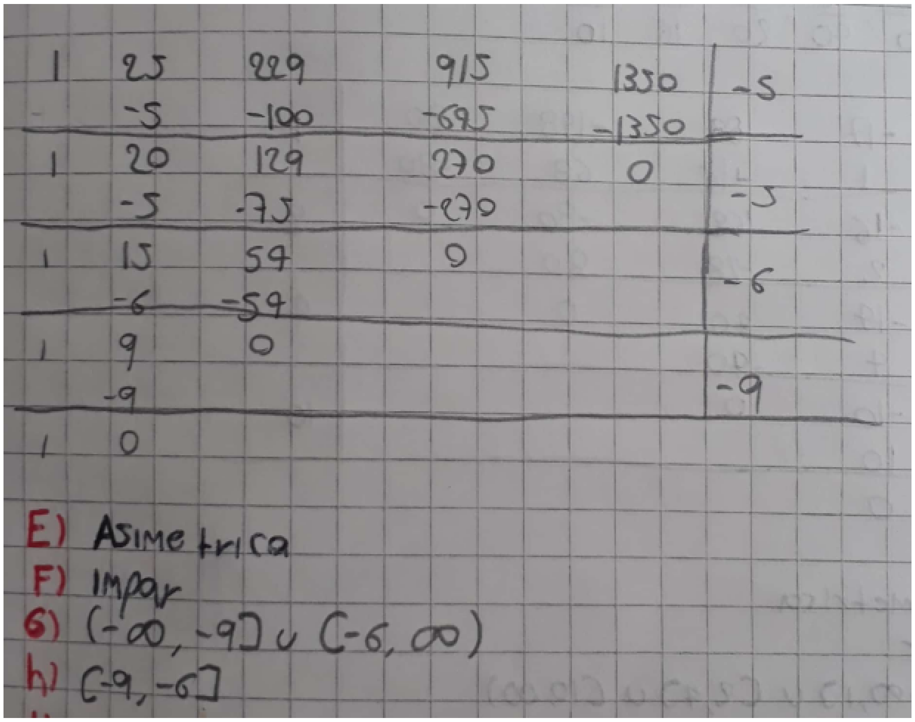


Figura B.19: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

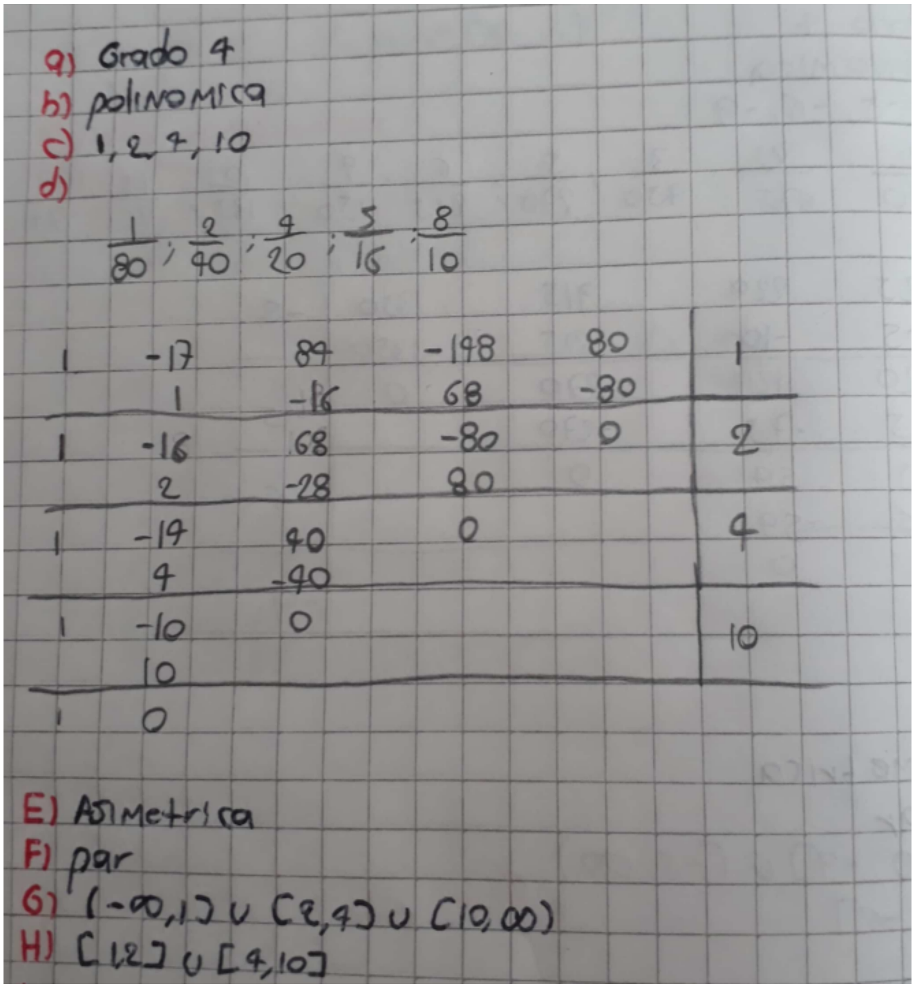


Figura B.20: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

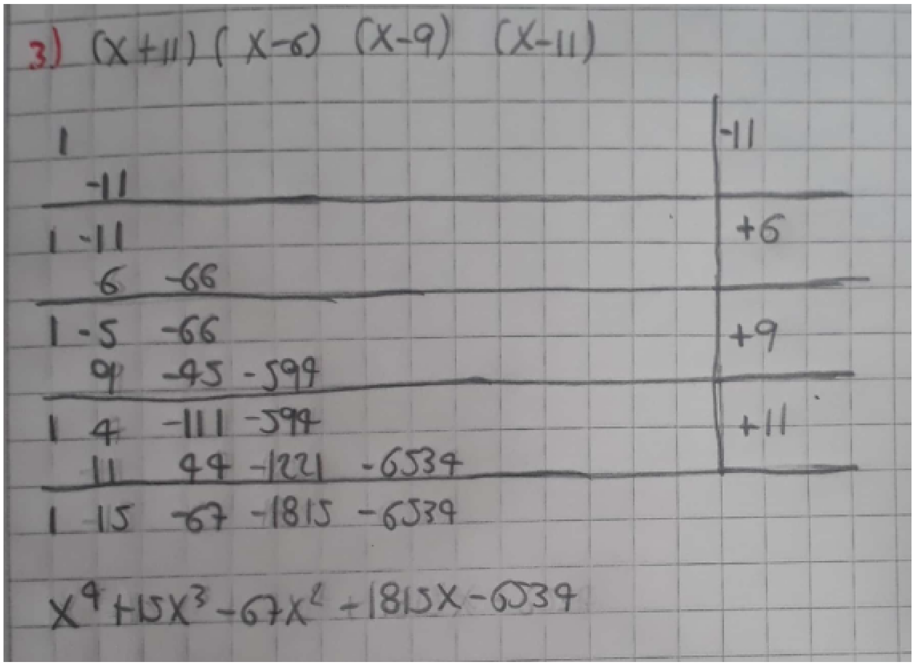


Figura B.21: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

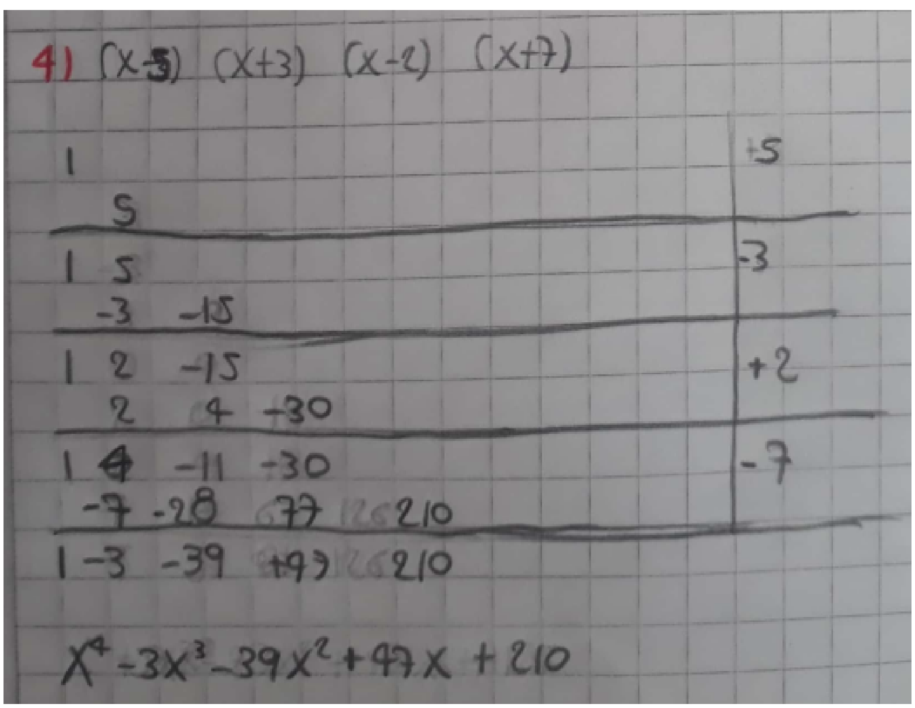


Figura B.22: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.16 Estudiante 20

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Este estudiante sabe como aplicar el proceso para hallar los cortes de la función, sabe obtener los intervalos y sabe modelar la función polinómica, pero a su vez no diferencia si la función es par o impar ni como graficarla.

