UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE ADICIÓN, SUSTRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS EN ESTUDIANTES CON LIMITACIÓN AUDITIVA.

A DIDACTIC SEQUENCE FOR THE LEARNING OF THE CONCEPTS OF ADDITION, SUBSTATION AND MULTIPLICATION OF POLYNOMIALS IN DEAF STUDENTS.

Sandra Lucía Romero Pulido[1]

[1] Licenciada en Matemáticas y computación. Especialista en Gerencia Educativa. Candidata a Magister. Universidad del Quindío. Sandra33816@hotmail.com, Armenia.

Resumen

Este trabajo de investigación tiene como objetivo facilitar la comprensión de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, en estudiantes sordos de la Institución Educativa CASD- Hermógenes Maza de la ciudad de Armenia, por medio de la implementación de secuencias didácticas en las que se busca privilegiar el uso de recursos manipulativos y de las diferentes formas de representación de los conceptos (visual-geométrica, lingüística-verbal y simbólica); para ello se utilizó la metodología de ingeniería didáctica, analizando el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes en la construcción de los conceptos y el papel que juegan las representaciones y los elementos del álgebra geométrica como facilitadores y mediadores del aprendizaje en los estudiantes.

Palabras Clave: limitación auditiva, necesidades educativas especiales, representaciones, situaciones didácticas.

Abstract

The objective of this ongoing research is to facilitate the understanding of the concepts of addition, substation and multiplication of polynomials in deaf students from CASD Hermógenes Maza School in Armenia City. It is being carried out by the implementation of didactic sequences privileging the use of manipulative resources and different forms of concept's representation (visual-geometrical, verbal-linguistic and symbolic.) Therefore, it is necessary to implement the didactic engineering methodology in order to analyze the level of understanding achieved by students in the construction of concepts and the role of representations and elements of geometric-algebra as facilitators and mediators of deaf students learning.

Key Words: hearing impairment, special needs, representations, didactic situations.

El Problema de Investigación

Tradicionalmente, el tema de inclusión se ha centrado en la educación para alumnos con Necesidades Educativas Especiales, pero ha venido evolucionado hacia una idea más general, en la cual se busca una escuela para todos, con igualdad de oportunidades de aprendizaje, independientemente de los antecedentes sociales y culturales, y de las diferencias en sus habilidades y capacidades.

La inclusión educativa se ha convertido en una estrategia que permite el reconocimiento de la educación como el foco del progreso de las naciones, en la que el fin es facilitar y crear ambientes participativos con oportunidades de aprendizaje para todos, esto solo es posible si las organizaciones logran desarrollar sólidos y claros conceptos universales que ayuden a clarificar las orientaciones y los caminos, profundicen el debate sobre los temas más complejos y sensibles, y estimulen la recreación/renovación comunitaria, curricular, pedagógica y docente de los sistemas educativos como uno de los principales desafíos compartidos por la comunidad educativa mundial. (UNESCO, 2008).

A lo largo de la historia de la humanidad, las personas con limitaciones han sido aisladas y marginadas de los ámbitos educativos formales; sin embargo, las nuevas tendencias mundiales que se han generado a partir de las convenciones mundiales sobre inclusión, han permitido dar pasos importantes para cambiar la percepción que se tiene sobre discapacidad, pues un verdadero cambio solo es posible si se logra el reconocimiento de igualdad para todas las personas, de tal forma que puedan realizar su proyecto de vida con toda la plenitud posible.

En Colombia la Ley 1618 de 2013 tiene como objeto garantizar y asegurar el ejercicio efectivo de los derechos de las personas con discapacidad, mediante la adopción de medidas de inclusión, acciones afirmativas y de ajustes razonables, y eliminando toda forma de discriminación por razón de discapacidad. En ella se definen a las personas con y/o en situación de discapacidad como aquellas que tienen deficiencias físicas, mentales, intelectuales o sensoriales a mediano y largo plazo que, al interactuar con diversas barreras incluyendo las actitudinales, puedan impedir su participación plena y efectiva en la sociedad, en igualdad de condiciones con las demás; de igual manera, se habla de inclusión como un proceso que asegura que todas las personas tengan las mismas oportunidades, y la posibilidad real y efectiva de acceder, participar, relacionarse y disfrutar de un bien, servicio o ambiente, junto con los demás ciudadanos, sin ninguna limitación o restricción por motivo de discapacidad, mediante acciones concretas que ayuden a mejorar su calidad de vida.

Las políticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia - MEN, plantean que las instituciones educativas deben buscar mecanismos que brinden oportunidades a las poblaciones vulnerables de acceder, permanecer y promocionarse en el servicio educativo, en condiciones apropiadas de calidad, pertinencia y equidad. Pero no se trata únicamente de abrir las aulas regulares a los estudiantes que presentan discapacidad, ya que hay otros aspectos que reflexionar, por ejemplo: ¿Cómo les va a los estudiantes con discapacidad que se incluyen en las aulas?, ¿Cuáles son los índices de deserción escolar de dichas poblaciones al no encontrar singularidades pedagógicas en las instituciones comunes?, ¿Cuáles son los niveles de desempeño académico de los estudiantes con discapacidad?, ¿Cuáles son las estrategias didácticas apropiadas para los procesos de enseñanza y aprendizaje?. Como se puede observar, el problema no se resuelve con diseñar políticas estatales de inclusión; como lo afirma Skliar (2008) refiriéndose a la realidad de las políticas inclusivas actuales en buena parte de nuestro continente: “En algunos países, existen al mismo tiempo una legislación impecable, una financiación escasa y/o subutilizada, un porcentaje muy escaso de acceso y nulidad en el acompañamiento pedagógico de los sujetos”.

Las poblaciones vulnerables han vivido al margen de la vida social, política, económica y laboral de los países; no basta el hecho de ser reconocidos como ciudadanos si en los diferentes contextos de socialización sobresalen formas de aceptación ficticias y no procesos que favorezcan una verdadera integración social; esta realidad exige del maestro una nueva mirada de apertura frente a la diversidad de los estudiantes que llegan a las aulas, entre ellos los de Necesidades Educativas Especiales; lo que conlleva a generar estrategias que permitan responder con calidad, equidad y pertinencia a la atención de dichas poblaciones.

En nuestro país los datos del Censo del DANE de 2005 reportan a 392.084 menores de 18 años con discapacidad, de los cuales 270.593 asisten a la escuela y 119.831 no lo hacen. En el caso de los estudiantes con discapacidad auditiva se registró que el 88.7% de los sordos encuestados se encontraban por fuera del sistema educativo. De otro lado, las secretarías de educación reportan que desde el año 2003 hasta el 2006, se habían matriculado 81.757 estudiantes con discapacidad en 4.369 establecimientos educativos (Revista Al Tablero, 2007); aunque estos últimos reportes parecen ser alentadores, no se puede desconocer el fracaso educativo en la población con discapacidad, en especial en la población sorda de Colombia.

Aparte de eso, es evidente el alto porcentaje de analfabetismo entre la comunidad sorda, además de los bajos niveles académicos, hay un mínimo de porcentaje de sordos desempeñando cargos importantes en diferentes áreas profesionales, políticas, artísticas, científicas y deportivas; todas estas dificultades incrementan la necesidad de implementar estrategias de enseñanza flexibles e innovadoras, que permitan reconocer las diferencias tal como lo exigen las políticas mundiales y nacionales de inclusión.

La inclusión en el aula de estudiantes con deficiencias auditivas es un proceso relativamente nuevo, esta puede ser una de las razones por las cuales se explica la poca existencia de estrategias didácticas de enseñanza y aprendizaje para la atención a la población sorda[2], lo que genera una reflexión sobre la necesidad de realizar más estudios, en los cuales se reconozcan y tengan en cuenta las Necesidades Educativas Especiales de estas personas. Es claro que en Colombia el problema de atención educativa a la población sorda no se ha afrontado con la responsabilidad pedagógica necesaria, la cual implica un cambio en las estrategias didácticas para lograr aprendizajes que sean duraderos y significativos, que les permita desenvolverse con éxito en su vida social y laboral.

Si bien las estrategias para desarrollar proyectos de aula acordes a la población sorda son muy limitadas, no se puede desconocer que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para esta población ha sido objeto de reflexiones por parte de investigadores y docentes. Al respecto, González y Larrubia (2006) encuentran que el alumnado sordo integrado en aulas de matemáticas de E.S.O y bachillerato presenta dificultades en la comprensión y adquisición del conocimiento matemático, muestran además la relevancia de los sistemas de comunicación didáctico y ordinario en los procesos de enseñanza y aprendizaje en estos estudiantes.

De otra parte, el Decreto 2082 de 1996, abre espacios educativos para los estudiantes con alguna discapacidad, bajo el lema de “una escuela con alas, educación para todos”, la Secretaría de Educación de Armenia atendiendo este decreto, dio inicio en algunas instituciones educativas al proceso de integración de la comunidad sorda a las aulas con estudiantes oyentes. Desde el año de 1998 y hasta la fecha se trabaja en la modalidad de aula integradora; en el nivel de primaria en un aula multigradual solo con estudiantes sordos, partiendo de un modelo de educación bilingüe, en el que los contenidos son dados en lengua de señas colombiana- LSC, y se tiene como propósito el dominio funcional del español como segunda lengua; a partir de secundaria en un aula con oyentes, contando con el servicio de un intérprete.

[2]Guilombo y Hernández encontraron en Bogotá que de 431 trabajos de grado elaborados en las licenciaturas en matemáticas de las universidades que ofrecen el programa, solo dos eran dirigidos al mejoramiento de la enseñanza en la población sorda.

En sintonía con lo anterior, desde el año 2004 la Institución Educativa CASD, de la ciudad de Armenia, contempla en su Proyecto Educativo Institucional -PEI la integración de estudiantes sordos. Esta diversidad en el aula ha dado origen a diferentes situaciones académicas como: los sordos representan una minoría que es aceptada por la comunidad oyente, pero muestran una clara desventaja en su rendimiento académico, situación que se hace visible en los resultados de las pruebas SABER, en grado once. En cuanto al área de matemáticas, los estudiantes de último grado y aún más los estudiantes sordos, evidencian la falta de comprensión de conceptos básicos de cálculo, debido en parte a su falta de estabilidad de conceptos previos como son los relacionados con el álgebra, teniendo en cuenta que esta es considerada como un pre-requisito para el cálculo[3].

En la Institución educativa CASD se orienta con los mismos procesos pedagógicos a sordos y oyentes sin tener en cuenta que, si bien este es un espacio compartido, las estrategias tradicionales de enseñanza para el álgebra no han mostrado ser significativas para ninguno de los dos grupos de estudiantes, por lo tanto, se hace necesario que se generen espacios de reflexión alrededor de dichas cuestiones, que conduzcan a propuestas didácticas que hagan posible la comprensión de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, tanto en oyentes como en sordos; teniendo en cuenta que para estos últimos las oportunidades de aprendizaje son más limitadas si no se crean ambientes favorables en el aula.

También es importante tener en cuenta que los egresados sordos del CASD, se están matriculando en las instituciones de educación superior de la región en diversos programas académicos, por lo cual es necesario ofrecerles toda la formación académica para un buen desempeño en la educación superior.

[3] Neira (2010) en el IX Encuentro nacional de educación y estadística – ENEMES, se refiere al álgebra como antecesora del cálculo, e insiste en la necesidad del dominio de los procesos algebraicos para poder enfrentarse a los procesos analíticos que exige el aprendizaje del cálculo.

Por lo anterior, con la presente investigación se pretende contribuir con una solución a las dificultades enunciadas en el área de matemáticas, en el tema de operaciones con polinomios, a través de la elaboración de situaciones didácticas que privilegien la visualización matemática y los sistemas de representación; partiendo de lo planteado por Márquez (2011:34) "[…] El canal perceptual por el cual ingresa la mayor cantidad de la información acerca del mundo es la visión, visualmente se capturan relaciones, formas de comportamiento de los objetos de conocimiento y sus transformaciones"; lo anterior, con el propósito que los estudiantes adquieran una mayor comprensión de los conceptos abordados y un aprendizaje significativo de ellos.