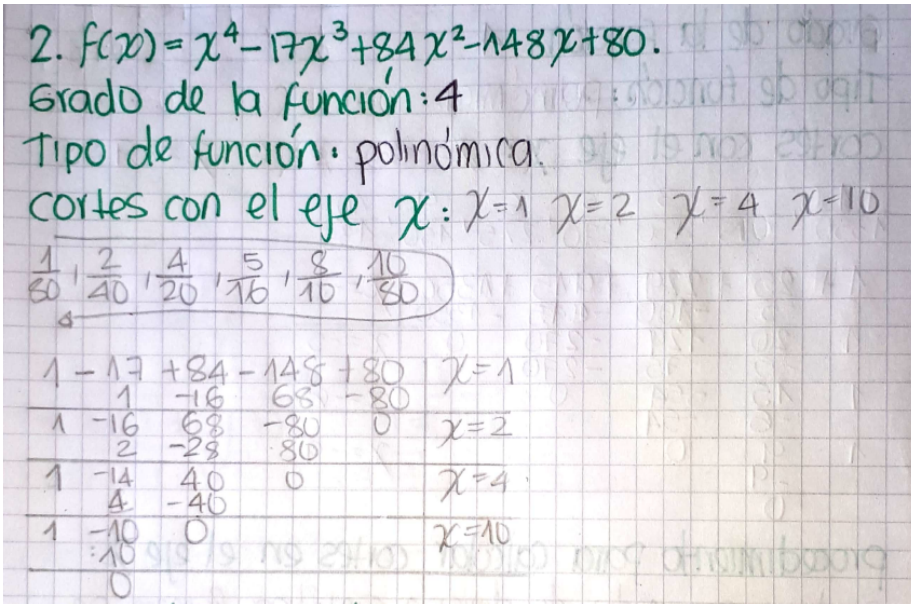


Figura B.23: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

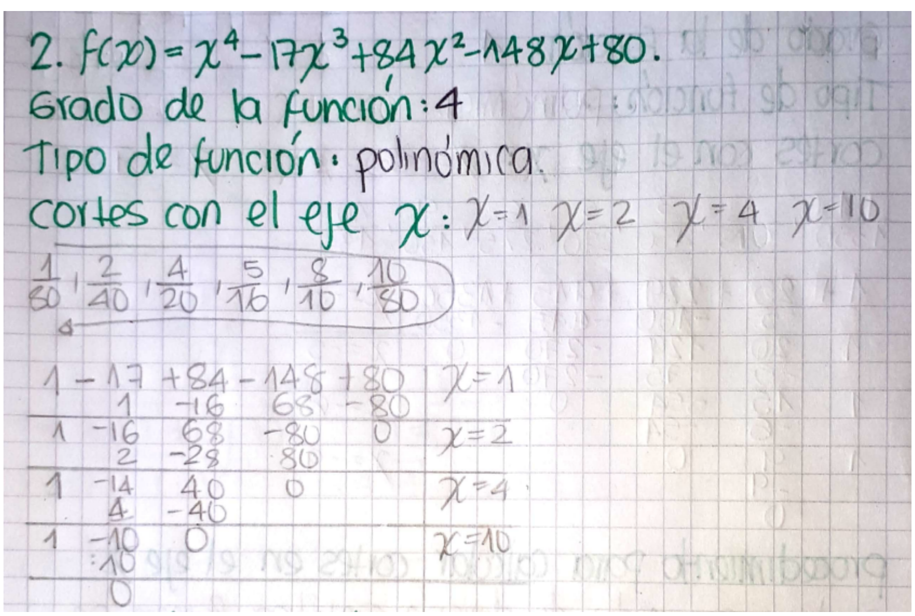


Figura B.24: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

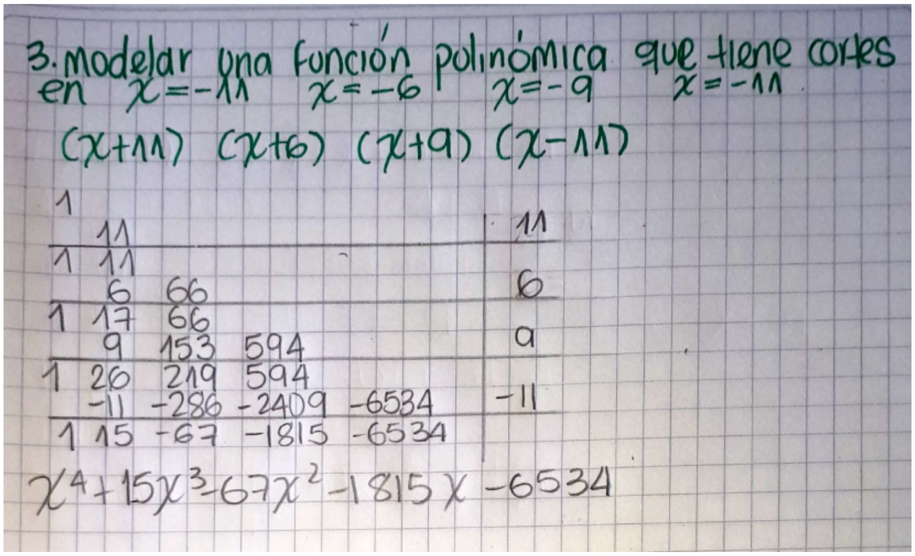


Figura B.25: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

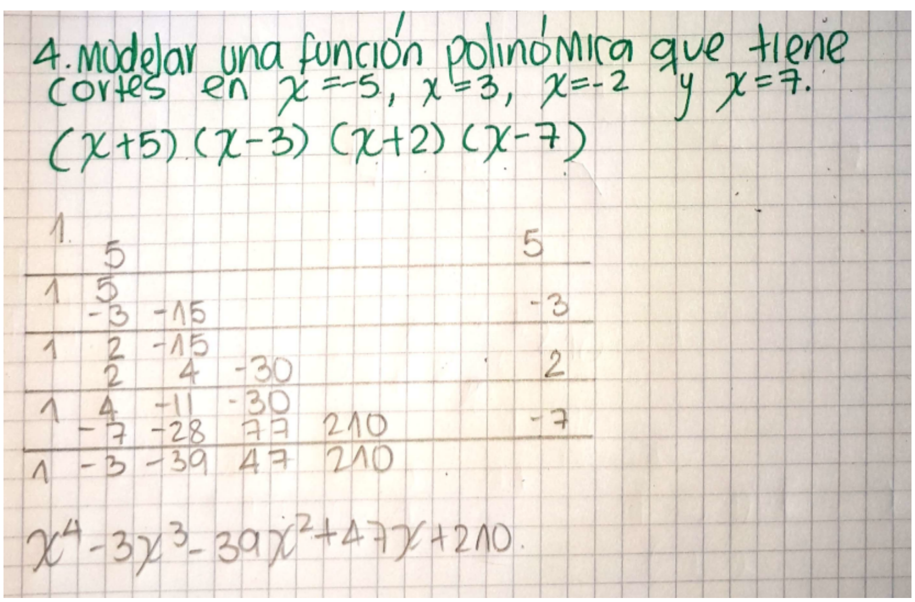


Figura B.26: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.17 Estudiante 21

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función		X
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante posee escacos conocimientos en la graficación y modelación de funciones polinómicas. No presento evidencias en el desarrollo de los ejercicios.

B.0.5.18 Estudiante 22

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante tiene conocmientos básicos de los que son evaluados. Presenta problemas al momento de graficar la función polinómica.

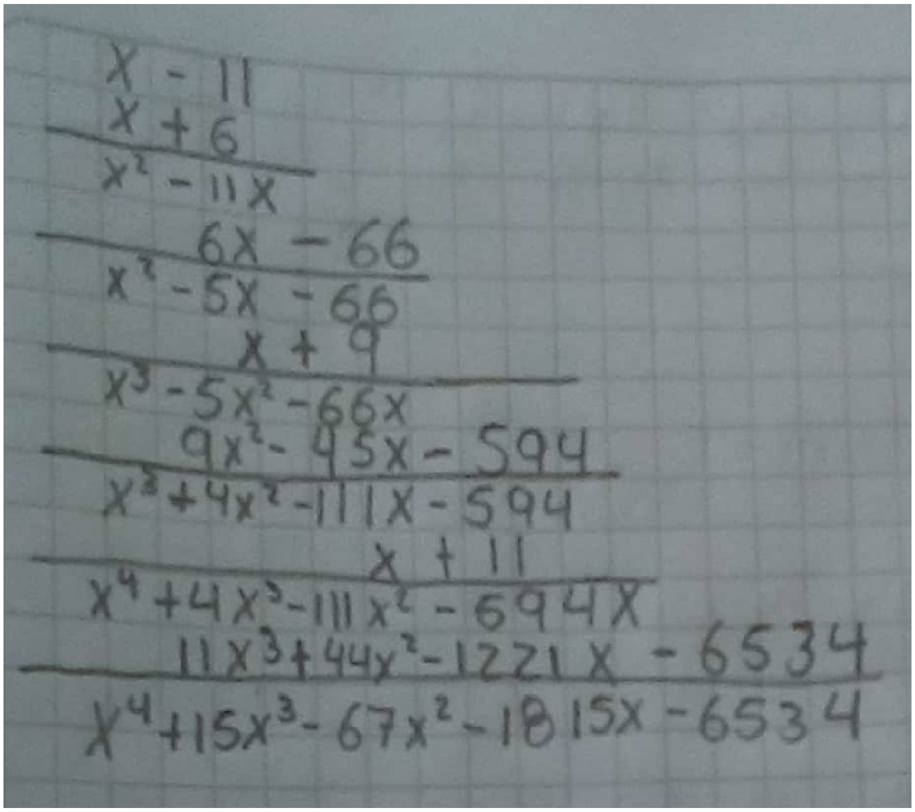


Figura B.27: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

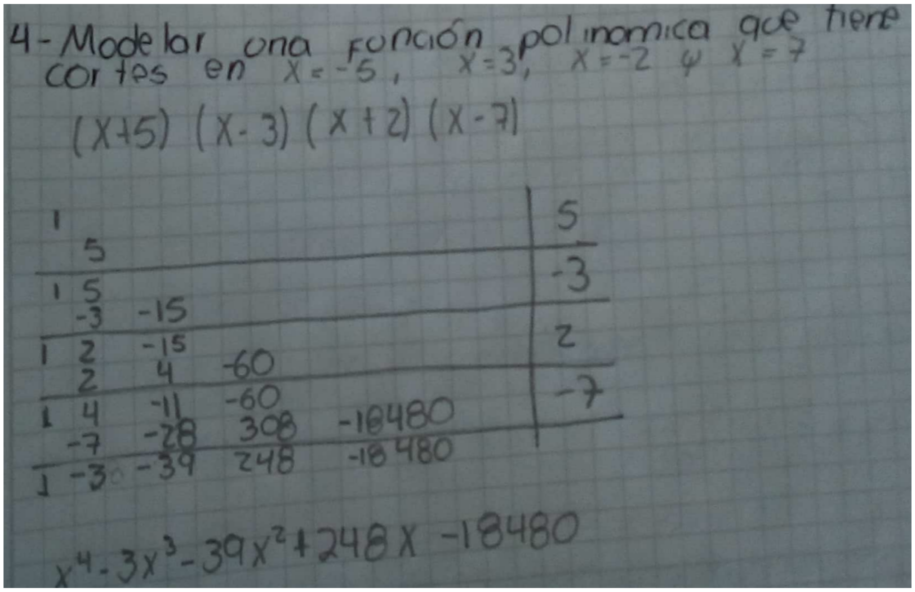


Figura B.28: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.19 Estudiante 23

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa	X	
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Este estudiante tiene conocimientos previos frente al tema de funciones polinómicas, presento anexos del procedimiento para calcular los cortes, pero presenta dificultad al momento de graficar la función.

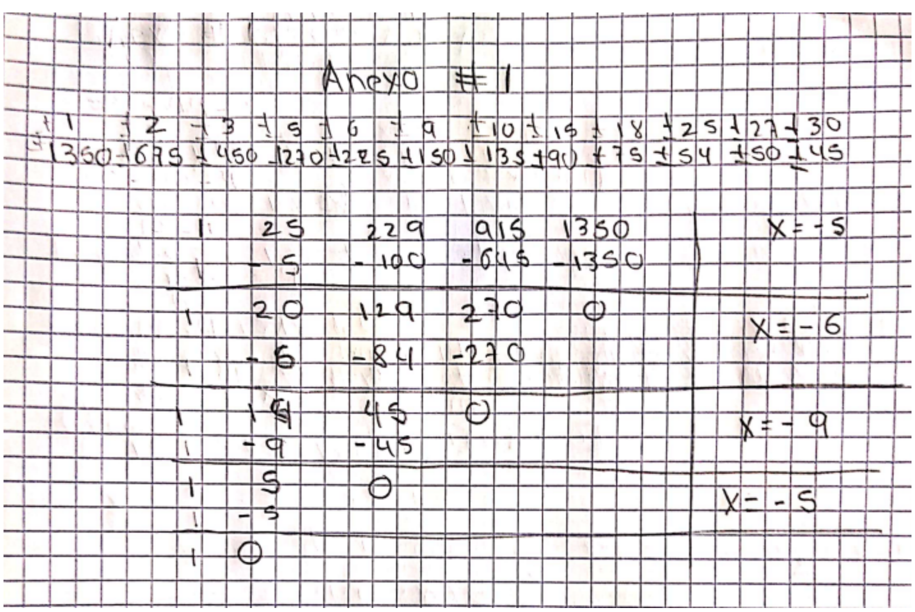


Figura B.29: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

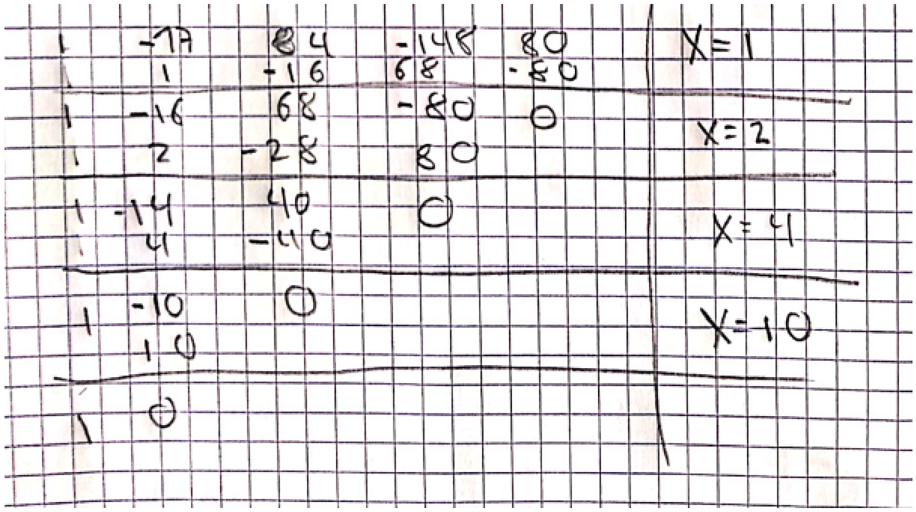


Figura B.30: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

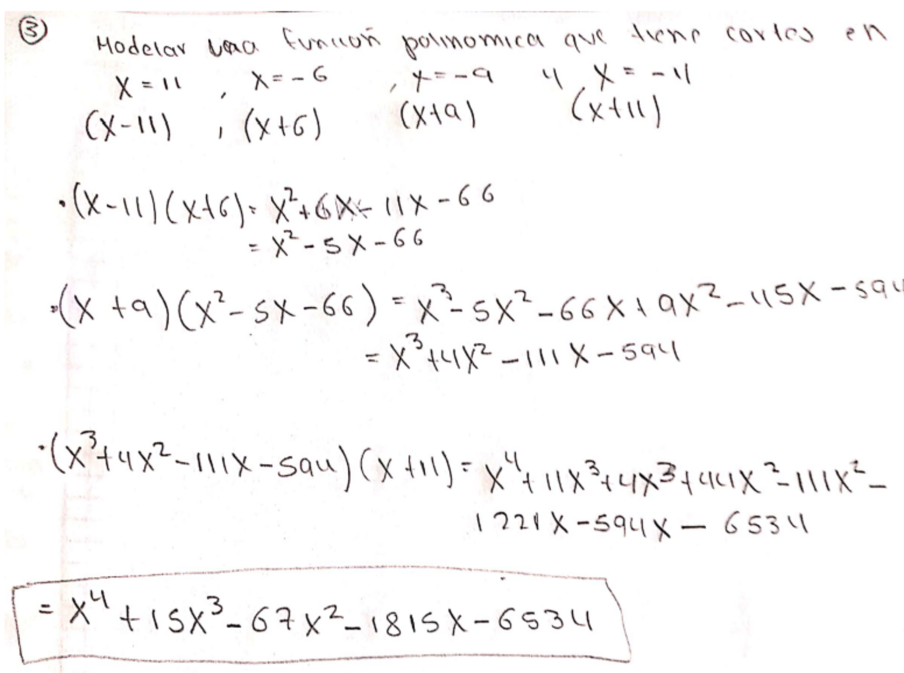
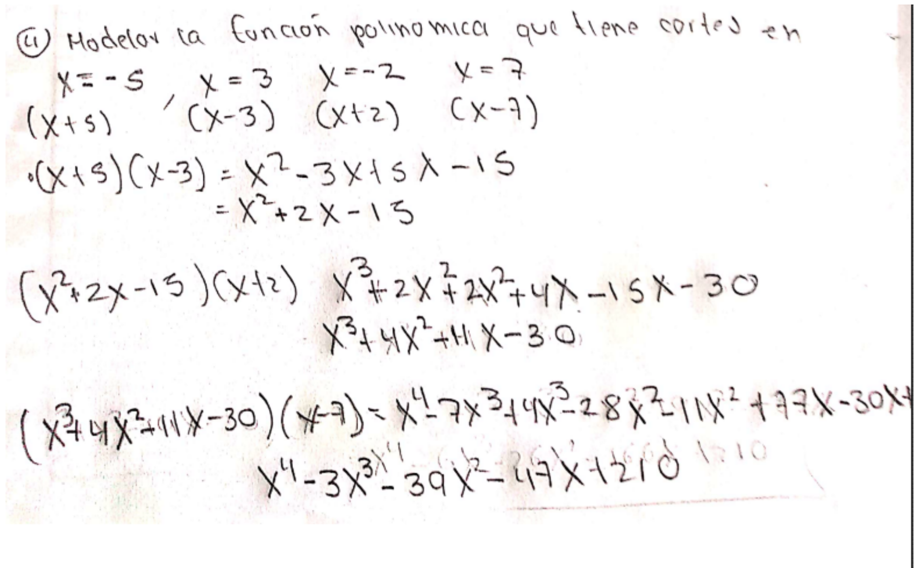


Figura B.31: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x



(4) Modelar la función polinomica que tiene cortes en

$x=-5$, $x=3$, $x=-2$, $x=7$

$(x+5)$ $(x-3)$ $(x+2)$ $(x-7)$

$(x+5)(x-3) = x^2-3x+5x-15$
$= x^2+2x-15$

$(x^2+2x-15)(x+2)$ $x^3+2x^2+2x^2+4x-15x-30$
$x^3+4x^2+11x-30$

$(x^3+4x^2+11x-30)(x-7) = x^4-7x^3+4x^3-28x^2-11x^2+77x-30x+$
$x^4-3x^3-39x^2-47x+210$

Figura B.32: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.20 Estudiante 24

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Este estudiante tiene conocimientos previos a las funciones polinómicas, no distingue si la función es simétrica, cuando es una función par o impar, desconoce como hallar sus intervalos y cómo graficar la función.

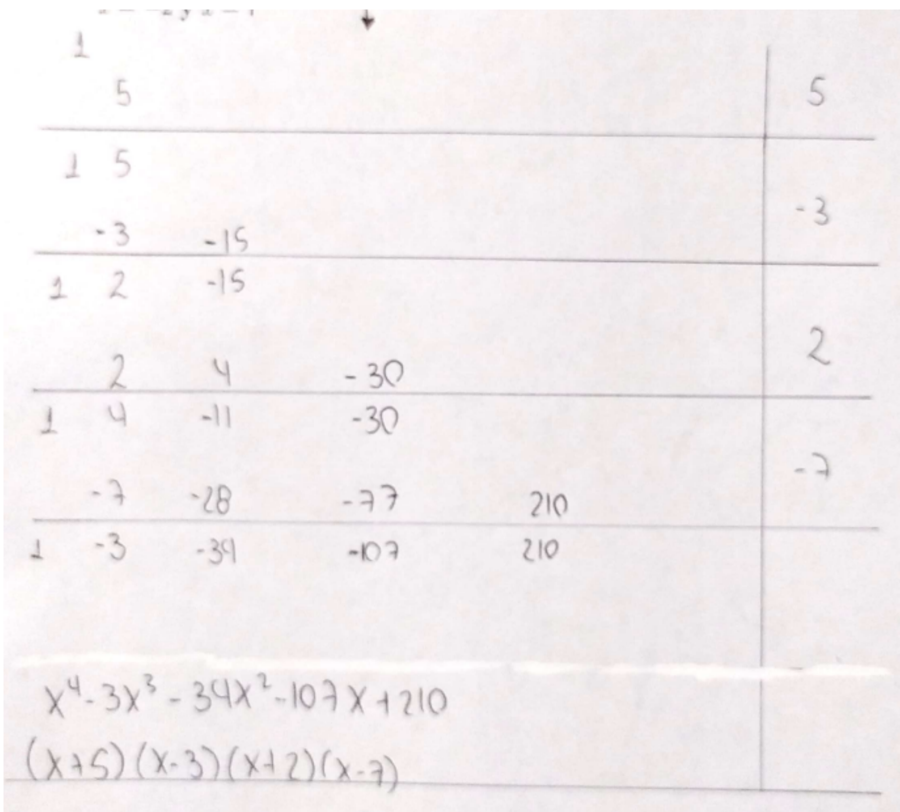


Figura B.33: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

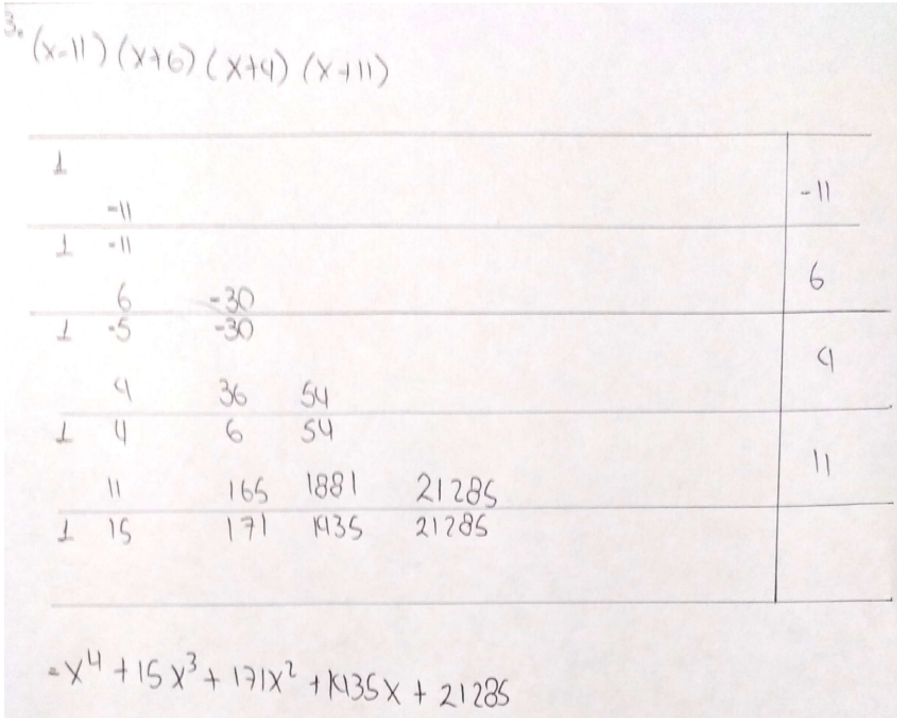


Figura B.34: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.21 Estudiante 25

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función		X
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

Este estudiante solo modelo la función polinómica. Presenta desconocimiento parcial del tema.

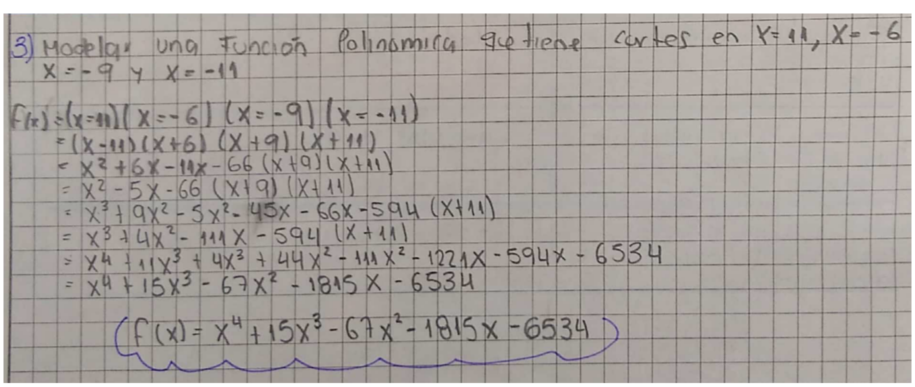
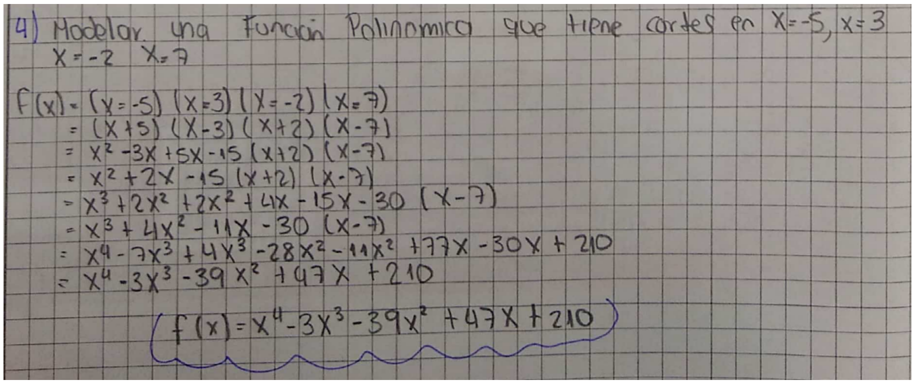


Figura B.35: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x


4) Modelar una Función Polinómica que tiene cortes en X=-5, X=3
X=-2 X=7

$f(x) = (x=-5)(x=3)(x=-2)(x=7)$
$= (x+5)(x-3)(x+2)(x-7)$
$= x^2-3x+5x-15\ (x+2)(x-7)$
$= x^2+2x-15\ (x+2)(x-7)$
$= x^3+2x^2+2x^2+4x-15x-30\ (x-7)$
$= x^3+4x^2-11x-30\ (x-7)$
$= x^4-7x^3+4x^3-28x^2-11x^2+77x-30x+210$
$= x^4-3x^3-39x^2+47x+210$

$f(x) = x^4-3x^3-39x^2+47x+210$

Figura B.36: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.22 Estudiante 26

		Cumple	No Cumple
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas		X
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante conoce lo básico del tema. Posee escaso conocimiento frente la temática.

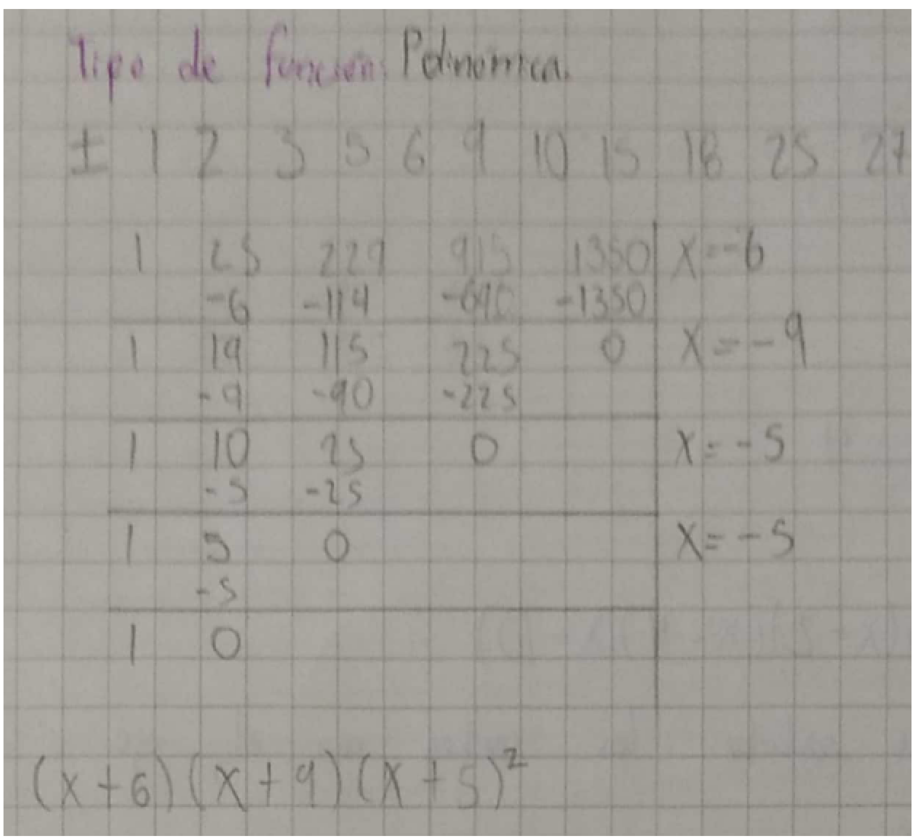


Figura B.37: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

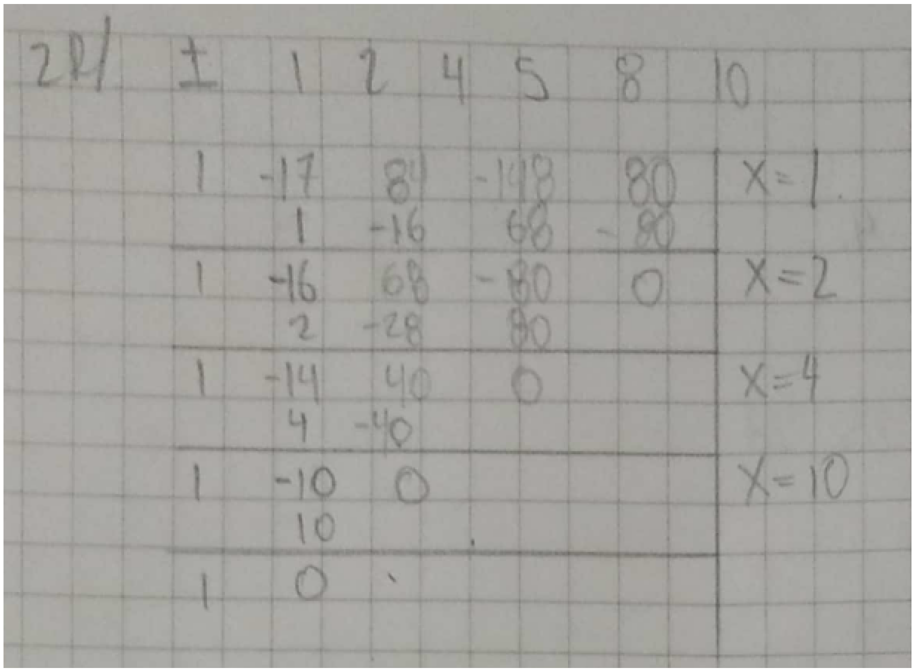


Figura B.38: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

B.0.5.23 Estudiante 27

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x		X
3	Procedimiento para calcular los cortes		X
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante sabe distinguir el tipo de función polinómica y su modelación. Presenta poco conocimiento del tema de funciones polinómicas.