Pregunta de Investigación

Partiendo de los planteamientos anteriores se considera necesario reflexionar sobre la importancia del diseño, la planeación y la gestión de situaciones didácticas, que faciliten la comprensión de algunos conceptos básicos propios del álgebra en estudiantes sordos. Es así como surge la pregunta de investigación:

¿Cómo lograr en los estudiantes sordos de grado once de la Institución Educativa CASD de la ciudad de Armenia, la comprensión del concepto de adición, sustracción y multiplicación de polinomios a través de situaciones didácticas?

Objetivo General

Lograr la comprensión del concepto de adición, sustracción y multiplicación de polinomios a través de situaciones didácticas, en estudiantes sordos de grado once de la Institución Educativa CASD de la ciudad de Armenia.

Objetivos Específicos

1. Reconocer y establecer las dificultades que tienen los estudiantes sordos para el aprendizaje de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomio, mediante un análisis preliminar que permita elaborar un diagnóstico con los aspectos más relevantes que intervienen en la comprensión de los conceptos.

2. Facilitar la comprensión de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios en estudiantes sordos, a través del diseño e implementación de secuencias didácticas.

3. Evaluar y analizar el nivel de comprensión de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios alcanzados por los estudiantes sordos de grado once, por medio de la confrontación del análisis a priori y a posteriori en el marco de una ingeniería didáctica.

Justificación

Las políticas estatales del Ministerio de Educación Nacional- MEN, han definido lineamientos para la atención educativa a poblaciones vulnerables, definidas como aquellas que por sus diferencias socioculturales, económicas y/o biológicas, han permanecido fuera del sistema educativo, con el propósito de establecer estrategias que permitan ofrecer a estas poblaciones la oportunidad de vincularse a un servicio educativo de calidad.

De igual forma, los planteamientos modernos en educación hacen énfasis en la importancia de reflexionar acerca de la diversidad, la integración de los grupos minoritarios y el respeto por las diferencias. Delors (1996:32) en el Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI contempla que: “La escuela solo puede llevar a buen puerto esta tarea si, por su parte, contribuye a la promoción e integración de los grupos minoritarios, movilizando a los mismos interesados, cuya personalidad debe respetar”. Si se tienen en cuenta estas expectativas en el contexto educativo se puede hablar de Necesidades Educativas Especiales para entender que todas las personas somos únicas y es el sistema quien debe encargarse de garantizar el respeto por esas diferencias. La diversidad en el aula exige metodologías y estrategias para los estudiantes con estas necesidades, situación que no se evidencia actualmente en el trabajo de los profesores en las aulas de clase.

A pesar de las políticas de inclusión del MEN a través del plan sectorial de educación 2002-2006 y del Decreto 366 de 2009, por medio del cual se reglamenta el servicio de apoyo pedagógico para la atención de estudiantes con discapacidad y con capacidad o talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva; las investigaciones recientes en el contexto colombiano muestran, la poca existencia de proyectos donde se involucren las necesidades de aprendizaje de los estudiantes sordos, así como la falta de medición del impacto que ha tenido la inclusión de los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales en las aulas regulares de nuestras Instituciones. (Guilombo y Hernández, 2011).

Lo anterior implica pensar en proyectos que respondan a la normatividad y busquen apoyar a las entidades territoriales para que logren avanzar en procesos que permitan identificar y caracterizar las poblaciones vulnerables y proponer orientaciones pedagógicas para su atención, lo cual promueve la adecuación de currículos; la implementación, identificación y desarrollo de modelos flexibles; la creación de herramientas pedagógicas y didácticas; la formación a funcionarios y docentes, entre otros.

El fracaso en el ámbito educativo de los sordos es generalizado en gran parte del mundo y es reconocido por las comunidades educativas; los grupos minoritarios como la población sorda, muestran niveles bajos de aprendizaje debido a la influencia que tienen las condiciones lingüísticas del contexto pedagógico. González et al. (2006) encuentran que los problemas y situaciones donde el lenguaje implicado no juega un papel preponderante y que están complementadas con gráficas y/o descripciones no verbales favorecen la comprensión del alumnado sordo; de igual forma, otras investigaciones internacionales encuentran que los niños sordos no llegan a alcanzar niveles de lectura competentes, debido a las dificultades de tipo lingüístico; situación que no es ajena a los estudiantes sordos que ingresan a la Institución Educativa CASD, donde a dicha población se le dificulta la estructura de la lengua castellana utilizada por los docentes en las aulas, la que se considera como una segunda lengua para la población sorda.

Durante los últimos 50 años la enseñanza del álgebra en oyentes ha sido objeto de múltiples investigaciones, como la de Palarea (1999:10), en la cual se plantea que “el aprendizaje de esta genera en los estudiantes muchas dificultades de diferente naturaleza que tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra”. Si lo anterior se mira desde la realidad de los estudiantes sordos el problema se hace mucho mayor, la complejidad del lenguaje algebraico sumado al de la lengua castellana implica un doble obstáculo para los estudiantes, por eso, con esta investigación se pretende diseñar y validar estrategias didácticas para mejorar sus niveles de aprendizaje, pues la limitación física no implica discapacidad para aprender, pero sí requiere que los docentes generen ambientes acordes a las necesidades y potencialidades de los estudiantes.

Hasta ahora las estrategias didácticas tradicionales utilizadas para la enseñanza de las matemáticas en la Institución Educativa CASD, no han generado en la población sorda un alto nivel de comprensión de los conceptos, es decir, no hay estrategias didácticas acordes a las necesidades de dicha población. La realidad educativa, en cuanto a la inclusión, exige un cambio en aspectos metodológicos, didácticos y curriculares en las instituciones educativas, con el fin de garantizar igualdad en el acceso al aprendizaje; por ello esta investigación aporta elementos de tipo didáctico y teórico que facilitan la comprensión conceptual de las operaciones con polinomios en los estudiantes sordos, a través de la elaboración de situaciones didácticas que privilegian la visualización matemática y los sistemas de representación.

Del mismo modo, se hace necesario promover la creatividad en las prácticas pedagógicas, reconociendo las condiciones y circunstancias de vida de cada estudiante, la identificación de las necesidades de la inclusión en los procesos educativos y sociales, como parte del rol del docente; de esta manera las propuestas pedagógicas para la atención a la diversidad juegan un papel significativo en la educación. La presente investigación aporta elementos didácticos, epistemológicos y sociales que son fundamentales para continuar o iniciar otros procesos de investigación en educación con la población sorda. Se espera que haya mayor motivación hacia el aprendizaje para disminuir la deserción escolar, y lograr procesos educativos de calidad que se evidencien en más oportunidades sociales, políticas y laborales.

Antecedentes

Las investigaciones previas han determinado el interés por el estudio de las dificultades que los estudiantes tienen en el aprendizaje del álgebra elemental, de igual forma, otros estudios confirman la preocupación por el bajo nivel de aprendizaje que logran los estudiantes sordos en el área de matemáticas. A continuación se presentan algunas que motivaron y aportaron a la elaboración de esta investigación.

Investigaciones sobre Estrategias de Enseñanza en Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Análíticos

En el artículo 'Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico' de Palarea y Socas (1994), presentaron los resultados de la revisión de investigaciones relacionadas con los procesos cognitivos integrados en el aprendizaje del álgebra y se ocuparon de aquellos obstáculos que frenan el progreso del conocimiento del alumno en el inicio de su acercamiento al álgebra. El objetivo del trabajo fue entender el proceso cognitivo del estudiante con respecto a conceptos relacionados con el álgebra escolar, aclarar algunos esquemas de respuesta que presentan cierta estabilidad, y con ello, proporcionar una perspectiva para entender e interpretar las investigaciones cognitivas existentes en relación al aprendizaje de la misma.

Estos errores se presentan en los enfoques epistemológico, didáctico y cognitivo, además se clasifican en: obstáculos cognitivos, errores del álgebra que están en la aritmética y errores del álgebra debidos a características propias del lenguaje algebraico. En este artículo de tipo descriptivo se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo de los errores cometidos por los estudiantes en el aprendizaje inicial del álgebra escolar, realizando la diferenciación entre obstáculo cognitivo y error. Dentro de sus conclusiones, reflexionaron sobre la importancia del diseño de unidades de estudio, que permitan sostener el interés de los estudiantes para implicarse en los procesos intelectuales identificados por los análisis cognitivos como necesarios o suficientes para adquirir conocimiento preciso de operaciones del álgebra, por otro lado, la importancia del análisis de errores, sirve para ayudar a los profesores a conducir mejor el proceso de enseñanza y aprendizaje, insistiendo en aquellos aspectos en los que los estudiantes presentan mayor dificultad, para proporcionar estrategias que permitan la correción de los mísmos.

Otro aporte importante es el de Rodríguez (2011) quien realizó un estudio llamado 'Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria', en él se trazó como objetivo el análisis del proceso de traducción que realizan estudiantes de educación secundaria entre los sistemas de representación verbal y simbólica (en ambos sentidos), de enunciados generales de relaciones numéricas; dicho objetivo se llevó a cabo teniendo en cuenta: primero, la construcción de un instrumento (un dominó algebraico), que permitiera explorar el proceso de traducción entre los sistemas de representación mencionados; segundo, en la clasificación de los errores en que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones; y por último, la descripción de las relaciones que los estudiantes ponen de manifiesto entre las diferentes representaciones y las explicaciones que dan para ello.

La población considerada en la investigación estuvo representada por una muestra de 26 estudiantes inscritos en el curso de cuarto grado de educación secundaria obligatoria de una institución educativa de Granada, España. Fue una investigación de carácter cualitativo y cuantitativo, en la cual, a partir de la recolección de datos, se realizó un análisis de las respuestas dadas, y se sintetizó dicho análisis teniendo en cuenta las grabaciones de audio y las transcripciones realizadas. Dentro de los análisis se tuvo en cuenta el tipo de errores cometidos por los estudiantes y se realizó la clasificación de los mismos en tres categorías: I. Según la completitud del enunciado, II. Derivados de la aritmética, III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico.

Algunas de las conclusiones obtenidas luego de la clasificación realizada fueron: al pasar de representación verbal a simbólica, el error más cometido fue el mal uso de la interpretación de potencias y producto; en el cambio de representación simbólica a verbal, el error más frecuente fue el de complicación estructural, o sea aquel donde los sujetos no interpretan bien la estructura del enunciado algebraico. Los estudiantes traducen con más facilidad un enunciado algebraico dado en su representación simbólica a su representación verbal y esto se puede aprovechar para que sean los estudiantes los que propongan problemas a partir de enunciados algebraicos expresados simbólicamente y a partir de estos problemas, abordar la traducción del sistema de representación verbal al simbólico, que entraña más dificultades.

La autora propuso además que con el objetivo que los estudiantes desarrollen su capacidad para realizar transformaciones de enunciados entre diferentes sistemas de representación y profundizar en estudios de estos procesos, se puede desarrollar un experimento contemplando estos dos o más sistemas de representación. En cuanto al análisis de errores, este es importante, ya que permite plantear propuestas de innovación curricular en las que los estudiantes reflexionen sobre sus ideas erróneas.

Asimismo, el texto ‘Materiales manipulativos para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación obligatoria’ realizado por Hernández, Muñoz, Palarea, Ruano y Socas (2008), presentaron la revisión de algunos recursos y materiales didácticos que podrían fomentar situaciones que permitan el desarrollo del pensamiento algebraico y faciliten la conceptualización del símbolo de las operaciones, de la cantidad desconocida o general, así como de conversiones entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural. También, se realizó una comparación entre los recursos didácticos seleccionados y un material didáctico denominado Puzzle algebraico, elaborado por Socas (2000). Una apreciación importante es que los materiales didácticos cuando son utilizados como representaciones semióticas de los objetos matemáticos, juegan un papel importante en el aprendizaje del álgebra; las transformaciones y conversiones que hacen los alumnos, de al menos dos representaciones, facilitan la comprensión del objeto matemático.

Luego de realizar el análisis de los diferentes recursos y materiales didácticos para el estudio del lenguaje algebraico, y el estudio comparativo, concluyen que el puzzle algebraico ofrece más posibilidades que el resto de materiales, ya que es más fácil de usar y además, facilita la manipulación y conceptualización de los objetos algebraicos tratados; también se pone de manifiesto la ayuda de estas representaciones para favorecer la comunicación en las clases de álgebra.