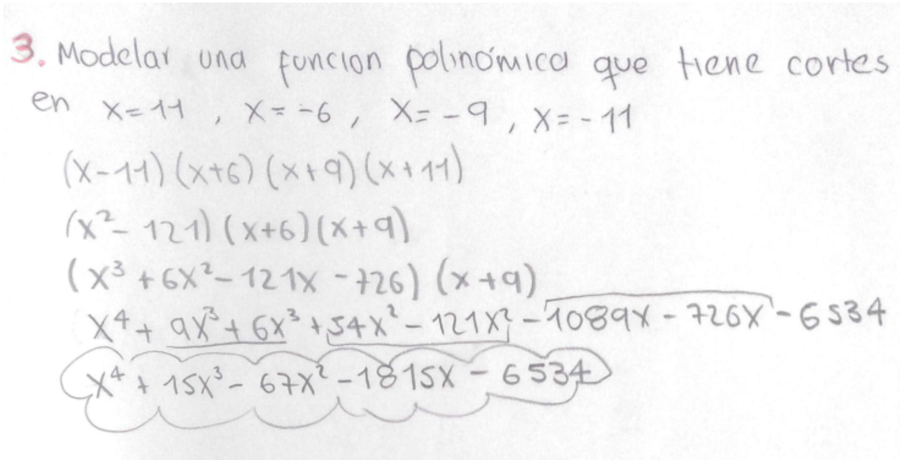


Figura B.39: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

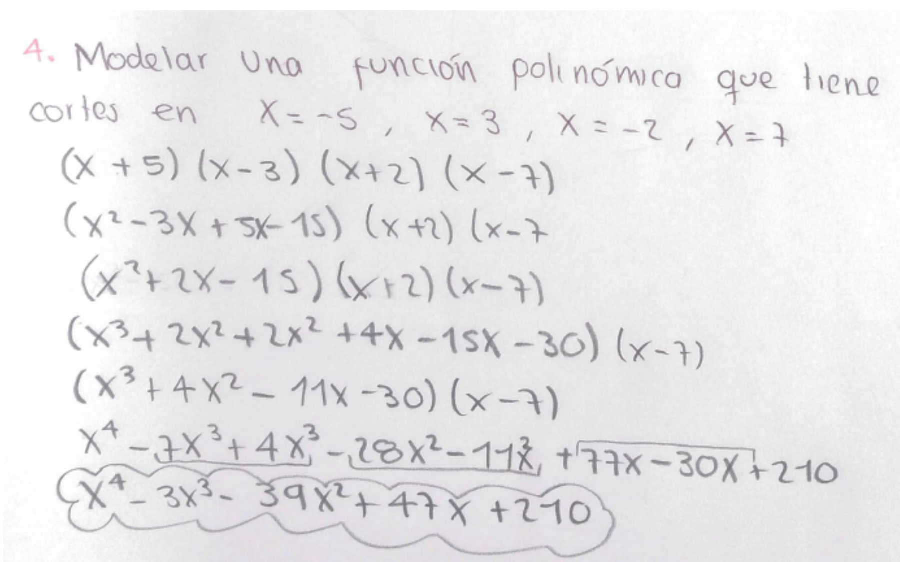


Figura B.40: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

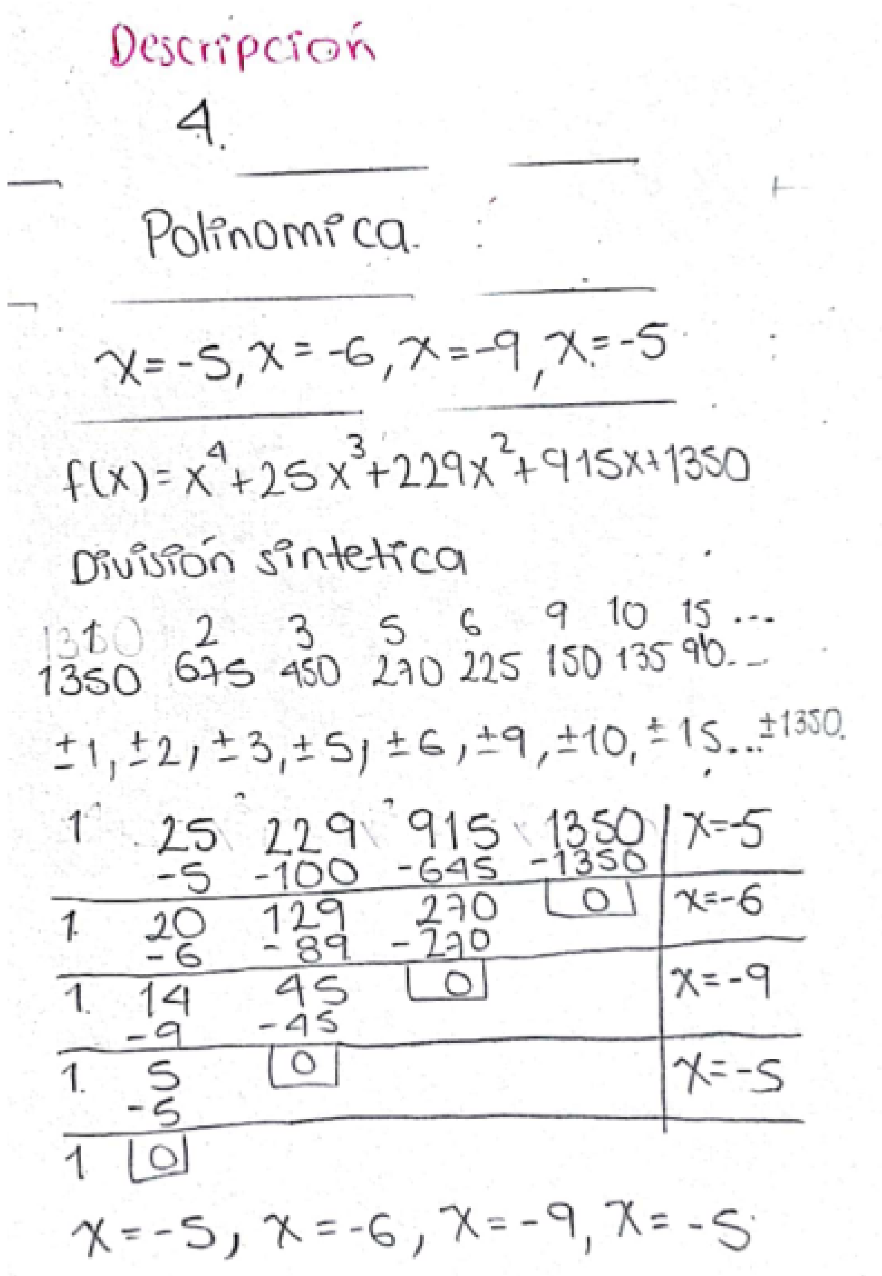
Evidencias

B.0.5.24 Estudiante 28

		Cumple	**No Cumple**
No	Conceptos Evaluados		
1	Tipo de la Función	X	
2	Cortes con el eje x	X	
3	Procedimiento para calcular los cortes	X	
4	La función es simétrica		X
5	La función es par/impar		X
6	Intervalos donde la función es positiva/negativa		X
7	Intervalos donde la función es creciente/decreciente		X
8	Modelación de Funciones Polinómicas	X	
9	Graficación de Funciones Polinómicas		X

Resumen de la Evaluación

El estudiante tiene manejos básicos de los conceptos de funciones polinómicas, pero no diferencia cuando la función es par o impar , no sabe hallar los intervalos de la función y no sabe como graficarla.


Descripción

4.

Polinomica.

$x=-5, x=-6, x=-9, x=-5$

$f(x)=x^4+25x^3+229x^2+915x+1350$

División sintetica

1	2	3	5	6	9	10	15	...
1350	675	450	270	225	150	135	90	...

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm9, \pm10, \pm15 \ldots \pm1350$

1	25	229	915	1350	$x=-5$
	-5	-100	-645	-1350	
1	20	129	270	$\boxed{0}$	$x=-6$
	-6	-84	-270		
1	14	45	$\boxed{0}$		$x=-9$
	-9	-45			
1	5	$\boxed{0}$			$x=-5$
	-5				
1	$\boxed{0}$				

$x=-5, x=-6, x=-9, x=-5$

Figura B.41: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

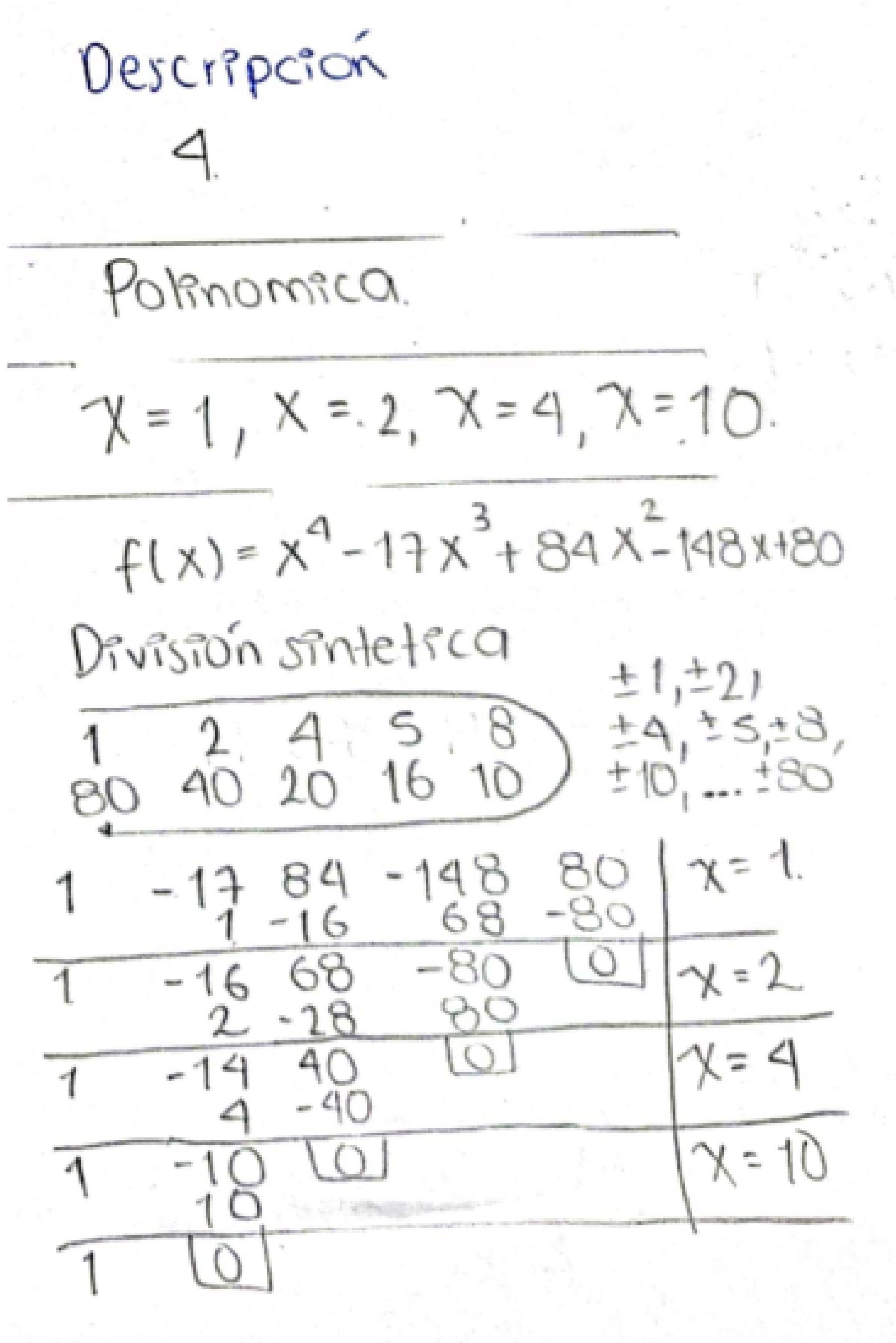


Figura B.42: Método de división sintética usada por el estudiante para encontrar los cortes de la función con el eje x

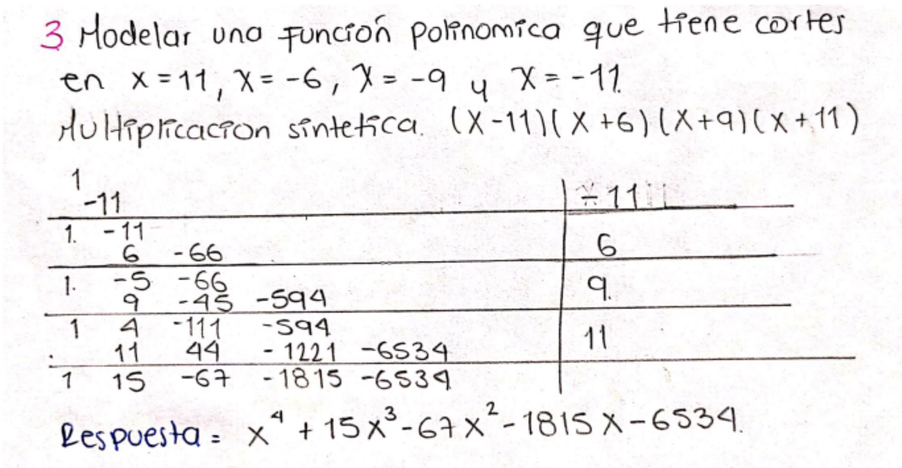


Figura B.43: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

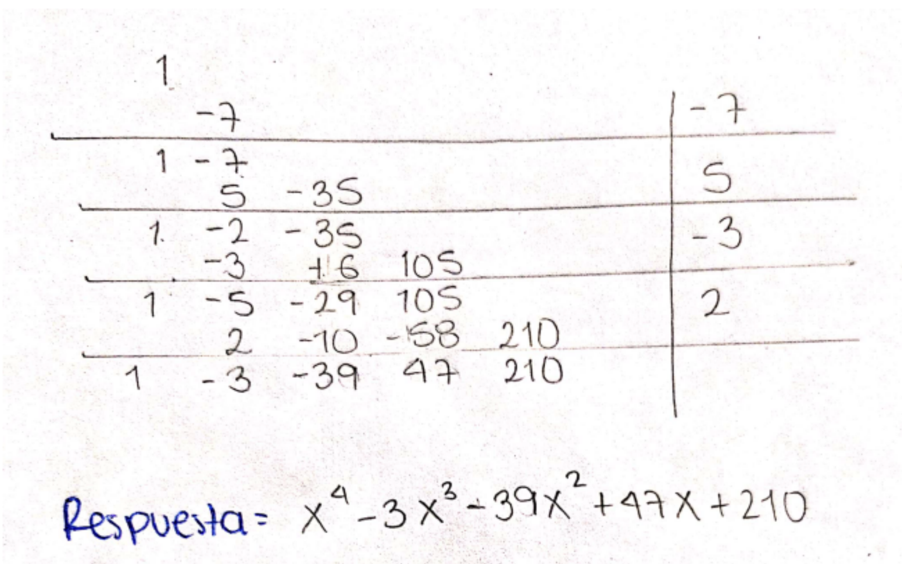


Figura B.44: Método usado por el estudiante para modelar una función polinómica dados los puntos de corte con el eje x

Evidencias

B.0.5.25

Capítulo C

Análisis de los resultados en la experimentación

A continuación se registran los análisis realizados en al fase de la experimentación.

C.1 Ejercicio 1: Modelar una función polinómica

El estudiante tenia que resolver la siguiente tarea (Tomada textualmente del archivo de word, que se aconseja revisar en la sección de anexos, antes de continuar con la lectura):

- En la aplicación, generé un ejercicio de modelación que contenga tres (3) raíces, a continuación, tome un pantallazo del problema y lo pega en la caja. Ahora resuelva el problema usando multiplicación sintética o productos notables, tome una foto y péguela en el cuadro. Seguidamente escriba la función resultante en la caja. Resuelva el ejercicio en la aplicación agregando los coeficientes de la función, tome un pantallazo antes de enviar el ejercicio de los coeficientes escritos en la aplicación. Describa con sus palabras el proceso que realizo para resolver el ejercicio. Seguidamente use el método de la ley de los signos para saber cuáles son los intervalos positivos y negativos de la función, tome una foto al procedimiento y péguelo en el cuadro. Para terminar el ejercicio, calcule el corte de la función encontrada con el eje y, y escríbalo en la caja y realice la gráfica de la función a la cual le tomará una foto y la pegará en la caja.

Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 6	Como están las equis(x) igualadas a los coeficientes , para poder aplicarlos a la **multiplicación sintética** se debe pasar las raíces donde las equis lo que ocasionara el cambio de signo, luego se hace una tabla comenzando con el número uno (1) y cero (0), este se multiplica por la primera raíz y se pone diagonal a la derecha del siguiente número, y así sucesivamente con los demás raíces, en este caso son tres , al final podemos ver que nos dan distintos valores en cada fila, como vemos que son tres raíces, su mayor exponente será tres y se escribe su función en el orden dado empezando con el mayor exponente hasta llegar al final con el termino independiente.
Estudiante 7	Pasé los coeficientes al signo contrario, luego hice **multiplicación sintética.**
Estudiante 8	Primero tome los cortes con el eje x (raíces) y mande los números al lado de la x con signo contrario y con eso hice la **multiplicación sintética**, dándome como resultado los coeficientes de la función.
Estudiante 9	El método que utilicé fue el de **multiplicación sintética** para poder hallar la ecuación de la función polinómica.

Estudiante 10	Traspuse los términos a lado de la x de tal manera que quedaran positivos. Luego los organice en orden de menor a mayor. Después empecé a realizar la **multiplicación sintética**, para así encontrar la función.
Estudiante 11	Primero cambio el signo del numero que esta en la igualdad y lo pongo a acompañar a la x posterior a esto cuando el signo este contrario continuo por multiplicar todos los resultados con **multiplicación sintética**.
Estudiante 12	Primero se deben pasar los términos independientes al lado de x, con signos contrarios. Luego se realizará la **multiplicación sintética**, con los valores que se hallaron con la X y el termino independiente. Para finalizar se añaden los exponentes de x para tener la función de manera ordena.
Estudiante 13	Primero se hizo **multiplicación sintética** para halla la función polinómica, luego procedemos hacer **intervalos positivos y negativos** para ver si la función baja o sube, por último se graficó con los puntos en x dados y se tiene en cuenta a la hora de graficar los intervalos de los signos.
Estudiante 14	Se utilizó el método de **multiplicación sintética** para modelar la función.
Estudiante 15	Se realizó la **multiplicación sintética** a los cortes entregados en x, para determinar la función general.

Estudiante 16	Multiplicamos las raíces o los cortes en el eje x utilizando la **multiplicación sintética** para modelar la función, después calculamos **los cortes en** Y usando **la tabla de signos** y por último graficamos usando los cortes en x y los resultados de la tabla de cortes en Y.
Estudiante 17	Para resolver el ejercicio aplicamos la **multiplicación sintética** cambiando el signo de los puntos dados al realizarla, con esto hallaremos la ecuación, luego realizamos los **intervalos positivos y negativos**, realizamos el **Dominio y el Rango** y graficamos con base en la información.
Estudiante 18	Para lograr resolver el ejercicio me fije en lo que me daban, al ser puntos de corte sabia que debía hacer **productos notable**s luego de esto modele la función de acuerdo a los resultados, después la caracterice para saber en que puntos era positiva y en cuales negativa y finalmente la grafique.
Estudiante 19	Primero que nada pase los números al lado de la x, después realice la **multiplicación sintética** después use la ley de los signos halle el corte en el eje y grafique.
Estudiante 20	Para llegar a la solución de esta función polinómica utilice el procedimiento de los **productos notables**.

Estudiante 21	Lo que podemos observar en este ejercicio es que genere un problema de la página jarincon.com el cual muestro en el siguiente pantallazo, empecé dándole valor a x pasando los resultados al lado izquierdo con su signo contrario, luego podemos observar que con ciertos valores que ya tenía de la x hice **multiplicación sintética** y saque la función el cual es de 3 raíces, luego vemos que hago el cuadro de signos donde calculo los valores de x cuales son **positivos o negativos** y luego el gráfico.
Estudiante 22	Aplique la **multiplicación sintética** para poder así sacar los coeficientes de la función.
Estudiante 23	Use la **multiplicación sintética** para poder saber como se expresa la función y sacar los coeficientes que necesitamos para poder hacer lo de los **signos** y graficar.
Estudiante 24	En este caso para la modelación de esta función se usó el método de **multiplicación sintética**.
Estudiante 25	Usé **productos notables** con los puntos de corte dados en el ejercicio, para encontrar la ecuación de la de la función. Verifiqué el resultado anterior con división sintética usando los mismos puntos. Usando el método de la **ley de signos** identifique los intervalos positivos y negativos que tenía la función. graficar.
Estudiante 26	Al resolver este ejercicio como primer paso se realizó **multiplicación sintética** con las raíces pasando el número independiente al lado de la x encada una de ellas, al terminar se elabora la función ($f(x) = X^3 + 16X^2 + 80X + 128$).

Estudiante 27	Las raíces las pasé al lado de la x, y con esos mismos numeros apliqué **multiplicación sintetica**.
Estudiante 28	Los cortes en X o las raices dadas por el ejercicio se despejan, estos despejes son ahora los valores con los que se hará la **multiplicación sintética,** el valor final de la multiplicación son los coeficientes de la ecuación.
Estudiante 29	Tomé los cortes en X y los volví antes del igual, ej. $x = -1(x + 1 = 0)$. Luego pasé a realizar la **multiplicación sintética** y al producto que me resultó lo modelé como una función en X.
Estudiante 30	Use las raíces dadas por el sistema al pasarlas al otro lado del igual, para de esta forma realizar la **multiplicación sintética**. Comenzando con $x + 11$, continuando a multiplicar el $x + 13$ al primer resultado, finalizando con el ultimo $x + 13$ multiplicando el resultado de la anterior.
Estudiante 31	Para realizar el ejercicio comencé por realizar **productos notables** entre los dos primeros cortes de x, después se realizó la multiplicación con el otro corte en x y de ahí se plantea la ecuación de la función.
Estudiante 32	El proceso que utilice para resolver el ejercicio fue la **multiplicación sintética**.

C.2 Ejercicio 2: Modelar una función polinómica

En el ejercicio se pregunto por dos cuestiones: Cada estudiante debia describir con sus palabras que significan los intervalos positivos y negativos en la gráfica de la función.

- **Estudiante 6** Estos intervalos nos dan a conocer la dirección en que irá la gráfica, si será creciente o decreciente, y así mismo sus seguidas direcciones.

- **Estudiante 7** Desde menos infinito sube hasta llegar al intervalo -7, luego baja hasta el -5, luego sube hasta el menos -2, luego baja hasta -1 y finalmente sube hasta mas infinito y pasa por el punto 70 en Y.

- **Estudiante 8** Estos intervalos significan que cuando x tiene valores de $-\infty$ a -14 la gráfica va por arriba del eje x (positiva), de -14 a -13 la grafica va por debajo del eje x (negativa), de -13 a -4 la grafica es positiva, de -4 a -2 la grafica es negativa y de -2 a $+\infty$ la grafica es positiva. Esto varia en cada función.

- **Estudiante 9** Estos intervalos significan en la gráfica lo puntos de corte sobre el eje x.

- **Estudiante 10** Estos intervalos nos quieren decir que la grafica de $-\infty$ a -18 estará por encima del eje x, de -18 a -16 estará por debajo del eje x, de -16 a -7 estará por encima del eje x , de -7 a -2 estará por debajo del eje x y del -2 a $+\infty$ estará por encima del eje x.

- **Estudiante 11** Sirven para graficar y saber como inicia y como termina la función, también determina los intervalos que van por abajo o encima del eje x.

- **Estudiante 12** Con estos intervalos se define hacia donde abre la función, es decir, si sube o baja en el eje y. si es positivo, sube y si es negativo, baja.

- **Estudiante 13** Estos intervalos quieren decir que si la grafica va hacia arriba $(+)$ o hacia abajo $(-)$. Es decir, hacia donde se dirige la unión de punto a punto.

- **Estudiante 14** Describen la caída de la línea que traza la ecuación, si viene del eje positivo o negativo.

- **Estudiante 15** Son los puntos de corte con el eje x.

- **Estudiante 16** Esos intervalos representan las veces que sube o baja la función.

- **Estudiante 17** Los intervalos nos dicen por donde la grafica es positiva o negativo, lo que nos dice de que forma graficamos las ondulaciones de la función.

- **Estudiante 18** Estos intervalos nos dictaminan si la posición de la función va a ser positiva o negativa en los determinados puntos.

- **Estudiante 19** Estos intervalos en la grafica significan si la función va por encima o abajo del eje x sería así del intervalo $-\infty$ a-13 es positivo de -13 a -10 es negativo (baja) de -10 a -8 es positivo (sube) de -8 a -1 es negativo (baja) y de -1 a $\pm\infty$ es positivo (sube)

- **Estudiante 20** Estos intervalos significan la dirección que lleva la gráfica, ya sea creciente o decreciente dependiendo el intervalo que tenga entre cada número, si es positivo la grafica es creciente y si es negativo la gráfica viene decreciente.

- **Estudiante 21** Eso nos da a indicar que cuando vayamos a graficar una función podemos analizar cuando es negativa o es positiva (negativa es cuando arranca de abajo del plano cartesiano y cuando es positiva arranca del desde arriba).

- **Estudiante 22** Es para saber donde se posiciona la grafica.

- **Estudiante 23** Realice multiplicación sintética para poder modelar la función, signos para saber cuando subía y cuando bajaba.

❍ **Estudiante 24** Los Intervalos positivos y negativos de esta gráfica, significan que valor toma la función al momento de graficarla con los puntos de X, si se eleva por el eje $Y+$ o baja por el eje $Y-$.

❍ **Estudiante 25** Los intervalos hallados anteriormente determinan con que valores en la ordenada, la abscisa toma valores por encima(positivos)o por debajo(negativos) del eje X. Se obtuvo que: la abscisa toma valores positivos en el intervalo$(-\infty, -24)$ y $(-1, +\infty)$ la abscisa toma valores negativos en el intervalo $(-24, -12)$ y $(-12, -1)$.

❍ **Estudiante 26** Los intervalos positivos y negativos sirven de guía a la hora de graficar de la función, para determinar en qué lado del eje (y) se abrirá o cerrará la misma con respecto a los puntos en el eje (x).

❍ **Estudiante 27** Estos intervalos definen si la curvas de la grafica de la función abren hacia arriba o hacia abajo.

❍ **Estudiante 28** Estos intérvalos representan los valores que tiene la función entre el inicio y el fin del intervalo correspondiente. Si el intervalo es negativo todos los valores serán negativos dentro de los limites del intérvalo y viceversa.

❍ **Estudiante 29** Los intervalos positivos y negativos se utilizan para determinar si la función será abierta hacia arriba o hacia abajo.

❍ **Estudiante 30** Esos intervalos significan que todos los números $>$ que -2; los números entre -4 y -11; & los números < -13 estarán por encima del eje x. El resto estarán por debajo y cuando la función pase por esos 4 números su valor en y será de cero.

❍ **Estudiante 31** Al momento de hacer la ley de los signos nos sirve para identificar el comportamiento de la gráfica es decir, si esta tiene el signo positivo iría creciente, es decir en la parte de arriba, los cuadrantes 1 y 2, si tiene un signo negativo tendrá un comportamiento decreciente es decir, en la parte de abajo, los cuadrantes 3 y 4.

❍ **Estudiante 32** Estos intervalos en la gráfica de la función significa hacia dónde va la línea de la gráfica, si es negativa, baja y si es positiva sube.