El uso en diferentes procesos de enseñanza permite concluir que el papel de la representación del puzzle se mantiene independiente de su utilización física, es decir, el estudiante abandona rápidamente su utilización manipulativa, sin embargo, mantiene su manipulación mental; de este modo cumple su papel de representación del objeto matemático y no se convierte en el fin mismo del aprendizaje.

Por último, la investigación 'El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables' realizada en la Universidad del Quindío por Giraldo, Gutiérrez, Hoyos y Wagner (2012), vincula la geometría y permite visualizar, manipular, y componer los conceptos algebraicos de productos notables y de factorización, a fin de que sea utilizada por los docentes de matemáticas como una herramienta didáctica para que los estudiantes comprendan y afiancen sus conocimientos en dichos temas. El software diseñado para tal fin se denomina: *"Geometría de Polinomios",* por medio del cual se trabajó para la aprehensión y construcción del pensamiento matemático desde una visión diferente a la tradicional. De este trabajo se pudo observar que el uso del material manipulativo juega un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, su correcta utilización constituye una importante base de adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos, que posibilitan un aprendizaje activo y recreativo de acuerdo a la evolución intelectual del participante, así mismo, a través de un software se facilitó el aprendizaje de los conceptos de Productos Notables y Factorización en los estudiantes.

Desde la lectura de las investigaciones anteriores, se retoman algunos aspectos importantes para tener en cuenta en la presente investigación, como:

- La utilidad que tiene el uso de materiales manipulativos para fomentar situaciones de aprendizaje que permitan el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos.
- La construcción de instrumentos didácticos y lúdicos como técnica para la recolección de datos, con el objetivo de analizar, clasificar y categorizar los errores que cometen los estudiantes.
- La importancia del uso de dos o más sistemas de representación en la construcción de los conceptos de álgebra.
- La clasificación de los elementos de visualización en contextos algebraicos y la utilidad que pueden tener para la caracterización de los estudiantes.

Investigaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la Población Sorda

En el contexto internacional algunos autores se han propuesto la tarea de investigar el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes sordos. Para empezar, González *et al.* (2006), en su trabajo de investigación llamado ‘Aprendizaje matemático en alumnado sordo integrado en aulas ordinarias de E.S.O y bachillerato’, se plantearon dos preguntas de investigación: Primero, si el lenguaje ordinario es un factor de dificultad añadido a las actividades y tareas matemáticas que se desarrollan en el aula para el alumnado sordo y el oyente, y segundo, cuál es el papel que juegan la visualización matemática y la expresión visual en matemáticas como mediador común básico a sordos y oyentes en el aula; planteando que en gran medida las dificultades de aprendizaje de los estudiantes sordos se debe a las generadas por el sistema de comunicación didáctico empleado en el proceso de aprendizaje.

En este estudio se establecieron variables y categorías que permitieron determinar si existen diferencias significativas en el desempeño de estudiantes sordos y oyentes con respecto al tipo de tareas, actividades y nivel de lenguaje implicado; llegando a las siguientes conclusiones: los problemas y situaciones donde el lenguaje implicado no juega un papel preponderante y que están complementados con gráficas y/o descripciones no verbales favorecen la comprensión y la representación mental del alumnado sordo, y son el mejor vehículo para la adquisición del conocimiento y además una alternativa viable para el oyente. Por otro lado, el papel que juegan las actividades en las cuales la expresión matemática visual está presente, son mucho más asequibles que las netamente verbales, lo que puede significar una alternativa de enseñanza común para el conocimiento matemático en el aula a sordos y oyentes.

Así mismo, en el artículo 'Estudio de la resolución de problemas aritméticos de combinación en alumnos sordos', Serrano (1995) tuvo el objetivo de analizar la relación que existe entre problemas aritméticos de combinación y las operaciones cognitivas implicadas en ellos, mediante dos pruebas de inclusión: inclusión lógica de clases e inclusión numérica de cantidades. El trabajo consistió en analizar si el nivel operatorio alcanzado por los estudiantes sordos, en pruebas de inclusión, constituye una condición necesaria y/o suficiente para la resolución exitosa de problemas de combinación, o bien hay otros factores como la formulación lingüística del problema que pueden ser más determinantes.

Para este autor fue necesario establecer una relación de inclusión entre conjuntos para poder analizar los problemas aritméticos de combinación; para este trabajo se tomó una muestra de 12 alumnos sordos profundos entre 8 y 12 años, que se encontraban en grados de primaria pertenecientes a centros educativos incluyentes en las ciudades de Barcelona y Girona (España); los problemas fueron presentados individualmente y por escrito, y en ellos se propusieron cuatro tipos de tareas distintas en cada problema: lectura del texto, explicación del texto, hallazgo del resultado y explicación de la operación resultante; además se propuso pruebas para evaluar la capacidad de resolver problemas de inclusión numérica de cantidades, para clasificarlas en: tareas de clasificación espontánea, de cuantificación de la inclusión, de identidad, de igualación, y de repartición; luego se clasificaron y categorizaron las variables en tablas y se procedió al análisis; al final se llegó a las siguientes conclusiones: la edad de los estudiantes no incide en el nivel de éxito o fracaso en la resolución de los problemas; no se encontró incidencia de los niveles de inclusión lógica y numérica en la resolución de problemas de combinación, hay mayor dependencia de las relaciones lógicas y numéricas entre conjuntos y de la comprensión de la formulación verbal del problema, que del propio conocimiento del estudiante en la solución de este tipo de problemas. Concluye además que la competencia resolutoria no consiste únicamente en la adquisición de habilidades operatorias, sino que es necesario atender a las características del contexto y a la representación del contenido, es decir, a la formulación del problema y a la representación mental del mismo.

Por su parte, Moreno y Nunes (2002) en su artículo '*An intervention program for promoting deaf pupils achievement in mathematics'*, plantearon que la pérdida auditiva no puede tratarse como una causa de dificultades en matemáticas, pero sí como un factor de riesgo, teniendo en cuenta que si no se toman las medidas necesarias, el aprendizaje de las matemáticas en los niños sordos puede conducir a resultados negativos, afirmando además que sí es posible aumentar los niveles de matemáticas en los estudiantes sordos.

El diseño esta investigación implicaba una comparación de 23 alumnos sordos participantes en el proyecto con un grupo de referencia formado por 65 alumnos sordos que asisten a las mismas escuelas, los alumnos del proyecto fueron probados antes y después de la intervención con pruebas internacionales de desempeño en matemáticas, cuyo resultado mostró que después de realizar las actividades del proyecto, los 23 estudiantes presentaron en el post-test mejores resultados, por lo que concluyen que el programa fue eficaz para el incremento de los logros de los estudiantes en aritmética, en el proyecto se abordaron temáticas como: sistemas aditivos y su aplicación, razonamiento en la adición (relaciones entre la suma y la resta), razonamiento multiplicativo (relación entre multiplicación y división), y fracciones. Las clases se realizaron utilizando cartillas con contenido visual, representando las situaciones; las observaciones de aula mostraron que algunos profesores usaban materiales concretos para ayudar a los estudiantes a razonar acerca de los problemas difíciles, y después de esto los estudiantes se mostraban capacitados para enfrentarse a libros de trabajo por su propia cuenta.

De igual manera, en el contexto nacional se encontró el estudio denominado ‘Aprendizaje del álgebra en grupos con discapacidad auditiva utilizando la caja de polinomios’, llevado a cabo por Lozano, Naranjo y Soto (2009); en él se realizó la descripción de un proyecto que establece algunas reglas para enseñar y aprender álgebra con una herramienta activada de carácter lúdico como lo es la caja de polinomios, lo cual ha permitido facilitar el camino de comunicación con poblaciones que evidencian una deficiencia auditiva importante; la investigación se desarrolló en el colegio San José de Pasto, Nariño; con estudiantes sordos de grado séptimo y octavo. En este estudio citan algunas investigaciones donde se concluye que la sordera influye en el aprendizaje de las matemáticas, pero que dicha influencia se da a causa del lenguaje que esta ciencia utiliza, la mayoría de errores cometidos por los estudiantes sordos se remiten a tareas con problemas que requerían de la traducción lingüística hacia las operaciones, al igual que ocurre con los oyentes.

Las implicaciones de tipo didáctico que sugieren para el trabajo con estudiantes sordos son, entre otras: potenciar actividades en las que las representaciones visuales puedan ser imprescindibles; explicar el conocimiento matemático de muchos términos dentro de contextos, enfatizando en lo real y lo abstracto; interrelacionar las diferentes ramas, privilegiando aquellas temáticas que puedan soportarse dentro de los contenidos geométricos; insistir en la utilización de recursos didácticos y materiales de apoyo que permitan la comprensión de las explicaciones elaboradas en clase.

En cuanto al álgebra se puede resaltar que es el paso fundamental hacia la consolidación del lenguaje matemático que permite acudir a la instancia formal, las diferentes significaciones de las letras son de difícil construcción para todas las personas, aún más para los estudiantes sordos, quienes están acostumbrados a asociar las palabras con significados traídos de un mundo real, tangible y concreto. Los investigadores encuentran en la caja de polinomios una herramienta didáctica alternativa para atacar la dificultad en la comprensión del álgebra por las múltiples ventajas de la herramienta y el papel que juega como mediador de conocimiento, como sistema de representación, etc.

De otra parte, en la investigación ‘El lenguaje y las matemáticas: aprendizajes simultáneos en estudiantes sordos de primer grado escolar’, de Guilombo et al. (2011), las autoras describen su problema reflexionando sobre la baja calidad de educación que recibe la población sorda en todos los niveles de escolaridad en Colombia, y se proponen la exploración del uso de nuevos materiales para la enseñanza de la aritmética y la geometría con estudiantes de primer grado de educación básica en población sorda, para hacer evidente la relación que existe entre el lenguaje y las matemáticas; para esto se tuvo en cuenta aspectos como: la condición de una persona sorda exige un contexto bilingüe, la lengua de señas no fue considerada como lengua en el ámbito escolar, los conceptos matemáticos requieren de dos lenguas y las nuevas representaciones que estas posibilitan, y finalmente, las adecuaciones didácticas en pro de la simultaneidad de saberes donde intervienen propuestas pedagógicas.

Para la investigación se tuvo en cuenta la estructura metodológica de la ingeniería didáctica, y fue aplicada en 4 instituciones con atención a población sorda en la ciudad de Bogotá. Dentro de las conclusiones se pudo destacar las siguientes: en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la población sorda las adecuaciones didácticas y propuestas pedagógicas deben ser diseñadas de tal forma que respondan a la condición y las concepciones de la persona sorda, además, es importante reconocer las implicaciones del lenguaje en el aprendizaje del sordo, ya que con esto se identifican las principales causas que se deben tratar y tener en cuenta en el momento de querer desarrollar una noción matemática en el estudiante, sobre todo en el caso de los estudiantes sordos en quienes es evidente la complejidad de desarrollar procesos cognitivos a causa de la tardía adquisición de la lengua de señas y su poco dominio. Para concluir las autoras reflexionan sobre la importancia de realizar trabajos que permitan el mejoramiento de la situación educativa de las personas sordas y reconocen la carencia de estrategias pedagógicas establecidas para la atención educativa a dicha población en nuestro país.

Finalmente, los aportes de Calderón, León y Orjuela (2009), en su artículo ‘La relación lenguaje-matemáticas en la didáctica de los sistemas de numeración: aplicación en la población sorda’ que tuvo como propósito presentar avances de una investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas y del lenguaje en el proceso de aprendizaje en niños sordos. Pretendieron identificar elementos que naturalmente relacionan lenguaje y matemáticas en la producción de sistemas de numeración y los efectos de estos en los procesos de la enseñanza; para ello realizaron un registro etnográfico mediante la observación de tres instituciones de grado preescolar y primero con población sorda[4] en contextos de bilingüismo; y la delimitación del tema de desarrollo escolar de sistemas de numeración; en el cual consideraron como aspectos de análisis: los procesos aritméticos, los procesos semióticos, los procesos semánticos, las formas de representación, el uso de tecnologías, y el tipo de escolarización del niño sordo; finalmente, se realizó una triangulación de las categorías.

En esta investigación se indagó además por los factores didácticos necesarios para el desarrollo de competencias comunicativas en matemáticas en niños sordos en niveles básicos de escolaridad y centraron su atención sobre aquellos que se relacionan con el desempeño didáctico del profesor; para los autores estos merecen especial atención; de igual manera, la necesidad de involucrar como mínimo tres sistemas semióticos de representación y la articulación de los mismos en la práctica matemática.

Se tomaron como referentes tres ejes teóricos: primero, el desarrollo del lenguaje como elemento discursivo: se centra en estudios sobre lenguaje y pensamiento donde se potencializan las relaciones de tipo discursivo que se establecen entre profesores y estudiantes, y su importancia en la adquisición del conocimiento; segundo, las exigencias

[4]16 niños sordos, tres maestros y dos modelos lingüísticos

de la LSC (Lengua de Señas Colombiana) para las interacciones en el aula: se reflexiona sobre la importancia de la educación bilingüe para sordos entendida como una forma de responder a las particularidades, potencialidades y condiciones de la población sorda, ya que se deben generar y garantizar todas las condiciones pedagógicas, lingüístico-comunicativas, socio-comunitarias y culturales requeridas para que dicha población tenga las oportunidades de aprendizaje de la lengua de la sociedad mayoritaria, y tercero, la construcción del sentido numérico: se considera que el sentido numérico en su génesis cuantitativa compromete acciones desde, con y sobre cantidades presentes en situaciones de relación del niño con su entorno; condiciones semióticas para describir, interpretar y operar, empleando representaciones simbólicas, verbales y gráficas.

Algunas conclusiones generales del estudio etnográfico tienen que ver con que: en cuanto al manejo de las temáticas intervienen cuatro sistemas de representación semiótica: el de la LSC, el del castellano, el indo arábigo y el figural; pero los diferentes sistemas se usan sin atender a las condiciones de manejo de conversión entre ellos, a pesar de que hay una riqueza semiótica en lo referente a los números; además, uno de los retos para la didáctica de las matemáticas orientadas a poblaciones sordas es la existencia mínimo de tres sistemas semióticos de representación y articulación de los mismos en la práctica matemática; la ausencia de los instrumentos estructurados matemáticamente incide en la poca presencia de procesos de exploración de representaciones numéricas y de reglas para su uso en la comunicación; la discursividad propia de la LSC es un factor que apoya el desarrollo del conocimiento matemático inicial y que configura un sujeto con mayores condiciones para el desarrollo de la competencia comunicativa en matemática; más aún si ocurre la necesaria relación de este sistema semiótico con los otros sistemas de representación presentes.

En los trabajos de investigación mencionados, se encontraron aportes acerca de: ¿cómo enseñar matemáticas de acuerdo a las características y capacidades de los estudiantes sordos?, ¿cuáles deben ser los parámetros a tener en cuenta para el diseño de situaciones didácticas para su aprendizaje? y ¿cuál es el papel que juega el lenguaje como vehículo del conocimiento en la clase?; coincidiendo las investigaciones en que el lenguaje es fundamental para promover el desarrollo de las estructuras cognitivas que permiten la formación de los conceptos matemáticos, en algunas de ellas se enuncian las dificultades que existen en el sistema de comunicación didáctico empleado en los procesos de enseñanza, así mismo, se puede concluir que el tipo de problemas donde se emplean formulaciones verbales o que requieren de la traducción lingüística hacia las operaciones, son de difícil comprensión y análisis para la población sorda.

Las conclusiones de estos autores permiten reflexionar acerca de los tipos de procesos que se deben potenciar al momento de planear una situación didáctica para la enseñanza de las matemáticas en los estudiantes sordos, entre estos los recursos de tipo visual, ya que contribuyen a aumentar el nivel de comprensión y constituyen un elemento facilitador y mediador del aprendizaje; además, las investigaciones dejan ver los siguientes aspectos:

- El uso de diagramas, imágenes, figuras, y otros elementos propios de la visualización, usados en la representación, explicación y demostración de conceptos y objetos matemáticos juegan un papel importante en la enseñanza del álgebra.
- El análisis y la clasificación realizada por los autores de los errores cometidos por los estudiantes al iniciar el aprendizaje del álgebra, permite identificar en forma preliminar la situación real en la que se encuentran los estudiantes y de esta manera tener elementos que permitan plantear situaciones didácticas que conduzcan al mejoramiento de sus aprendizajes.

Aportes de las Investigaciones con Ingeniería Didáctica

'Una secuencia didáctica desde la Orquestación Instrumental: La Función Cuadrática', aplicada a estudiantes de Educación Básica, es un trabajo de investigación realizado por Ruíz y Santacruz (2010), que se basó en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de la función cuadrática, en grados novenos en el departamento del valle, esta se centró en el marco teórico de la Teoría de

Situaciones Didácticas, lo que hace de ella un buen referente para la presente propuesta; debido a que se utilizó la ingeniería didáctica como referente metodológico de investigación con el propósito de poner en obra y evaluar situaciones didácticas en las que se utiliza como herramienta tecnológica el CABRI GEOMETRE, el cual es tomado como artefacto para integrar una secuencia didáctica alrededor del aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes, quienes a través del desarrollo de dicha secuencia, debidamente planeada y organizada por la orquestación instrumental, elaboran procesos de génesis instrumental asociados al uso de la herramienta como instrumento de actividad matemática, en el contexto de problemas de optimización.

La metodología se ubicó dentro del registro de la microingeniería didáctica, donde se propone una organización y articulación de actividades con el objetivo de movilizar el aprendizaje del concepto de función cuadrática; el diseño abordó las tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica, y se llevó a cabo teniendo en cuenta las cuatro (4) fases de la ingeniería: Análisis preliminares, concepción de las secuencias y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y evaluación. Dentro de las conclusiones se abordaron entre otras: el diseño metodológico inspirado en microingeniería didáctica, la cual resulta coherente con la naturaleza del problema propuesto; la puesta en escena de la secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental, que pone en manifiesto que el concepto de la función cuadrática es posible trabajarlo en contextos de optimización.

En la investigación ‘Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones’, Ríos (2007) se planteó como objetivo determinar la efectividad de una ingeniería didáctica sobre las fracciones en estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Educación de Matemáticas y Física, el trabajo se llevó a cabo con 26 estudiantes, en la ciudad de Zulia, Venezuela. En la construcción del concepto de fracción intervienen muchas clases de representaciones, de tal forma que la autora se pregunta si es necesario para un estudiante de licenciatura manejarlas todas; la respuesta es afirmativa, debido a que las situaciones que involucran el concepto se desarrollan desde diversas estrategias, además el dominio del estudiante de los diferentes registros, le permite desarrollar procesos mentales como: comparación, análisis, síntesis, inferencias, que son procesos fundamentales en el pensamiento matemático.

Está investigación partió de dos supuestos: el primero, fue que los seres humanos no aprenden del mundo directamente y, el segundo, que la mente es un sistema procesador de información que utiliza funciones tales como: percepción, memoria, lenguaje y pensamiento. Para orientar estos supuestos se diseña y ejecuta una ingeniería didáctica cuyo objetivo es determinar la efectividad de la aplicación de esta. Para este trabajo se fijaron las variables de acuerdo a cada objetivo específico de la investigación, y se llevaron a cabo las cuatro fases de la ingeniería: análisis preliminares, concepción de las secuencias y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y evaluación; luego de aplicar las fases, se realizó el análisis de la efectividad de la ingeniería didáctica, para ello se tuvo en cuenta: el análisis de los errores y el análisis de contenidos, y se concluyó con la efectividad de la ingeniería en los aspectos: representaciones parte-todo, representación razón, resolución de problemas, operaciones combinadas, y fracciones equivalentes, entre otras; reconociendo la potencialidad de la aplicación de secuencias didácticas planeadas y organizadas en la construcción o reconstrucción de conceptos.

Al analizar las conclusiones de los trabajos mencionados y de muchos otros que contemplan la metodología de la ingeniería didáctica, podría decirse que a partir de los análisis a priori y a posteriori de secuencias didácticas, en las cuales han jugado un papel importante los análisis preliminares (en sus dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica), las variables didácticas, los tipos de estrategia de los estudiantes, los obstáculos epistemológicos, el componente didáctico, entre otros; se permite conocer una forma de acceso al saber matemático y a la construcción de conceptos; lo que constituye un aporte significativo al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje; por esto, se considera a la ingeniería didáctica un pilar para el desarrollo metodológico de esta propuesta.

Marco Teórico

En el marco de referencia conceptual se plantean conceptos teóricos básicos que fundamentan esta propuesta de investigación, la principal fuente está en **La Teoría de Situaciones Didácticas,** desde la cual se direcciona el proceso en el que se involucran otros elementos teóricos, entre los cuales están: conceptos sobre el aprendizaje del álgebra y el aprendizaje de las matemáticas en personas sordas.

El aprendizaje del álgebra

Para Filloy y kieran (1989) aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones.

Concepto de álgebra.

El álgebra es considerada el paso fundamental hacia la consolidación del lenguaje matemático que permite una instancia más formal, en este sentido autores como Usiskin (1988:11) refiriéndose al álgebra como método destaca los siguientes significados:

- Como aritmética generalizada, que formaliza distintos patrones numéricos y propiedades, en los que los números se sustituyen por variables.
- Como método para la resolución de ciertos tipos de problemas matemáticos en los que se desconoce algunos o algún valor llamado incógnita.
- Como estudio de las relaciones entre magnitudes, que implica la variación conjunta y el concepto de función.
- Como estudio de estructuras matemáticas, por ejemplo: grupos, polinomios, etc.

Desde el punto de vista de Esquinas (2008) el álgebra no debe considerarse solo como una generalización de la aritmética, sino que debe verse como un nuevo sistema que simboliza otros elementos y estudia sus relaciones; es un instrumento de estudio de las estructuras y no de objetos individuales. En este sentido el álgebra puede verse como una herramienta modelizadora de los sistemas matemáticos, funcionalidad que no debe ser olvidada para planificar la didáctica del álgebra pues proporciona una contextualización muy útil para el aprendizaje.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Al respecto el MEN (2006) en los Estándares básicos de competencias define el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, como el tipo de pensamiento que tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en los diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos; ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Se propone además que una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico, es mediante las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números, que involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras.

Otro elemento importante a tener en cuenta es el de razonamiento algebraico en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, en ellos se define el razonamiento como un proceso general del pensamiento variacional: “entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión” (MEN, 1998:77), también se establece que razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

Además se recomienda que para favorecer su desarrollo se debe propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas, y esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.

El aprendizaje del álgebra supone el empleo de estructuras de pensamiento con características especiales y propias del pensamiento algebraico, Font y Godino (2003:10) enuncian algunas características del razonamiento algebraico:

- Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas; pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes; los patrones se encuentran en formas físicas, geométricas y numéricas.

- Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.

- Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.

Con lo anterior se puede enunciar que el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico; especialmente, las ecuaciones, variables y funciones, en donde juega un papel importante el uso de los símbolos.

Relación entre el pensamiento variacional y el Pensamiento Métrico, Espacial y sistemas geométricos

El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático, y esta relación parece con mucha frecuencia ya que la variación y el cambio aunque tengan representaciones por medio de sistemas algebraicos y analíticos requieren de procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos, geométricos de medida y de datos. (MEN, 2006: 66).

En esta investigación la relación entre el pensamiento variacional y el pensamiento espacial y sistemas geométricos, se ve explicita si contemplamos este último como un conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales; puesto que haciendo uso de los sistemas geométricos y de sus formas de representación en contextos de área y perímetro, se estabecen relaciones con los sistemas simbólicos, buscando dar un mayor significado a la construcción de los conceptos algebraicos.