C.3 Ejercicio: Conclusiones de Modelación

Para esta actividad se pregunta al estudiante:

- Explique cuál es la diferencia entre la gráfica de la función del ejercicio (1) con la gráfica del ejercicio (2)
- Si una función polinómica tiene cinco cortes con el eje x, cómo puede describir los intervalos positivos y negativos de la función.
- **Estudiante 6**
  - La diferencia es que una tiene más cortes que la otra, así también una empezara con negativo y la otra positiva como podemos ver en la ley de signos.
  - Cuando tiene cinco cortes comenzara con el signo menos, seguido de más, intercalándose estos dos signos, quedando:$+ - + - +$
- **Estudiante 7**
  - En la del ejercicio 3 hay mas intervalos lo que hace que la grafica suba o baje mas veces.
  - Los intervalos en los cuales un polinomio es positivo o negativo es hacer un bosquejo de su gráfica, de acuerdo al comportamiento del polinomio en los extremos y las multiplicidades de sus ceros.
- **Estudiante 8**
  - Que la gráfica 1 empieza por debajo del eje x y termina por arriba del eje x mientras la gráfica 2 empieza por arriba del eje x y termina por arriba del eje x, la gráfica 1 tiene dos vértices y la grafica 2 tiene tres vértices, y que el corte con el eje “y” de la primer grafica es en 45 y el de la la segunda es en 1456.
  - Si una función polinómica tiene cinco cortes en el eje x , la grafica empieza negativa (por debajo del eje x) y termina positiva (por arriba del eje x) y tendría 6 intervalos, a no ser que se repita un corte con el eje x.

- **Estudiante 9**
  - La principal diferencia de estos dos ejercicios es que el segundo tiene un corte más sobre el eje X.
  - Un ejemplo sería: $X^5 + 37X^4 + 98X^3 + 355X^2 + 799X + 2000$
- **Estudiante 10**
  - La diferencia entre estas dos graficas es que en la primera los cortes en x serian 3 y en el corte -17 la grafica rebota, mientras que en la segunda grafica los cortes son 4 y en ninguno de sus cortes rebota, sino que por el contrario pasa una sola vez por cada corte.
  - **El estudiante Anexa fotografia del proceso.**
- **Estudiante 11**
  - El estudiante no lo realizo.
  - El estudiante no lo realizo.
- **Estudiante 12**
  - La diferencia radica en la cantidad de intervalos y de la distancia entre ello; ya que por medio de estos cambia la amplitud entre cada intervalo.
  - Los términos positivos o negativos, se definen por medio de la multiplicación de signos, la cual nos define si subimos en los positivos de y o en los negativos del mismo.
- **Estudiante 13**
  - En la gráfica 1 se observa una gráfica la cual tiene un paso limpio por los puntos, mientras que en la gráfica 3 sucede un rebote porque una raíz se repite, esto en lo que ocasiona el revote.
  - De los 5 cortes en x salen 6 intervalos los cuales serían 3 positivos y 3 negativos.
- **Estudiante 14**

- ❑ Una de ellas parte del eje positivo y la otra del eje negativo, según las variales que haya en la ecuación.
- ❑ Parte del eje negativo y termina en el eje positivo.

❍ **Estudiante 15**

- ❑ Dependiendo la cantidad de exponentes permite saber de qué dirección viene la gráfica si la función su primer exponente es par viene de arriba y si es impar viene desde abajo.
- ❑ Realizando el método de la ley de los signos para saber cuáles son los intervalos positivos y negativos de la función evaluando los 5 puntos e corte que nos proporcione la función.

❍ **Estudiante 16**

- ❑ La función 1 tiene una parte con constancia en negativo y la función 2 tiene una parte constancia positiva.
- ❑ Usando el procedimiento de ley de signos, encontramos cual será el ¨comportamiento¨ de la función.

❍ **Estudiante 17**

- ❑ La cantidad de cortes con el eje X genera una grafica con mayores intervalos, en cambio en la grafica del ejercicio numero 1 podemos ver como debido a la falta de cortes con el eje X esta es una grafica simple sin muchos intervalos.
- ❑ Si, tenga los cortes con el eje Y que tenga a la hora de hacer la resolución de la ecuación al momento de realizar los intervalos positivos y negativos con los puntos dados, nos dará la variación de la funcion.

❍ **Estudiante 18**

- ❑ La principal diferencia es que al tener mas puntos de corte en el eje x se van a formar mas parábolas.
- ❑ Se puede describir como 3 parábolas que pueden ser negativas como positivas(ya depende el ejercicio).

- **Estudiante 19**
  - Una tiene diferente comportamiento a la otra debido a que una tiene mas cortes en x que la otra y una tiene multiplicidad par lo que hace que en el ejercicio 3 rebote la función tenga un rebote.
  - Los intervalos positivos y negativos de la función se determinarían primero que todo haciendo la ley de los signos para determinar que puntos van por encima y por debajo del eje x.
- **Estudiante 20**
  - La diferencia es que cuando se realiza la ley de los signos cada una tiene diferente orden en el momento de ser ascendente o descendente.
  - Se describirían mirando que parte de la grafica va por debajo del eje x la cual seria negativa y para mirar los intervalos positivos es mirar que parte de la grafica va sobre el eje x.
- **Estudiante 21**
  - Se diferencia es que el ejercicio 1 es de raiz de 3 y el segundo es de raíz de 4 y cambian muchos las gráficas ya que tienen intervalos muy diferentes por lo tanto se grafica cambia.
  - Varia depende de los cortes, como vemos nos dicen que tiene 5 cortes en el eje x entonces hacemos la ley de los signos y ya llegamos al resultado de signo, cabe aclarar que dicho intervalo donde empiece es positivo y antes de él es negativo. Lo que arma una especie de triangulo.
- **Estudiante 22**
  - La diferencia es porque la primera grafica tiene tres cortes en el eje X entonces inicia con negativo, y la segunda grafica que tiene 4 cortes en el eje X y esa inicia siendo positiva, analizando luego de hacer la ley de signos.
  - Los intervalos negativos y positivos son$-, +, -, +, -$

- **Estudiante 23**
  - La diferencia entre mis graficas es que la primera tiene 3 cortes en x y la otra tiene 4 cortes en x pero, hay uno que rebota en el mismo que es -2.
  - Lo mas seguro es que va a tener dos cortes positivos y 3 negativos.
- **Estudiante 24**
  - La diferencia es que en el ejercicio 1 la grafica toma el valor negativo en el valor – infinito en el corte con el eje x en cambio la gráfica del ejercicio dos toma el valor positivo en + infinito.
  - **El estudiante Agrega una fotografia.**
- **Estudiante 25**
  - La diferencia es que en la función del ejercicio 1 los signos de la función entre sus ceros cambian de positivo a negativo alternándose, mientras que en la función el signo entre dos intervalos continuos, son iguales (negativos) debido a que se repite un valor de sus ceros .
  - Si la función tuviese 5 cortes con el eje X, los intervalos serian alternados : $-,+,-,+-$
- **Estudiante 26**
  - La diferencia entre la grafica 1 y 2 es el tipo de función, la forma de representación gráfica y todas sus características de cada función.
  - Los intervalos positivos y negativos de la función son el resultado de la raíz $x > n$ será caracterizado positivo con relación a n en cada una de las 5 raíces para tener como resultado la posición en y empleada a la hora de elaborar la representación gráfica.
- **Estudiante 27**
  - Que en el ejercicio 1 solo tiene 3 cortes en el eje x, y en el 2 tiene 4, tambien se diferencian en su corte en y.
  - Haciendo el mismo proceso de los ejercicios anteriores.

- **Estudiante 28**
    - Las gráficas difieren en sus valores, es decir, sus cortes en x y en y, máximo y mímimo, a pesar de tener la misma forma difieren en todos sus datos.
    - Al realizar el cálculo de los intervalos positivos y negativos usando la ley de los signos como se hizo en los ejercicios anteriores.
- **Estudiante 29**
    - La gráfica de la función uno al tener 3 raíces da un cambio en la tabla de intervalos positivos y negativos donde podemos observar que la parábola empieza abierta hacia abajo, mientras que en la gráfica dos al tener 4 raíces la parábola abre hacia arriba.
    - Los intervalos de la tabla se asumen como: en la primera columna todos los signos son negativos y en la última positivos, esta tabla forma un triángulo de signos negativos y un triángulo de positivos.
- **Estudiante 30**
    - La principal diferencia se encuentra en el numero de intervalos positivos que la grafica del segundo ejercicio posee, puesto que en el primer ejercicio la gráfica contaba únicamente con un intervalo positivo siendo este el final, sin embargo en el tercer ejercicio la gráfica posee tres intervalos positivos asemejando de esta forma a la letra “w”.
    - Para dar inicio serian 6 intervalos de los cuales usando números base, 3 intervalos serian negativos y 3 serian positivos. Siendo los impares de izquierda a derecha los intervalos negativos, por lo tanto los pares serian los positivos.
- **Estudiante 31**
    - La diferencia que se puede establecer entre las gráficas realizadas anteriormente, es que de acuerdo a la cantidad de cortes que tenga con el eje x, podemos ver como comienza y finaliza la gráfica en cuanto a sus signos, ya sean positivos o negativos, también con las

funciones que tienen 4 cortes con x se puede decir que comienza positiva y finaliza positiva.

- Estos intervalos es mucho más viable sacarlo con la ley de los signos teniendo en cuenta sus cortes y demás, pero con esto podemos deducir que al ser un número impar puede comenzar negativa y finalizar positiva o viceversa.

- **Estudiante 32**

  - La diferencia entre la gráfica del ejercicio (1) y la gráfica del ejercicio (2), es que la 1 pasa por 3 puntos en x y la 2, pasa por 4 puntos en x, obviando que su punto de corte en el eje y es diferente.
  - Si la función polinomica tuviera 5 cortes en el eje X, los intervalos se los puede describir así: $-, +, -, +, -, +$

C.4 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 1

En este ejercicio, se pidio al estudiante lo siguiente:

- Describa con sus palabras los pasos que uso para realizar la división sintética y que herramientas uso para calcular los divisores del término independiente.

- **Estudiante 6** Primeramente para realizar la división sintética se debe calcular los **divisores** del término independiente, luego se comprueba en la función **remplazando** los valores de equis (x) por los divisores obtenidos, será raíz el número que remplazado de como resultado cero (0), luego se genera un cuadro poniendo los términos de la función y se empieza multiplicar la raíz por el primer término y su resultado se pone en la parte diagonal derecha, abajo del siguiente término de la función , estos dos términos se suman ,siempre teniendo en cuenta sus signos y ese resultado se es multiplicado por la raíz y se pone diagonal arriba debajo del siguiente término de la función y así sucesivamente hasta llegar a los términos uno(1) y cero (0).

- **Estudiante 7** Primero que todo saque los divisores de 96 que son: (1-96), (2-48), (3-32), (4-24), (6-16), (8-12).Luego metí la función en la **calculadora** a probar con que **divisores** daba como resultado cero(0)
- **Estudiante 8** Primero, como el numero independiente era un poco grande, mediante la tabulación en la **calculadora** halle los cortes con el eje x (que son los valores que en el resultado de la tabulación sea cero) y luego hice la división sintética para ver que si los valores hallados son correctos .
- **Estudiante 9** Primero busqué los **divisores** del termino independiente, que como resultado den números enteros, después reemplacé X por posibles divisores que como resultado me dieran =0, después hice una multiplicación en diagonal con el número del anterior resultado y así sucesivamente hasta que todos llegaran a 0.
- **Estudiante 10** Primero saqué los **divisores** del término independiente utilizando la **calculadora**. Luego use la calculadora para hallar las raíces. Y luego realicé la división sintética.
- **Estudiante 11** Primero que todo se sacan los **divisores** del termino independiente, luego evaluamos cada divisor **remplazandolo** en la función por la x, los que den 0 al resultado son los divisores que podemos utilizar, se deben evaluar los divisores con signos mas y menos.
- **Estudiante 12** Lo primero que se debe hacer es sacar los **divisores** del término independiente, los cuales se **reemplazan** en la función hasta reunir los cuales den como resultado 0. Luego se dejan en la forma x=#, para empezar a realizar la **división**. Para la división se debe multiplicar por el numero que hay en x y luego restar. Así hasta que todos los términos queden en 0.
- **Estudiante 13** Primero analizamos la ecuación, luego le sacamos los **divisores** al termino independiente, solo saque los primero 50 de

manera que puse el termino independiente he iba dividiéndolo en orden número por número, al tener estos divisores copie la función en la **calculadora** la guarde en memoria y fui **evaluando** con los divisores obtenidos hasta que uno de ellos me diera 0, al encontrar las 6 raíces empecé a hacer división sintética.

- **Estudiante 14** Primero se haya los **divisores** del termino independiente y luego se divide uno a uno hasta encontrar el número que al multiplicarlo con otro de el valor del termino independiente hasta que todos los coeficientes queden en cero.

- **Estudiante 15** Primero se sacan los **divisores** del termino independiente y se busca el múltiplo que me aproxime los resultados más a cero.

- **Estudiante 16** $F(x) = x^7 + 14x^6 + 82x^5 + 260x^4 + 481x^3 + 518x^2 + 300x + 72$ Comencé calculando los **divisores** del término independiente (72), luego usando la **calculadora** comencé a almacenar de uno en uno los divisores en la variable x por ejemplo (-1+shift+RCL+).x) luego **evaluamos** la función hasta que el resultado fuera 0, luego comenzamos a resolver para el ejemplo usaremos el -1, comenzamos multiplicando el -1 por el 1 nos da como resultado -1, lo restamos al 14 y nos da 13, ahora el -1 lo multiplicamos por 13, nos da -13, lo restamos al 82 y nos da 69, otra vez multiplicamos -1 pero esta vez por el 69 nos da como resultado -69 se lo restamos al 260 y nos da como resultado 191 y seguimos así sucesivamente hasta que el último número nos dé como resultado 0.

- **Estudiante 17** Primero averigüe los términos de X que utilizaría para resolver la ecuación en la d**ivisión sintética**, estos los encontré cambiando el valor de X en la ecuación y los resultados que daban (0), eran los que utilizaba, haciendo de esta manera una tabla de los números que cambiaba por X, después de averiguar los términos de X a utilizar, hice el procedimiento de división sintética.Para averiguar los **divisores** del termino independiente hice una tabla donde dividía el termino independiente por números de 1 en adelante, donde solo daba por validos aquellos que daban un numero entero, y los decimales eran inválidos, se intentaba realizar esto con números hasta alcanzar 2 números consecutivos uno del otro.