El análisis de las dificultades específicas con las que el estudiante se encuentra, así como los errores más frecuentes en el inicio del aprendizaje del álgebra, pueden dar orientaciones acerca de las barreras que se pueden encontrar en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas

El desarrollo del conocimiento matemático y del conocimiento científico en general, ha estado atado a los errores, basta dar una mirada a la evolución histórica de las ciencias para conocer que los avances han sido producto de ensayo y error. Al respecto Abrate, Pochulu y Vargas (2006:23) afirman que “La identificación y análisis de estos errores ha permitido sustituir un conocimiento viejo e institucionalizado en la sociedad por uno nuevo que se revela lleno de fuerza y vigor, con el correspondiente esfuerzo y sacrificio de quienes han tenido el valor de exponerlo y defenderlo ante cualquier adversidad"; cabe entonces reflexionar de forma general acerca de la importancia que tiene el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, aspecto que ha sido objeto de estudio de muchos otros autores como (González, 2005) quien distingue cuatro elementos básicos como productores de dificultades en el currículo de las matemáticas:

- Las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un estudiante en matemáticas.
- La necesidad de contenidos anteriores.
- El nivel de abstracción requerido.
- La naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

Para este autor estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y errores; además, afirma el autor que es necesario identificar errores en los procesos de enseñanza y aprendizaje para determinar sus causas y organizar la enseñanza donde el docente debe ser sensible a ideas previas y provocar técnicas de conflicto cognitivo que permitan lograr progresos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De otra parte, existen en matemáticas una gran variedad de dificultades generadoras de errores. Di Blas Regner (2003), citado por Abrate et al. (2006:31), las agrupa en los siguientes tópicos:

- ***Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*****:** Para los autores la comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos, con lo que estas dificultades están asociadas a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos por el uso inadecuado del lenguaje, en el caso de los estudiantes sordos esta dificultad se hace más evidente, pues la estructura de su lengua natural no posee los elementos necesarios que permitan comunicar los significados, y además, no hay una comprensión suficiente de la segunda lengua[5].

[5] La segunda lengua para personas sordas en nuestro contexto es el castellano.

- ***Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:*** Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de la matemática, y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático, el abandono de los procesos que desarrollan el aspecto deductivo formal en la escuela por su complejidad, sin embargo, esto no debe implicar una abandono también del desarrollo del pensamiento lógico, por ser este una destreza de alto nivel y necesaria para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.

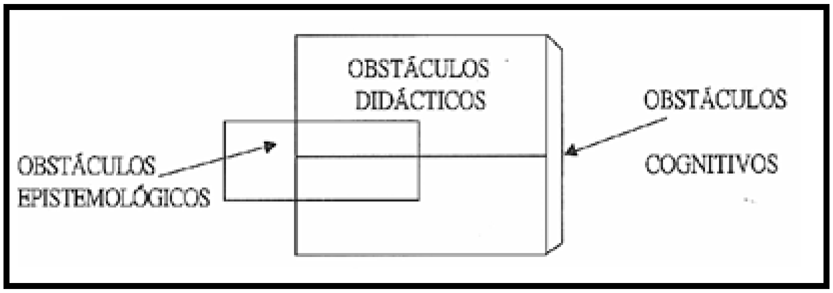
- ***Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza:*** Estas dificultades tienen que ver con los procesos de enseñanza de la institución escolar, con el currículo de matemática y con los métodos de enseñanza, desde este punto de vista, la organización curricular puede originar diferentes dificultades para el aprendizaje, los autores proponen cuatro elementos a considerar como dificultades en el currículo: las habilidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en esta ciencia, las necesidad de los contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de la matemática escolar.

- ***Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos:***
  Se asocia con dificultades propias del desarrollo intelectual de los estudiantes, representado en cada uno por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, y constituyen una herramienta valiosa para el docente al momento de diseñar situaciones de aprendizaje.

- ***Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales:***
  Tienen que ver con las actitudes negativas de muchos estudiantes hacia la matemática; y su causa puede ser variada, para los autores, algunos aspectos que influyen en esta aversión son: la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores, estilos de enseñanza, y las actitudes y creencias hacia la matemática que les son transmitidas.

Obstáculos.

Palarea (1999: 11) aclara la diferencia entre obstáculo cognitivo y errores, considerando que "Los obstáculos cognitivos son identificados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y sin embargo, resultan inadecuados al tenerse que enfrentar a otros problemas" Mencionan una propuesta de organización posible y útil de los obstáculos mediante el siguiente esquema:



> Sabemos que el desarrollo del pensamiento está lleno de obstáculos caracterizados como **epistemológicos**, sin embargo,estos no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; no obstante, aceptamos que tales organizaciones de las matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como **didácticos**. Ahora bien, la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales, está salpicado de obstáculos que podemos considerar **cognitivos.** (Palarea, 1999:11).

Por su parte, González (2005:61) retoma la síntesis hecha por Selden y Selden (2001), sobre los obstáculos:

EPISTEMOLÓGICOS	Surgen a partir de la naturaleza de aspectos particulares del conocimiento matemático.
COGNITIVOS	Surgen de la cognición de un individuo sobre un tópico matemático concreto.
DIDÁCTICOS	Surgen a partir de las características particulares de la enseñanza de las matemáticas.

Esta investigación no centrará sus objetivos en el estudio de los obstáculos, pero dentro del análisis de la dimensión cognitiva (fase I de la ingeniería), se ahondará un poco sobre los errores que se comenten en especial en el aprendizaje del álgebra que ya han sido analizados por algunos autores como Palarea et al. (1994), esto con el fin de tenerlos en cuenta en la planificación de las situaciones didácticas; al respecto, D’Amore *et al.,* (2010:14) afirman que: “Nuestra firme convicción es que un docente debe ser capaz de reflexionar sobre las dificultades, sobre los errores (que son evidencias externas), sobre las causas, sobre el estudio de intervenciones para remediar, […]”.

Comunidad Sorda y Aprendizaje de las Matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional establece las orientaciones pedagógicas necesarias para la atención educativa a estudiantes con limitación auditiva: "El estudiante sordo es un ser multidimensional que requiere de contextos sociales, educativos, culturales, políticos y económicos; es sujeto de derecho y como tal desarrolla su personalidad y participa en igualdad de condiciones". (MEN, 2006:5).De acuerdo a lo anterior, es necesario tener en cuenta las características de estos estudiantes en el momento de planear situaciones didácticas de tal forma que respondan a sus necesidades y posibiliten la evolución de los conceptos.

Necesidades educativas especiales (NEE).

Se definen como estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE) a aquellas personas con capacidades excepcionales, o con alguna discapacidad de orden sensorial, neurológico, cognitivo, comunicativo, psicológico o físico-motriz, y que puede expresarse en diferentes etapas del aprendizaje.

El MEN en el Artículo 2 del Decreto 366 de 2009, define por estudiante con discapacidad a aquel que presenta limitaciones en su desempeño dentro del contexto escolar y que tiene una clara desventaja frente a los demás, por las barreras físicas, ambientales, culturales, comunicativas, lingüísticas y sociales que se encuentran en su entorno. La discapacidad puede ser de tipo sensorial como sordera, hipoacusia, ceguera, baja visión, y sordoceguera, de tipo motor o físico, de tipo cognitivo como síndrome de Down u otras discapacidades caracterizadas por limitaciones significativas en el desarrollo intelectual y en la conducta adaptativa, o por presentar características que afectan su capacidad de comunicarse y de relacionarse como el síndrome de Aspeger, el autismo y la discapacidad múltiple.

Características de la enseñanza a personas con limitación auditiva.

De acuerdo al Ministerio de Educación Nacional las instituciones educativas con población sorda, deben tener en cuenta al interior de un modelo pedagógico las siguientes orientaciones:

- La lengua que medie la enseñanza, debe ser la primera lengua de la población sorda.
- El maestro es el mediador en los procesos de aprendizaje con capacidad reflexiva y crítica para identificar, proponer y acompañar en la construcción del conocimiento.
- El maestro debe ser un modelo lector y escritor.
- El maestro reconoce en el estudiante sus potencialidades y dificultades, respetando los ritmos y estilos de aprendizaje.
- El estudiante y el maestro deben compartir la forma y el código lingüístico ya que esto posibilita comprender aquellas situaciones que se derivan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En los casos de integración se debe contar con medicación comunicativa del intérprete de LSC. (MEN, 2006:18).

Basándose en las recomendaciones anteriores, las actividades de aula planeadas para el aprendizaje de los estudiantes sordos deben tener características didácticas que respondan a sus necesidades, con el objetivo de conocer la evolución de sus conceptos; al respecto, el Instituto Nacional para Sordos- INSOR (2011), recomienda a las situaciones didácticas como mediadoras y posibilitadoras de estos procesos:

La lengua de señas colombiana

Aunque no existen registros sobre el nacimiento de la lengua de señas en nuestro país, Oviedo (2001) retoma algunos acontecimientos que pudieron dar origen a este complejo sistema de comunicación. Primero que todo no se puede descartar la existencia de algunos sistemas de señas en el territorio colombiano antes de la llegada de los españoles, ni que en el transcurso de varios siglos hayan surgido códigos de señas entre los habitantes sordos dando origen a lo que es hoy la LSC, sin embargo, de acuerdo a la información disponible, toma valor la influencia que pudo tener en la conformación de la LSC la comunidad de niños sordos que se formó en 1924 en la ciudad de Bogotá tras la fundación del internado Católico nuestra Señora de la Sabiduría. "A pesar de su orientación oralista, este internado habría constituido un espacio idóneo para que un colectivo de sordos pudiera congregarse y desarrollara el germen de una lengua de señas". Oviedo (2001:37).

La Lengua de Señas Colombiana, utilizada por la comunidad sorda de nuestro país[6] apenas fue reconocida oficialmente en el año1996 tras varios intentos para consolidarla como la forma de expresión lingüística de esta comunidad, pues el uso de estas representaciones gestuales fue prohibido durante décadas. Las consecuencias de estas prácticas se ven reflejadas en la actualidad a través de un alto porcentaje de sordos adultos que muestran analfabetismo y pocas oportunidades de progreso social, la mayoría de los adultos sordos de hoy fueron educados dentro de una concepción oralista, que tenía la intención de ayudarlos a hablar)[7].

Una persona sorda no puede acceder naturalmente a la lengua utilizada en su medio (en este caso la lengua castellana), por lo que se vuelve trascendental que su interacción con el mundo exterior sea mediada por un sistema de comunicación lingüística que se adquiera de forma natural (la lengua de señas), ya que cumple una función similar a la de las lenguas orales, permite el desarrollo del pensamiento, da respuesta a las necesidades comunicativas de las comunidades y contribuye a la construcción de la identidad de los grupos.

La lengua de señas está constituida por un complejo sistema de códigos viso-gestuales, que tiene características gramaticales propias para garantizar la función comunicativa entre sus usuarios. Este se estructura de tal forma que adquiere un sentido sintáctico y semántico, contando con elementos que le dan sentido a las oraciones de forma similar a la de la

---

6 se entenderá como Sordo, a "una persona cuyo nivel de pérdida auditiva la inhabilita para adquirir y usar naturalmente una lengua oral como primera lengua, por lo cual recurre a una lengua de señas para resolver sus necesidades lingüísticas". Concepto de persona Sorda asumido por Oviedo, A. en "Apuntes para una gramática de la lengua de señas Colombiana". INSOR (1998).

[7] Fenascol (2014).
http://www.fenascol.org.co/index.php?option=com_content&view=article&id=14&Itemid=35

lengua escrita (existencia de nombres, verbos, deícticos, pronombres, que permiten conformar gramaticalmente lo que se conoce como oración: relación entre sujeto y predicado). La dinámica gramatical de la LSC está constituida como una interacción entre nombres, sustantivos, sujetos y verbos, además de algunos conjuntos de rasgos no manuales, tales como la postura del cuerpo y los gestos, que de acuerdo al orden, agrupación y relaciones entre ellos van adquiriendo roles semánticos. (Oviedo, 2001).

Si comparamos las señas (LSC) con las palabras en lengua escrita, ambas son producto de la relación entre una seña física y un significado (ya sea visual en LSC o auditivo en la lengua escrita) que corresponde a la construcción mental que se haya constituido de esta idea, este vínculo entre un estímulo físico y un significado es lo que se conoce en lingüística como un *signo*; dentro de la clasificación de estos *signos* se distinguen tres tipos: símbolos, deícticos e íconos. (Oviedo, 2001). En la LSC existen esquemas que de alguna manera calcan algo de la realidad percibida, esta correspondencia se llama iconicidad que tienen lugar por su relación íntima con el proceso de la visión y juega un papel fundamental en la gramática de la lengua de señas, aunque cabe recalcar que al interior de la LSC también hay señas con ausencia de dicha relación de semejanza. En la LSC encontramos dos clases de señas icónicas: *las presentaciones* (aquellas que señalan una imagen del referente o de la acción de los mismos) y *las representaciones* (la mano actúa como un lápiz que trazará en el espacio la forma del objeto).

La lengua de señas el contexto educativo

La escuela es un escenario de aprendizaje que debe proporcionar los elementos pedagógicos necesarios que garanticen procesos significativos para la construcción de conceptos, en ese caso es vital el lenguaje como elemento mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje con estudiantes sordos, así es como en los contextos educativos se debe afianzar esta interacción de forma que redunde en más y mejores oportunidades para la construcción de los aprendizajes. Para Márquez (2011: 81) “La lengua de señas permite dar vida a todas las interacciones en el aula […] no es un simple instrumento metodológico dentro de la planeación, sino que permite dar vida a las diferentes interacciones entre los sujetos y los objetos que intervienen en una situación didáctica".

Desde esta apreciación, los elementos que brinda la lengua de señas fortalecen su identidad al interior de las instituciones educativas, y aumentan las posibilidades de socialización con sus pares; así mismo que constituyen un vehículo de su cultura. Para Tovar (2001: 49) "[…] es a través de la socialización, utilizando una lengua natural asequible al canal viso-gestual, como los sordos inician su desarrollo cognitivo".

A pesar de lo anteriormente expuesto, en las aulas todavía se refleja la ausencia de elementos de comunicación en lo que se refiere a la LSC, por eso hacen falta propuestas con alternativas viables que mejoren los procesos de enseñanza y aprendizaje. En la institución Educativa CASD de la ciudad de Armenia encontramos aulas con estudiantes oyentes y sordos, docentes oyentes no idóneos en lengua de señas y procesos de comunicación mediados únicamente por intérpretes de LSC, una alternativa para mejorar dichos procesos podría estar en planear situaciones didácticas que incluyan la mayor cantidad de códigos lingüísticos proporcionados por la LSC y que sean compartidos por estudiantes oyentes, intérpretes y docentes.

En lo que se refiere al aprendizaje de los conceptos matemáticos, la iconicidad de la lengua de señas puede ser útil y potencialmente significativa en la construcción cognitiva de un objeto matemático, ya que deja ver algunas características propias del significado del mismo, lo que no es tan evidente en la lengua escrita. En la iniciación al álgebra, cuando se usan procesos de generalización en contextos de área y perímetro, las señas de estas dos palabras proporcionan a los estudiantes sordos mayor estabilidad en lo que se refiere a dichos conceptos y sobre todo en el momento de establecer diferencias entre ellos. De igual manera vale la pena evaluar qué otras señas de presentaciones o representaciones icónicas podrían ser de utilidad en los procesos de construcción del significado de un objeto matemático; donde los procesos de visualización, manipulación de objetos y uso de representaciones juegan un papel preponderante.

Situaciones didácticas para la comunidad sorda.

Es importante reflexionar sobre el trabajo a través de situaciones didácticas con los estudiantes sordos, frente a esto Márquez (2011) retoma aspectos relevantes de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como una forma de materializar didácticamente una postura constructivista de la enseñanza de las matemáticas y considera las situaciones didácticas como escenarios para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en donde se tienen en cuenta: el rol del docente frente al diseño y gestión de ambientes para el aprendizaje, el estudiante en cuanto a su acción sobre el medio para la construcción del conocimiento, el saber como insumo y producto del trabajo de los autores.

El autor plantea que:

> En una dinámica de clase efectiva, el docente reconoce el medio, un contexto próximo, real o imaginario del estudiante, a su vez selecciona el saber matemático y en dicho ambiente un problema relativo a dicho contexto. Posteriormente en el desarrollo de la situación, va orientando las acciones del estudiante para que este pueda construir los conocimientos matemáticos que surgen del tratamiento del problema. Para hacer posible una actividad de este tipo, el profesor debe diseñar y proponer a sus estudiantes situaciones que ellos puedan vivenciar y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el estudiante pueda construir. (Márquez, 2011:47).

De este modo, las situaciones didácticas favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes sordos, Márquez (2011) enuncia dicha favorabilidad de la siguiente manera:

> **Situaciones de acción:** son aquellas en las que se privilegia la acción directa sobre el problema, contexto o materiales para que cada estudiante de manera particular se haga una

idea personal de lo trabajado, formule hipótesis, pruebe y concluya sobre la solución del problema.

Situaciones de formulación: estas situaciones son de tipo colaborativo y se presenta una interacción comunicativa frente a las ideas desarrolladas en torno a la solución, favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos (formas de expresar, representaciones, materiales y símbolos), enriqueciendo los saberes desarrollados.

Situaciones de Validación: en estas situaciones el estudiante debe usar ideas matemáticas para determinar la solución a las situaciones problema, justificar ideas y procedimientos para la solución, es decir validar los conocimientos construidos. Esta validación permite que el estudiante conceptualice frente al saber matemático de manera adecuada.

Situaciones de institucionalización: Aquí se reconoce, establece y concierta el conocimiento que surgió durante la actividad matemática, lo que significa que las ideas construidas por los estudiantes, se correspondan con las ideas disciplinares que socialmente se han establecido frente al conocimiento. (Márquez, 2011:52).

Orientaciones para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes sordos.

Según Márquez (2011) existe la necesidad de una visión constructivista de las matemáticas para facilitar la enseñanza de estas en los estudiantes sordos y considera que es importante:

> Generar ambientes en donde los estudiantes sordos desarrollen procesos de construcción de conocimiento matemático significa ofrecer situaciones problema que, teniendo en cuenta las características socioculturales y comunicativas del mismo niño y de su contexto, generen retos y desarrollos cognitivos y promuevan simultáneamente el desarrollo del lenguaje y las producciones lingüísticas que permitan hablar de ellos. Esta visión constructivista de las matemáticas resulta pertinente frente a la formación matemática de la población sorda, pues privilegia procesos que son necesarios de abordar en el contexto educativo, dadas las condiciones de ingreso y las barreras de socialización primaria que caracterizan a un alto porcentaje de niños y jóvenes sordos. Esta visión potencia el asunto de las relaciones e interacciones con el medio y los pares, parte del reconocimiento de las experiencias y saberes previos del estudiante como base para forjar nuevas construcciones del conocimiento; promueve la generación y uso de diversos tipos de representaciones para comprender y comunicar el conocimiento y prioriza el hecho de que la construcción de los conocimientos esté en la base de situaciones y experiencias que tengan sentido y significado para los estudiantes. (Márquez, 2011:45).

Desde esta perspectiva el mismo autor propone que algunas recomendaciones que deben tener los docentes al momento de diseñar situaciones didácticas para los estudiantes sordos deben ser:

- El docente deberá problematizar los contextos cercanos a los estudiantes para generar situaciones donde el conocimiento matemático emerge para dar solución a dichos problemas, para ello, deberá reconocer ciertas variables económicas, sociales, físicas y culturales que afectan el contexto del estudiante, y que pueden ser aprovechados para el diseño de problemas pertinentes en el marco de las situaciones.

- Para desarrollar situaciones didácticas para estudiantes sordos, se debe promover dentro de la situación un ambiente comunicativo muy completo y diverso, con el propósito de construir conocimientos matemáticos, recuperar o significar las experiencias frente a la medida, la cantidad, el cálculo, el espacio y la variación, nombrar el mundo y los fenómenos que ocurren en el entorno.

- El estudiante, constructor de su propio conocimiento debe enfrentarse a las situaciones didácticas para actuar sobre los problemas, preguntarse y responderse formulando hipótesis para las posible soluciones y probarlas en el sentido de los problemas.

- El saber matemático, actor de la situación didáctica y que circula en las actividades de la clase, es considerado como la solución que emerge de los problemas que se plantean dentro de la situación. Esto significa que el saber, enseñado al interior de una situación didáctica no se restringe a un solo contenido matemático y no se presenta guardando un orden semejante a una tabla de contenido de libro de texto, sino que se construye y se estructura a partir del tipo de situaciones problema.

- La lengua de señas colombiana (LSC) debe ser un punto de reflexión y análisis permanente cuando el docente está realizando situaciones didácticas en matemáticas. (Márquez, 2011:45).

Implicación e importancia de los recursos visuales en la construcción de conceptos matemáticos por parte de la persona sorda.

La percepción visual es una herramienta importante para la enseñanza de las matemáticas en los estudiantes sordos, precisamente, para Márquez (2011) el contexto donde se desenvuelven los problemas debe privilegiar la presencia de condiciones visualmente significativas en los materiales, recursos y representaciones. Esta indicación se traduce en la incorporación de recursos didácticos que ofrezcan información visual necesaria para la representación y tratamiento de los objetos de aprendizaje en el contexto del problema.

Con lo anterior, se hace referencia a la importancia que tiene la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes sordos, otros autores como González et al. (2006) han demostrado que actividades que comprometen en mayor medida la visualización como son las gráficas y las representaciones no verbales, favorecen la comprensión y la representación mental del alumnado sordo y son el mejor vehículo para la adquisición del conocimiento en estos estudiantes.

La Teoría de Situaciones Didácticas

Esta teoría se sustenta en una concepción constructivista del aprendizaje, en palabras de Brousseau (1986) "el estudiante aprende adaptándose a un ambiente que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje […]". (D´Amore, 2006:243).

Teniendo en cuenta que el aprendizaje de los conceptos es el resultado de un proceso mediado por diversos factores, se considera a la teoría de situaciones didácticas como un elemento de saber importante que permite comprender las acciones de docentes y estudiantes. Al mismo tiempo que para planear y producir elementos didácticos adaptados a sus necesidades; por esta razón, la teoría de las situaciones didácticas representa para esta propuesta un factor esencial dentro del marco teórico. Al interior de ella se consideran algunos conceptos fundamentales:

Situación: La situación según Brousseau es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas requieren la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso genético. (Panizza, 2011:3).

Desde la perspectiva anterior, se hace necesario que el estudiante se interese personalmente por la resolución de un determinado problema, para que construya el concepto como resultado de utilizar diversas estrategias, mediante la modificación de un sistema de conocimientos; para lograrlo es necesario que las situaciones funcionen de forma a-didáctica.

Situación a-didáctica: es toda situación que, por una parte, no puede ser denominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende, y que por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

Según D´Amore (2006:243) en una situación a-didáctica, “se hallan en juego los estudiantes y el objeto del conocimiento, pero no el maestro (en esa ocasión particular). La situación sugiere exigencias y los estudiantes dan repuestas a ellas. No hay obligaciones didácticas, lo que se hace no se halla ligado a estímulos por parte del maestro” La intervención del maestro en esta etapa no puede ser solo dar indicaciones sobre cómo llegar a la solución, sino encontrar intervenciones sobre la relación alumno-problema.

En las situaciones a-didácticas hay interacción del estudiante con una situación problema que ofrece resistencia, a la que debe enfrentarse con sus propios conocimientos, y a través de ese proceso, el estudiante elige alternativas de solución y analiza los resultados de su elección, permitiéndose afirmar o corregir sus errores y construir, a partir de los resultados obtenidos, evoluciones en su conocimiento.

En esta búsqueda de construcción del conocimiento, el estudiante o el grupo de estudiantes, requiere conocer si las estrategias que han llevado a cabo son las más adecuadas, o si por el contrario, verifica que no se alcanzan los resultados esperados, es entonces, cuando es necesario dar lugar al concepto de sanción.

Sanción: es una concepción intrínseca a la noción de a-didáctico, se encuentra relacionada con la importancia de que el estudiante acceda a una información que le permita juzgar por sí mismo la adecuación o no a la respuesta.

Luego de que se ha llevado a cabo una situación a-didáctica, se deben plantear situaciones con la intención explícita de enseñar, para D´Amore (2006:245) "son situaciones de estímulo concreto para hacer actividades, para resolver problemas, para ejecutar tareas; en este caso el maestro es consciente de su papel y de cómo la situación se está desarrollando".