- **Estudiante 18** Usando la herramienta de la **calculadora** saque los puntos de corte en referencia al eje x y luego los verifique de la manera que se ve en la imagen.
- **Estudiante 19** Para sacar los **divisores** tome el termino independiente y lo dividí por todos los números que me dieran un entero y para la **división sintética** puse los coeficientes de la funcion y empezó a dividir por los divisores que halle del termino independiente.
- **Estudiante 20** Los pasos para hacer la **división sintética** es poner todos los intervalos de la función y hacer las operaciones correspondientes con los valores de los cortes con el eje x, la herramienta utilizada para sacar los puntos de corte con el eje x es utilizar la **calculad**ora y sacar los cortes que cuando se evalúan en la función dan como resultado cero.
- **Estudiante 21** Para realizar la **división sintética**, empecé hallando los divisores en la **calculadora**, ingresando la función y luego darle en el botón CALC para ver con qué valor de x me daba, ya después de tener los **divisores** empecé a desarrollar la división ingresando los números de la función y multiplicarlo por el divisor hasta dar 0.
- **Estudiante 22** Primero saque los **divisores** del 216, luego para sacar los cortes en el eje X, **reemplace** los números en la función y que su resultado sea igual a 0, de ahí hice el debido proceso para una **división sintética** usando los números que dieron los cortes en el eje X.
- **Estudiante 23** Dividí el numero por todos los números que me dieran números completos y pare cuando ya salían números repetidos todo lo hice con la **calculadora**.
- **Estudiante 24** Se sacaron los **divisores** de el termino independiente y luego estos se aplicaron con numero negativo en la **división sintética**.
- **Estudiante 25** Saque los **divisores** del termino independiente y tome los valores con los que la división sea entera , usando **calculadora** Por

método de tanteo, reemplace los divisores (positivo y negativo para cada uno) en la función dada y tome los que me daba como resultado cero Con los valores obtenidos use **división sintética.**

- **Estudiante 26** Primero que todo calcule los **divisores** del término independiente con el modo tabla de mi **calculadora** para hacerlo más rápido y por último la **división sintética** la realice con el método visto en clase, obviamente reemplazado los divisores en x en la calculadora en su forma positiva y negativa hasta que tenga como resultado 0 y utilizarlo en la división sintética.

- **Estudiante 27** Dividiendo al termino independiente por los numeros que por resultado de un numero entero hallé los **divisores**, y esos divisores los evalué en la función, y si al evaluarlos en la función el resultado es 0, quiere decir que es un corte en x.

- **Estudiante 28** Para realizar la **división sintética** se tienen que tomar los puntos de corte, los cuales se hallan en la calculadora com la forman/x, siendo n el término independiente, así encontrando los divisores n. Una vez hallados los **divisores** se reemplaza cada uno en la ecuación, aquellos valores con los cuales la ecuación es igual a cero (0) serán los puntos de corte. Con los puntos de corte hallados empieza la división sintética, multiplicando el primer corte con el primer coeficiente, sumar o restar esa multiplicación con el segundo coeficiente y el resultado de esta suma o resta multiplicarlo por el valor del punto de corte y este resultado multiplicarlo por el siguiente coeficiente y seguir con esta forma hasta llegar al ultimo coeficiente. El proceso se repite con los demás valores en los que la ecuación da igual a cero (0) hasta que no queden más coeficientes y los valores que hayan sido usados serán los puntos de corte de la gráfica.

- **Estudiante 29** Primero tomé el número independiente de la función y lo descompuse en números que me dieran como resultados productos enteros, luego introduje toda la función en la **calculadora** para darles el valor ya fuera con signos positivos o negativos (en función de x) los que me dieran como resultado cero, los tomaba en orden y pasaba a realizar la **división sintética**. Al final de cada número de la ecuación me debía dar como resultado cero.

- **Estudiante 30** La realización de una **división sintética** esta divida en varios pasos, estos son:1. Calcular los divisores del termino independiente.2. Calcular los **divisores** anteriormente encontrados en la función y buscar aquellos en los cuales se iguale a cero.3. Al encontrar dichos divisores igualarlos a la "x" y comenzar la división sintética.4. Durante la división se debe multiplicar el primer divisor por el coeficiente del primer termino y (+o-) al coeficiente del segundo termino, a este resultado se le vuelve a multiplicar el primer divisor y este resultado se suma o resta al siguiente coeficiente.5. Al terminar con todos los términos, el ultimo coeficiente debe resultar en cero, después de ser sumado o restado de las multiplicaciones anteriores.6. Cuando esto se cumple se repite el paso 4 y 5 con el siguiente divisor, hasta que todos los coeficientes resulten en cero.

- **Estudiante 31** Para realizar la **división sintética**, se requieren **divisores** del termino independiente para así evaluar cada uno de ellos en la función, si se obtiene un resultado de cero llegamos a la conclusión que es un corte con el eje x y podemos realizar la división sintética, que se basa en tomar todos los coeficientes de la función y con cada uno de los cortes obtenidos proceder a multiplicar por el primer valor, ubicarlo debajo del mismo para efectuar la siguiente operación (suma o resta, según corresponda el signo) y continuar con la división sintética hasta obtener los resultados de 1 y 0 que nos indica que hemos finalizado de manera satisfactoria, si se ha realizado el procedimiento de forma correcta.

- **Estudiante 32** Normalmente se usa la **calculadora**, colocando la función y se saca los **divisores** del término independiente, y luego con la calculadora se hace número por número, con los que me de cero, con esos se hace la división sintética, pero en mi caso, no tengo la calculadora con la opción de calcular y además no me sale, no puedo hacerlo así, entonces utilice un método fácil, que es con la calculadora que instalé en el celular, coloque la función, fui a la gráfica y de ahí saque los corte en el eje “x”, y luego hice la **división sintética**.

C.4.1 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 2

En este ejercicio, se pidio al estudiante lo siguiente:

- Explique porque las raíces del polinomio se calculan de los divisores del término independiente.
- **Estudiante 6** Se puede sacar los divisores porque es un término independiente, lo que quiere decir que no está acompañado de ninguna variable en este caso no tiene equis (x).
- **Estudiante 7** Partimos de los divisores del término independiente, con estos valores aplicamos el teorema del resto o residuo y sabremos para que valores la división es exacta.
- **Estudiante 8** Por qué el termino independiente es el numero que no tiene ninguna variable con él.
- **Estudiante 9** La verdad no sé.
- **Estudiante 10**¿Las raíces del polinomio se calculan del término independiente porque cada divisor de este termino puede ser una raíz del polinomio, es por esto que evaluamos los divisores en la función y si ese número anula dicha función eso quiere decir que es una raíz del polinomio.
- **Estudiante 11** Porque el termino va a remplazar a x en la funcion.
- **Estudiante 12** Primero, el termino independiente es un numero que no tiene variables ni tampoco tiene un exponente. Segundo, porque al encontrar los divisores del mismo; algunos de ellos deben cancelar la función o igualarla a cero.
- **Estudiante 13** Porque como dice el termino independiente es aquel que ni tiene x ni esta elevado por lo cual ese es el único termino al cual se le pueden sacar divisores.

- **Estudiante 14** Porque son los valores que satisfacen la ecuación.

- **Estudiante 15** Las raíces enteras de un polinomio de coeficientes enteros serán divisores del término independiente.

- **Estudiante 16** Porque los divisores del término independiente nos permiten saber cuáles son los ¨ceros¨ que ¨anulan¨ el polinomio.

- **Estudiante 17** Cuando le sacamos los divisores del término independiente podemos tabular de manera más rápida ya que todos los números que nos den pueden ser posibles cortes en el eje X, mientras que los números que al dividirlos por el término independiente y nos den decimales son números que no podremos utilizar, este proceso acelera nuestros procesos.

- **Estudiante 18** El estudiante no realizo este espacio.Estudiante 19 Porque al ser independiente se puede dividir ya que no esta acompañado de una variable o elevado a un exponente y porque con ese se puede obtener el corte en y.

- **Estudiante 20** Las raíces de un polinomio son los divisores del termino independiente ya que si no tuviera termino independiente seria divisible por cero.

- **Estudiante 21** Ya que con esos valores sabremos si el valor es exacto y nos tiene que dar un resultado de 0.

- **Estudiante 22** Porque se necesita de las raíces para reemplazarlas en la función y este resultado nos de cero.

- **Estudiante 23** Tengo en cuenta los corte en X que son los números que acompañan a la X y la tabla de los intervalos positivos y negativos que me dicen si sube o baja.

- **Estudiante 24** El estudiante no realizo este punto.

- **Estudiante 25** El estudiante responde por medio de una fotografia.

- **Estudiante 26** Los divisores del término independiente pueden ser cortes en x o raíces, por lo cual al sustituir x en la operación el resultado (0) nos indicará que es una raíz.

- **Estudiante 27** Porque los divisores del termino independiente, pueden ser posibles cortes en x, los divisores que den numero decimal son descartados.

- **Estudiante 28** Para así poder encontrar los valores que al reemplazarlos en la ecuación, esta sea igual a cero (0) y poder ir reduciendo los coeficientes de la división sintética. Reduciendola uno por uno con estos divisores del termino independiente hasta terminar la división sintética y encontrar las raices o puntos de corte con X.

- **Estudiante 29** Porque al darle el valor a x en función de los divisores del término independiente (ya sea con signos positivo o negativo) la función me debe dar cero.

- **Estudiante 30** Por dos sencillas razones:1. Porque al ser el termino independiente un termino sin “x”, da igual el valor que tome “x” porque su valor no se vería afectado, permitiendo que el cálculo de las raíces sea más sencillo.2. Porque las raíces son aquellos valores que al ser calculados en la función dan cero, por lo cual entre estos divisores están aquellos números que cumplen con las características de las raíces.

- **Estudiante 31** Con los divisores del término independiente podremos evaluar la función y poder obtener los cortes con el eje x, teniendo en cuenta que dicho resultado debe dar 0.

- **Estudiante 32** Como su nombre lo dice, es el único termino independiente, es decir el único que no tiene un acompañante, como una X o un exponente, es por este motivo que se le calculan a este los divisores.

C.5 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 3

En este ejercicio, se pidio al estudiante lo siguiente:

- Explique con sus palabras cuáles elementos tiene en cuenta para realizar la gráfica de la función.
- **Estudiante 6** Se debe tener en cuenta las raíces como también mirando los intervalos que nos darán la gráfica y por último ver la intersección que tendrá en eje y.
- **Estudiante 7** Según los divisores que saque, son los puntos que se ubican en el eje x y el corte en el eje en y es el termino independiente, y según la tabal de signos sube y baja.
- **Estudiante 8** Tengo en cuenta los cortes con el eje x, los intervalos para saber cuando la grafica va positiva y cuando negativa, y el corte con el eje y.
- **Estudiante 9** Tengo en cuenta: Los puntos de corte en el eje X, la ecuación de los signos ya que es determinante para saber hacia dónde se dirige una función (arriba o abajo) y el número independiente que es el corte sobre el eje Y.
- **Estudiante 10** Los elementos que tengo en cuenta a la hora de graficar son: Los cortes en el eje x Los intervalos positivos y negativos El corte en el eje y, que seria el termino independiente.
- **Estudiante 11** Los puntos de corte del eje x y los intervalos positivos y negativos.
- **Estudiante 12** Para la realización de la gráfica se necesitan los intervalos o cortes en x, además del corte en y que nos daría el límite de nuestra función. Por ultimo se necesita la multiplicación de signos para saber la dirección de la misma.

- **Estudiante 13** En primer lugar, se ubican la raíz en el eje x, luego tenemos que analizar los intervalos positivos y negativos dependiendo de estos es que la gráfica queda hacia arriba (+) o hacia abajo (-) al unir los punto y también estos indican hacia adonde van las puntas.Estudiante 14 Los calores del eje X y el termino independiente .

- **Estudiante 15** Los elementos que se deben tener en cuenta al graficar la función son los cortes con el eje x que serían los intervalos o los factores de la función y el corte con el eje y se busca evaluando un punto en la función. Y el comportamiento lo podemos analizar realizando una tabla para evaluar los intervalos y sus signos.

- **Estudiante 16** Tenemos en cuenta los siguientes elementos: los cortes en x y los intervalos de Y si son positivos o negativos.

- **Estudiante 17** Los puntos del eje X, Intervalos positivos y negativos, y el corte del eje y.

- **Estudiante 18** Para realizar la gráfica tengo 3 puntos importantes los cuales son los puntos de corte en el eje x, el resultado de los signos después de la caracterización y el corte en el eje y, pudiendo así realizar una grafica aproximada de tal función.

- **Estudiante 19** Para graficar la función los elementos que se tienen en cuenta son: los cortes en el eje x, el corte en el eje y, los intervalos positivos y negativos para saber si sube o baja la función y si en algún caso tiene multiplicidad o un rebote.

- **Estudiante 20** Para realizar un buen bosquejo de la grafica los elementos principales que deben ser tomados en cuenta son los cortes con el eje x, también es muy importante la ley de los signos para identificar el comportamiento de la grafica y por último tener en cuenta el corte con el eje y.

- **Estudiante 21** Hay que buscar los valores de x para así poder saber qué puntos hace corte en x en la gráfica hallar sus intervalos positivos y negativos, y su corte en y ya por ultimo hacer un plano cartesiano y graficarla con base a los resultados que hallamos.

- **Estudiante 22** Para realizar la gráfica de la función hay que tener en cuenta los cortes en el eje X, los intervalos positivos y negativos, y el corte en el eje Y.

- **Estudiante 23** Lo primero que tenemos que saber cuales son los valores que toma la X después de esto hacemos multiplicación sintética después esto valores que nos dan los organizamos como: F(x):los valores por nos dieron al final en la multiplicación, luego miramos cuales intervalos son positivos y cuales negativos para poder saber si sube o bajan en la grafica.

- **Estudiante 24** El estudiante no realizo este punto.Estudiante 25 Puntos de corte o que toquen al eje X Conte con el eje Y (termino independiente) Calculo de intervalos positivos y negativos para saber donde ca cada parte de la grafica.