Situación didáctica: una situación didáctica es según Godino (1991) un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes; algún elemento del entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el maestro, con el fin de permitir a los estudiantes aprender, es decir: reconstruir algún conocimiento. (D'Amore, 2006).

En la situación didáctica hay interacción docente-medio-alumno con un propósito de aprendizaje y permite direccionar intencionalmente las situaciones hacia una construcción conceptual.

Según D´Amore (2006:98) el conocimiento matemático incluye no solo conceptos, sino también esquemas de representación simbólica; no solo procesos de desarrollo, sino también validaciones de nuevas ideas matemáticas. En la teoría se contemplan cuatro tipos de situaciones:

- **Situaciones de acción:** Funcionan sobre el ambiente y favorecen el nacimiento de teorías (implícitas) que funcionarán en el grupo como modelos protomatemáticos.[8]

- **Situaciones de formulación:** Favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos, si tienen dimensión social explícita, se habla entonces de situaciones de comunicación.

- **Situaciones de validación:** A los estudiantes se les piden pruebas y, por lo tanto, explicaciones sobre las teorías utilizadas y también explicitación de los medios que subyacen en los procesos demostrativos.

- **Situaciones de institucionalización**: Tienen el objetivo de establecer y dar un status oficial a conocimientos aparecidos durante las actividades en el salón. Normalmente tienen relación con conocimientos, símbolos, entre otros, que se deben tener en vista de su utilización en un trabajo sucesivo.

En este sentido, la presente investigación pretende el diseño y análisis de secuencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios para estudiantes sordos, en estas secuencias estarán las diferentes clases de situaciones didácticas y a-didácticas, en donde se especificarán los momentos de acción, formulación y validación (lo que se llamará el diseño de la ingeniería didáctica); en cada situación presentada, se especificarán los objetivos, los aspectos de las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva a trabajar, y los recursos didácticos que se han elegido para esta situación.

Para lograr la evolución de los conceptos algebraicos mencionados, se privilegiarán actividades que contengan materiales manipulativos que involucren procesos de visualización matemática y las diferentes formas de representación para cada concepto, entre otros.

Vale apuntar que en la construcción de un concepto matemático existen diferentes objetos teóricos que posibilitan su evolución, en la teoría de situaciones didácticas estos elementos reciben el nombre de variables y su identificación es fundamental porque conforman el

---

[8]Como Protomatemáticos podemos considerar a aquellas nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

conjunto teórico de conceptos y condiciones sobre el cual se actuará. Por ejemplo para este caso, algunas variables están constituidas por el conjunto de preconceptos necesarios para poder acceder a la suma, sustracción y multiplicación de polinomios: concepto de variable y sus representaciones, operaciones aditivas y multiplicativas con números enteros, los términos, propiedades de la potenciación, valor numérico, grado, área y perímetro, entre otros.

Variable didáctica: Para Brousseau (2007) las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación", "El docente puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable [...].". (como se cita en Panizza, 2011:10).

Otro concepto importante dentro de la teoría es el de **Devolución** definido por Brousseau como: "El acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia". (como se cita en Panizza, 2011:8). En esta parte se comprueba que las secuencias de situaciones didácticas planteadas por el docente en el transcurso del proceso de enseñanza y aprendizaje han sido exitosas, y el estudiante asume el reto del aprendizaje del concepto y se interesa por la resolución del problema planteado.

Finalmente, como en todo proceso de enseñanza y aprendizaje debe darse entre el maestro y el estudiante la presentación de las actividades, las formas de trabajo, las expectativas, las reglas del juego y las normas a tener en cuenta, es allí donde se establece el **Contrato didáctico,** el cual está constituido por los hábitos específicos del maestro, esperados por los estudiantes; y los comportamientos de los estudiantes, esperados por el docente en una situación de enseñanza. En esta parte, en la relación docente-estudiante se crean las normas de lo que cada uno espera del otro, se establecen criterios de metodologías, terminologías, formas de interpretación de las preguntas, de las obligaciones impuestas que son propias del modo de enseñar del maestro.

En un proceso didáctico debe existir un vínculo que permita convertir el saber por enseñar en saber matemático, este proceso es llamado transposición didáctica y constituye un factor muy importante para la teoría.

La transposición didáctica, según Chevallard (1998:45) es “Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El ‘trabajo’ que transforma de un objeto de saber a enseñar, en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica”.

La transposición didáctica consiste entonces, desde el punto de vista del maestro, en construir sus clases tomando en cuenta las orientaciones proporcionadas por las instrucciones y los programas (saber por enseñar), para adaptarlos a su propia clase: nivel de los estudiantes, objetivos perseguidos. (D´Amore, 2006:236).

Hay que resaltar que las transposiciones didácticas juegan un papel importante en toda situación de aprendizaje, ya que permiten conducir un elemento de saber de su contexto general a un contexto singularizado, la necesidad de proponer transposiciones didácticas que respondan a condiciones especiales de aprendizaje llevan a la búsqueda de alternativas que conduzcan a propuestas didácticas más efectivas.

La Ingeniería Didáctica

Como modelo de investigación la Ingeniería Didáctica surge en los años ochenta como respuesta a las exigencias de asignar una función efectiva a las investigaciones educativas, en particular, frente el requerimiento de que sus producciones sean significativas para la enseñanza y el aprendizaje, y para la necesidad de consolidar una metodología específica para la didáctica de las matemáticas. (Calderón et al. 2012).

El interés de la Ingeniería Didáctica es estudiar el problema de la acción y los medios de acción en el sistema educativo; Para Artigue (1995), Se caracteriza por ser un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Fases de la ingeniería.

Artigue (1995:38-48), describe las cuatro fases de la ingeniería didáctica así:

- Fase I de análisis preliminar.
- Fase II de diseño y *análisis a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería.
- La Fase III de experimentación.
- Fase IV de *análisis a posteriori* y evaluación.

Fase I: Los análisis preliminares.

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Dentro del análisis preliminar se indaga sobre los aspectos que tiene que ver con las características asociadas a las dimensiones epistemológicas (propias del saber), cognitiva (de las capacidades diferentes de los estudiantes) y didáctica (el funcionamiento de los sistemas de enseñanza en cuanto al concepto). Se pretende en esta fase identificar las restricciones que existan en cada una de las dimensiones.

Cabe señalar que los estudios preliminares tan solo mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración, posteriormente van tomando distintos lugares y funciones en la investigación. Artigue (1995).

Fase II: El diseño y análisis a priori de las situaciones.

En esta fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Se distinguen dos tipos de variables: *variables macro-didácticas o globales,* concernientes a la organización global de la ingeniería *y variables micro-didácticas o locales,* concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Para Artigue (1995), este análisis se debe concebir como un *análisis de control del significado,* aclara que si bien la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos mediante la interacción con un medio determinado, la teoría de situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en un teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones.

Esta fase comprende una parte descriptiva y una predictiva, se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha diseñado y que se va a llevar a los alumnos:

- Se describen las selecciones de nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ella se desprenden.

- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante, en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone; una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.

- Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultados de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Fase III: Experimentación.

En esta tercera fase se lleva a cabo la experimentación, es decir, se aplican las situaciones didácticas de acción, formulación, validación e institucionalización que hacen parte de las secuencias de clase, y se realiza la observación de las mismas. Algunos aspectos a tener en cuenta son:

- Explicar los objetivos de la investigación a los estudiantes.
- Establecer el contrato didáctico.
- Aplicar los instrumentos de investigación, recoger los datos (observaciones, producciones de los estudiantes, cuestionarios, entrevistas, grabaciones), y registrar la información obtenida.
- Llevar a cabo las situaciones didácticas de acción, formulación, y validación, que permitan ver cómo se construyen los conceptos.

Fase IV: De análisis a posteriori y evaluación.

A la fase anterior sigue una de análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber: las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o en su transcurso. Y en la confrontación de los dos análisis a priori y a posteriori se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas (si las hay)

Metodología

La investigación cualitativa- interpretativa es el enfoque que permite entender la realidad educativa con el objetivo de lograr la comprensión o la transformación de la misma, partiendo de las observaciones del investigador quien tiene por función la interpretación de las situaciones a partir de las percepciones, creencias y significados proporcionados por los protagonistas; estos y otros beneficios en el campo educativo de la investigación cualitativa han permitido este estudio de caso, ya que este permite observar el contexto en forma natural y atendiendo a sus diferentes perspectivas, lo que exige la utilización de diversas técnicas interactivas, flexibles y abiertas, que permiten captar la realidad con todas las dimensiones que la completan.

Bisquerra (2009:277) resume los puntos de vista de autores como Taylor y Bogdan; Eisner, Rossman y Rallis; sobre las características de la investigación cualitativa; los cuales se enuncian continuación:

- Es inductiva.
- Se desarrolla en contextos naturales.
- El investigador desarrolla sensibilidad hacia su biografía personal(reflexividad).
- Comprensión de las personas dentro de su propio marco de referencia.
- Carácter interpretativo.
- Perspectiva holística.
- Es un arte.
- Sensibilidad ante los posibles efectos debido a la presencia del investigador.
- Valoración de todas las perspectivas.
- Todos los escenarios y las personas son dignos de estudio.
- Uso de lenguaje expresivo.

El estudio de caso: Para Bisquerra (2009) es un método de investigacion cualitativa que implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen sistemático y a profundidad de casos de un fenómeno, entendidos estos como entidades sociales o educativas. La finalidad es conocer cómo funcionan las partes del caso para generar hipótesis, aventurándose a alcanzar niveles explicativos de las supuestas relaciones descubiertas.

Ámbito de la Investigación

Este estudio de caso se realizó en la Institución Educativa CASD de la ciudad de Armenia, y se aplicó a dos estudiantes sordos profundos que cursan grado once; a los estudiantes se les aplicó el diseño didáctico correspondiente a tres sesiones, cada una clasificada en etapas, en las cuales intervienen la selección de tareas y actividades en situaciones de acción (se busca de forma especial que el estudiante entre en conflicto cognitivo con los conceptos), situaciones de formulación (se pretende evidenciar en los estudiantes la relación que realizan entre las diferentes formas de representar un concepto: su lenguaje natural LSC, la lengua castellana , el registro simbólico y el registro gráfico) y situaciones de validación (estas forman parte de cada sesión, buscan verificar el nivel de los aprendizajes).

La duración fue de 4 meses (febrero-mayo) en jornadas contrarias a las escolares; los criterios de selección de la población fueron por facilidad de contacto y cercanía, además se contó siempre con un intérprete de lengua de señas colombiana.

Es de considerar que los dos estudiantes son mayores de 18 años, ya que en Armenia la mayoría de la población sorda inicia la etapa de escolaridad de forma tardía, razón por la cual adquieren tarde su lengua materna (LSC) y su segunda lengua (el castellano). En este sentido es fundamental recordar que el lenguaje oral juega un papel importante en los procesos de desarrollo del niño y se va haciendo fuerte a través de la vida cuando este interactúa y aprende del contexto; en cambio para el niño sordo al estar limitado por este sentido, el conocimiento del mundo exige potenciar otras formas de lenguaje como por ejemplo el visual, de allí que el uso de estas formas de representación sean un apoyo importante en la construcción del significado de los conceptos.