- **Estudiante 26** Los elementos que se tiene en cuenta para realizar la gráfica son los intervalos positivos y negativos, puntos en el eje x y el corte con el eje y.Estudiante 27 Los cortes en x, el corte en y, los ejes x y Y, el rango.

- **Estudiante 28** Máximo o minimo, puntos de corte en X y Y, los intérvalos positivos y negatos y al saber hallar el mimimo o máximo se puede hallar el punto máximo y minimo que hay entre los intervalos.

- **Estudiante 29** Para realizar la gráfica de la función primero tomo en cuenta las raíces que me resultan de dividir el término independiente y hacer la división sintética, tales raíces siempre estarán en (x), lo que me daría una línea de valores en el eje x. Para obtener los valores en (y) evaluamos la función en cero y así ya sé hasta dónde pasaría la parábola. Para determinar si la parábola iba a ser abierta hacia arriba o abajo tomé en cuenta la tabla de intervalos positivos y negativos, donde el resultado me indica de qué número hasta qué número este se abre y se cierra.

- **Estudiante 30** Los principales elementos a tener en cuenta son los intervalos descifrados por la ley de signos, para de esta forma evitar los cálculos innecesarios y hacer una grafica que se asemejé a la real. Por otro lado, se debe tener en cuenta las raíces y el corte en y para generar una gráfica satisfactoria.Estudiante 31 Al momento de realizar la gráfica de la función, ubico los puntos de corte con el eje x y el corte con el eje y, de allí se comienza a realizar el bosquejo que se obtiene teniendo en cuenta la ley de los signos para saber si la función crece o decrece.

- **Estudiante 32** Primero que todo los cortes en el eje x, que son $-7, -4, -3, -3, -2, -2$,, en segundo lugar esta el corte en el eje y que es 1008 por ultimo calculo los intervalos negativos y positivos para saber en que dirección va la gráfica, hacia riba o hacia abajo.

C.6 Ejercicio 3: Caracterización de una función polinómica - parte 4

En este ejercicio, se pidio al estudiante lo siguiente:

- Explique con sus palabras un proceso completo para caracterizar y graficar una función polinómica.

- **Estudiante 6** Primero nos dan la función que podría tener distintos términos elevados a una potencia de forma decreciente, en ella buscamos el termino independiente que mayormente esta al final de la función y se lo identifica porque está no tendrá una variable que la acompañe, luego lo sacamos aparte y le buscamos sus divisores, luego remplazamos estas raíces en la función comenzando por más-menos uno (\pm1), y vemos cual nos sirve, nos servirá la raíz que por resultado de cero en la función. Procedemos a realizar la división sintética que consiste en sacar los términos independientes sin la variable que los acompaña y se hace una tabla donde estos se multiplicaran hasta ser simplificados a cero, es así como encontramos sus raíces (puntos de corte). Luego antes de hacer la gráfica hacemos la tabla de ley de signos los que nos permitirá ver como ira la gráfica si decreciente o creciente y también debemos calcular su intersección en eje y, la calculamos remplazando las variables por el cero (0) donde siempre nos dará el último número de la función, ósea el termino independiente, es así luego de ello graficamos haciendo dos líneas una en x que será la horizontal donde pondremos los puntos de corte encontrados y en el eje y que será el vertical y se pondrá la intersección que será el termino independiente.

- **Estudiante 7** Primero que todo se debe ubicar los puntos en el eje de x, luego de eso, hacer multiplicación o división sintética, ubicar esos puntos en el plano y luego con la tabla de signos se define en donde sube y baja los intervalos.
- **Estudiante 8** Primero encuentro los divisores del número independiente o tabulo en la calculadora y miro los valores que den cero en el resultado, y con eso hallo los cortes con el eje x haciendo división sintética, después con los cortes realizo el cálculo de los intervalos positivos y negativos para saber cómo va la gráfica. Luego evalúo la función con x=0 ó simplemente tomo el valor del termino independiente y este es el corte con el eje "y", continuamente hago el plano y coloco los valores de los cortes con el eje "x" y de" y", según los intervalos positivos y negativos voy graficando y también paso la grafica por el corte en y. Así observo que el dominio son todos los números reales en x y el rango dependiendo de la función pueden ser todos los números reales en "y" o puede tener un punto mínimo o máximo.
- **Estudiante 9** Depende de si nos dan sus puntos de cortes, ahí nos toca hacer multiplicación sintética para encontrar la función, si nos dan su función hacemos división sintética y buscamos los puntos del corte sobre el eje X, hacemos la ley de los signos y miramos si su función se dirige hacia abajo o hacia arriba y graficamos. Su número independiente es el corte en el eje Y.
- **Estudiante 10** Primero se tiene en cuenta el término independiente. Luego sacamos los divisores del termino independiente. Remplazamos

en la función cada divisor del termino independiente en x y si da cero quiere decir que ese numero es un corte en x. Teniendo los cortes con el eje x hallamos los intervalos positivos y negativos que nos va decir si la función está por debajo o por encima del eje x.

- **Estudiante 11** Para caracterizar se debe tener en cuenta el periodo y rango y para graficar se encuentra los puntos de corte co los divisores del termino independiente, luego calculamos intervalos positivos y negativos y ya se puede graficar.

- **Estudiante 12** Primero, se debe utilizar el término independiente, hallarle los divisores que lo dividen de forma exacta; luego, estos se remplazan en la función hasta tener los números que nos cancelen la función. Luego, se realiza la multiplicación sintética basados en estos números, la multiplicacion y por ultimo se grafica.

- **Estudiante 13** Lo primero que debemos hacer es sacarle los divisores al termino independiente , al hacer eso tenemos que evaluar eso divisores en la función y los que den 0 son las raíces,de ahí se hace intervalo de positivos y negativos teniendo en cuenta la ley de signos, al obtener estos intervalos ya tenemos todo para graficar, procedemos a ubicar las raíces en el eje x del plano cartesiano dependiendo su signo y para graficar se tiene que tener en cuenta los intervalos para saber si la unión de los puntos va hacia arriba o hacia abajo.

- **Estudiante 14** Primero se debe encontrar los divisores del termino independiente, luego efectuar la división sintética para hallar los valores del eje x y así poder graficar la función.

- **Estudiante 15** Primero se debe determinar los cortes en x y en y, en caso de modelar se realizar multiplicación sintética, y en caso de factorizar se realiza división, con estos datos ya nos permite visualizar la grafica.

- **Estudiante 16** Primero factorizamos el polinomio para encontrar los cortes en x usando la división sintética (si lo que tenemos son los cortes en x entonces usamos la multiplicación para modelar la función), después calculamos los cortes en Y usando la tabla de signos y por último graficamos usando los cortes en x y los resultados de la tabla de cortes en Y

- **Estudiante 17** Modelamos la función mediante la operación correspondiente ya sea multiplicación sintética o división sintética, con esta operación averiguamos la ecuación de la función o sus puntos de corte con el eje X. Hacemos lo intervalos positivos y negativos con los puntos de corte del eje X. Ponemos el Dominio y el rango. Graficamos con los cortes del eje X y los intervalos, de esta forma sabremos que forma tiene la Grafica.

- **Estudiante 18** Para alcanzar una correcta caracterización, debemos tener muy en cuenta algunos puntos, en este caso necesitamos conocer la función para saber el corte exacto en el eje y, también sus puntos de corte en el eje x y finalmente saber en qué posición estará en cada intervalo, es decir si es positivo o negativo.

- **Estudiante 19** Primero se hallan los cortes en x después se halla el corte en y, para después se sacan los intervalos positivos y negativos para saber como se comporta la función si sube o baja.

- **Estudiante 20** Si para el ejercicio nos proporcionan los cortes con el eje x lo primero que se tiene que hacer es multiplicación sintética para encontrar la función luego se realiza la ley de los signos para saber que comportamiento tiene la gráfica, el termino independiente es el corte con el eje y, con esto ya se podría realizar un buen bosquejo de la grafica de la función.

- **Estudiante 21** Para poder graficar y caracterizar una función completa se debe tener una buena modelación, un corte en y enx, rango y dominio, intervalos positivos y negativos .

- **Estudiante 22** Saco los divisores del término independiente ,luego realizo la división sintética, realizo la gráfica con los puntos que saque de la división sintética ,y luego el corte en Y.

- **Estudiante 23** Lo primero que tenemos que saber cuales son los valores que toma la X después de esto hacemos multiplicación sintética después esto valores que nos dan los organizamos como: F(x):los valores por nos dieron al final en la multiplicación, luego miramos cuales intervalos son positivos y cuales negativos para poder saber si sube o bajan en la grafica.

- **Estudiante 24** Se sacaron los divisores de el termino independiente y luego estos se aplicaron con numero negativo en la división sintética.

- **Estudiante 25** Saque los divisores del término independiente y tome los valores con los que la división sea entera, usando calculadora Por método de tanteo, reemplace los divisores (positivo y negativo para cada uno) en la función dada y tome los que me daba como resultado cero Con los valores obtenidos use división sintética Con método de la ley de signos calcule el signo de los intervalos entre sus ceros Graficar (si el intervalo es positivo o negativo la función está por encima o por de bajo del eje X.

- **Estudiante 26** Para caracterizar y graficar una función polinómica se realizan los siguientes pasos secuenciales: Identificar el tipo de problema (raíces o función x grado) Emplear Multiplicación sintética en el caso de tener las raíces para obtener la función f(x)=. En el caso de tener la función mostrada posterior mente se deben seguir los siguientes pasos:Sacar divisores del término independiente (80) En la calculadora introducir la función y calcular x con los divisores previamente calculados y utilizar quien dé como resultado 0. Con dichos valores realizar la división sintética Calcular intervalos negativos y positivos. Graficar con los cortes en x, determinar corte en y (termino independiente) y graficar con ayuda de los intervalos positivos y negativos.

- **Estudiante 27** Para graficar y caracterizar una función polinomica hay que encontrar sus puntos de corte con el eje x por medio de la division sintetica con los divisores del termino independiente, luego se calculan los intervalos negativos y positivos para saber si las curvas de la linea abren hacia arriba y hacia abajo, luego calcular el corte en Y. Y con esos datos graficar.

- **Estudiante 28** Dependiendo si en un comienzo tenemos los puntos de cortes o la ecuación realizamos multiplicación sintética o división sintética respectivamente, una vez hecho esto tenemos los puntos de corte en X y Y, después se realiza los intervalos positivos y negativos con la ley de los signos para hallar la forma de la gráfica, hecho esto se halla el punto máximo y mimimo entre cada intervalo y en ma gráfica completa, con esto todos los elementos están prsentes, por lo cual solo falta trazar entre estos puntos y la gráfica completa estaría.

- **Estudiante 29** Para caracterizar una función polinómica primero tomo el número independiente de la función y lo simplifico de tal forma que me dé números enteros como resultado, luego en la calculadora pongo toda la función tal como aparece y evalúo la función en estos divisores (en números positivos o negativo) hasta que el resultado me dé (0). Luego realizo la división sintética donde al restar el resultado final de cada fila con el último número este, debe quedar en cero. Así obtengo los puntos de corte en el eje x y paso a realizar la tabla de intervalos positivos y negativos, pero antes debo transponer los números que me dieron como X=aX>o menor, los intervalos de la tabla se asumen como: en la primera columna todos los signos son negativos y en la última positivos, esta tabla forma un triángulo de signos negativos y un triángulo de positivos. Donde el resultado de esta multiplicación de signos me defina si la parábola será abierta hacia arriba o abierta hacia abajo. Para darle valor a y evalúo la función en cero, eje. f(0)=y así obtengo la gráfica con cortes en x y cortes en y.

- **Estudiante 30** 1. Lo primero a realizar es encontrar los divisores del termino independiente de la función.2. Al encontrar todos los divisores se inicia el proceso de selección para la división sintética.2.1. Este proceso es calculando cada uno de los divisores en la función para determinar aquellos que se igualen a cero.2.2. Los divisores deben ser calculados tanto en su forma positiva como en su forma negativa.3. Al tener aquellos divisores que igualan a cero en la función, se puede iniciar la división.3.1. Durante la división se usan los divisores para multiplicar, sumar y/o restar los coeficientes respectivamente para reducirlos a cero.4. Al tener y comprobar que los divisores son las raíces, se ejerce la ley de signos para identificar los intervalos para su graficación.4.1. Durante la ejecución de la ley de signos los números deben de ser ordenados de menor a mayor. 4.2. Se debe tener en cuenta que:4.2.1. Si los divisores son negativos se debe representar en la ley de signos como X\le-a.4.2.2. Si los divisores son positivos se debe representar en la ley de signos como X\ge a. 5. Además se debe encontrar el corte en "y" de la función.5.1. Para esto se debe calcular la función con "x" siendo cero (F(0)), el resultado obtenido es el corte en "y".6. Con todos los factores se inicia la graficación.6.1. Se organiza de forma de señalar las raíces encontradas anteriormente.6.2. Se deben tener en cuenta los intervalos encontrados en la ley de signo, para determinar el comportamiento de la función y conocer por donde se debe de trazar las líneas.6.3. Por ultimo se debe asegurar que el corte en "y" coincida con lo graficado.

- **Estudiante 31** Cuando estamos realizando un proceso para caracterizar y graficar la función, comenzamos identificando el término independiente, que sería el que no lleva ninguna variable, para si obtener sus divisores y poder hacer la división sintética, con ella obtenemos los cortes con el eje X que tiene la función, con esto claro procedemos a evaluar la función en (0) cero para obtener el corte con el eje Y, después realizamos la ley de los signos para saber el comportamiento de la función y poder realizar una gráfica adecuada de la función.

- **Estudiante 32** Primeramente se sacas los divisores del término independiente. Con la ayuda de la calculadora se coloca la función y se buscan con cuales números se puede hacer la división sintética, que son aquellos que su resultado de cero, estos números son los que cortan en X, para saber el corte en el eje se evalúa la función en cero, después sacamos los intervalos positivos y negativos, con la ley de los signos, ese paso se lo hace con el fin de saber para dónde va la gráfica. Para arriba o para abajo.