Propuesta de Intervención

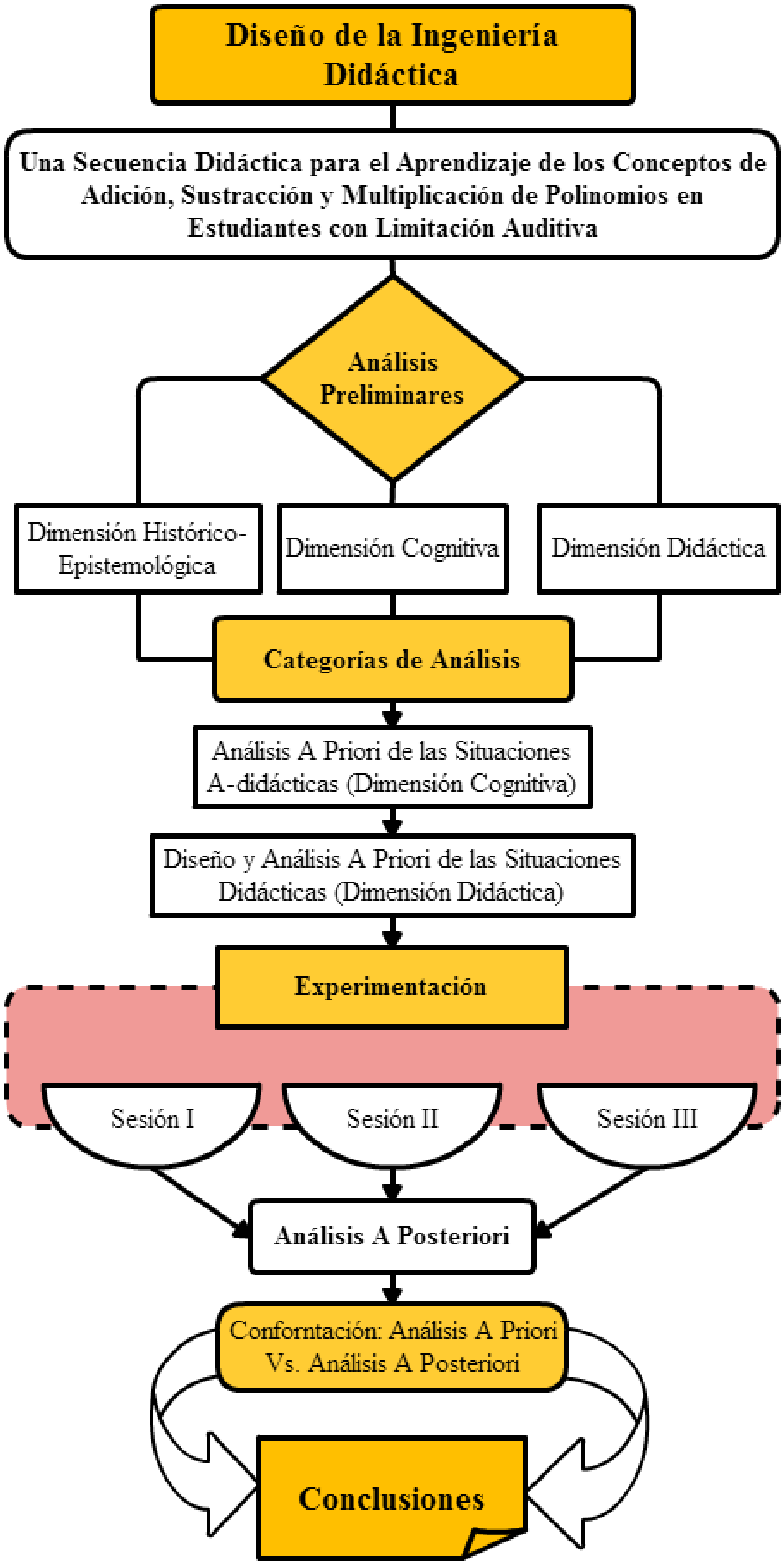
Diseño de una Ingeniería Didáctica para lograr la comprensión del objeto matemático

En los procesos de transposiciones didácticas se requiere un estudio conducido de manera racional de los procesos didácticos, por medio de una metodología que se base en un sistema de realizaciones didácticas en clase, esta metodología es la ingeniería didáctica; ella se diferencia de otros tipos de investigación cualitativa por el registro en el que se ubica y por las formas de validación a las que está asociada, es decir, mientras las investigaciones de experimentación en clase se enfocan en comparaciones entre grupos experimentales y grupos de control, la Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de estudios de caso y su validación es en esencia interna; basada en la confrontación entre análisis a priori y a posteriori.

> El término de Ingeniería Didáctica, designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso a la dinámica de la clase. Artigue (1995).

Para Calderón y León (2012) las investigaciones que usan la Ingeniería como metodología se clasifican en tres tipos: primero, las que tienen como sustento la enseñanza pero que no se ciñen a contenidos específicos; segundo, las que apuntan al dominio paramatemático donde las nociones como ecuación y demostración, entre otras, guardan un estatus de herramienta en la enseñanza; y tercero, las que consideran la elaboración de génesis artificiales para un concepto matemático determinado. Este caso en particular se relaciona con la segunda clasificación, ya que se abordan conceptos matemáticos (adición, sustracción y multiplicación de polinomios) como herramientas de enseñanza.

Este enfoque metodológico es apropiado a la investigación, ya que se pretende dar alternativas desde el campo didáctico para el aprendizaje de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios en estudiantes sordos, partiendo del análisis de experiencias didácticas y a-didácticas de aula.



Diseño de la Ingeniería Didáctica
Una Secuencia Didáctica para el Aprendizaje de los Conceptos de Adición, Sustracción y Multiplicación de Polinomios en Estudiantes con Limitación Auditiva
Análisis Preliminares
Dimensión Histórico-Epistemológica
Dimensión Cognitiva
Dimensión Didáctica
Categorías de Análisis
Análisis A Priori de las Situaciones A-didácticas (Dimensión Cognitiva)
Diseño y Análisis A Priori de las Situaciones Didácticas (Dimensión Didáctica)
Experimentación
Sesión I
Sesión II
Sesión III
Análisis A Posteriori
Conforntación: Análisis A Priori Vs. Análisis A Posteriori
Conclusiones

Análisis Preliminares

Análisis de la dimensión histórico-epistemológica de los conceptos.

El análisis epistemológico debe permitir un conocimiento de la evolución de los conceptos con el paso del tiempo, y además contemplar los fundamentos y procesos que permitieron su construcción. Para Artigue (1995) el análisis epistemológico ayuda a la didáctica a retomar la ilusión de transparencia de los objetos que ella manipula al nivel del saber y ayuda al didáctico a librarse de representaciones epistemológicas erróneas que tienden a inducir su enseñanza. Los procesos históricos que posibilitaron la evolución de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, así como los componentes necesarios para su construcción y las relaciones que existen entre estos, se tendrán en cuenta en el presente análisis epistemológico; primero mediante una revisión histórica y, posteriormente, en un análisis sobre la construcción teórica de los conceptos.

Evolución histórica del álgebra.

Retomar los momentos históricos más destacados que hicieron posible la evolución del álgebra, permite conocer los aspectos generales de cada uno de ellos y las posibles rupturas epistemológicas que se originaron en el largo camino en la transición de la aritmética al álgebra, esta última tardó mucho tiempo en su desarrollo histórico hasta convertirse en lo que hoy conocemos como álgebra moderna:

La duración de su desarrollo histórico es una prueba más de la complejidad y dificultad que esconde el álgebra, al respecto unas palabras de Brousseau (1989) parafraseando a Dieudonné: "Mientras que apenas fue necesario un siglo para que la geometría elemental lograra una forma casi definitiva, han sido necesarios trece siglos desde Diofanto para que el álgebra llegue a ser lo que ahora conocemos". (Esquinas, 2008:82).

A través de la historia el álgebra surge como la necesidad de la generalización de procesos aritméticos, como soporte para la resolución de ecuaciones y estudio de las operaciones y sus propiedades. La aparición del álgebra se enmarca en tres etapas:

Primera etapa: el álgebra retórica.

Es la etapa comprendida desde los Babilonios año 1700 a.C., hasta Diofanto año 250 d.C. Allí, las operaciones se descubrían con palabras, la técnica para resolver los problemas se basaba en el empleo de un lenguaje natural y geométrico sin que se evidencien procesos de generalización.

En el caso de la cultura Babilónica, los problemas algebraicos aparecen resueltos por medio de "recetas", Ballén (2012) ilustra un ejemplo en el que realiza un paralelo entre la receta para solucionar un problema (elaborado por un escriba[9]) y su traducción al lenguaje algebraico actual:

Trapezoide babilónico

[9] Los escribas: conocían el sumerio la lengua más prestigiosa de la vieja cultura mesopotámica, ellos desarrollaban su trabajo en la corte del rey o eran secretarios personales de varios gobernadores.

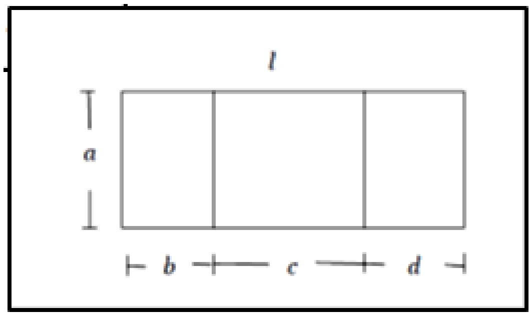
Instrucción del escriba	Traducción al lenguaje actual
1. "He restado el lado del cuadrado a partir del área, y es 14,30."[3]	1. $x^2 - x = 870$
2. "Toma la mitad de 1,que es 0;30 y multiplica 0;30 por 0;30, que es 0;15"	2. $0.5 \times 0.5 = 0.25$
3. "Suma este número a 14,30, lo que da 14,30;15, este es el cuadrado de 29;30"	3. $x^2 - x + 0.25 = 870 + 0.25$ $(x - 0.5)^2 = 870.25$ $\sqrt{(x - 0.5)^2} = \sqrt{870.25}$ $x - 0.5 = 29.5$
4. "Ahora suma 0;30 a 29;30, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado"	4. $x = 0.5 + 29.5$ $x = 30$

Se puede observar que las culturas más evolucionadas de la antigüedad como los babilonios y los griegos, realizaron deducciones empíricas de la solución de problemas, pero expresándose invariantemente en un lenguaje ordinario, pasaron varios siglos para que la necesidad de la evidente simplificación que ofrece la utilidad de los símbolos algebraicos se hiciera sentir.

Los griegos en el año 300 a.C., desarrollaron métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas:

> Usaban las figuras geométricas para representar magnitudes, es decir "los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas, el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números, el producto de tres segmentos es un volumen, la suma de dos números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro, la resta es recortar un segmento la longitud del segundo, la división se indica por la razón entre los segmentos que lo representan".(Kline, como se cita en Ballén, 2012:10).

Euclides uno de los más grandes representantes de las matemáticas Griegas, en su libro "*Los Elementos"* ilustra una representación geométrica de la siguiente proposición: "Si hay dos rectas *a* y *l*, y una de ellas: *l*, se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos”. (Como se cita en Ballén, 2012:10)



La proposición se refiere a la expresión algebraica: a (b+ c+ d)=ab +ac +ad

En el ejemplo se puede observar que se utilizan letras para nombrar puntos y segmentos, pero en ningún caso como resultados de generalizaciones, esta etapa es considerada pre algebraica; “faltan indicios de generalización y operatividad con los signos utilizados que impiden que sean considerados como verdaderos símbolos algebraicos”. (Esquinas, 2008:84).

En el siglo III, Diofanto (250 d.C.) publica su obra “*Aritmética”,* con una simbología rudimentaria, en la cual hizo un estudio riguroso sobre ecuaciones de primer y segundo grado. “Introdujo por primera vez en la historia de las matemáticas letras griegas como abreviaturas para indicar la incógnita de una ecuación y sus potencias”. (Malisani, 1999:5).

$x \rightarrow \varsigma$	llamada	*"il número del problema"*
$x^2 \rightarrow \Delta^Y$		*"cuadrado" o "potencia"*
$x^3 \rightarrow K^Y$		*"cubo"*
$x^4 \rightarrow \Delta^Y\Delta$		*"cuadrado-cuadrado"*
$x^5 \rightarrow \Delta K^Y$		*"cuadrado-cubo"*
$x^6 \rightarrow K^Y K$		*"cubo-cubo"*
$1/x \rightarrow \varsigma^{\chi}$		

(Cfr. Kline., pág. 162-163).

El simbolismo de Diofanto, siglo III.

"Este autor indicaba la adición escribiendo los términos uno a continuación de otro, la resta con el símbolo ⋔ y la igualdad con ισ, no utilizaba algún signo para representar la multiplicación, la división y los coeficientes genéricos. Desarrollaba los cálculos usando lenguaje natural y escribía las soluciones en un texto continuo." (Malisani, 1999:5).

De esta manera, se hace evidente en la fase retórica el uso del lenguaje común o las palabras para expresar operaciones matemáticas; la solución de problemas era una particularización de los mismos, solo con el simbolismo tímido que introduce Diofanto se puede decir que se da comienzo al álgebra; sin embargo, en esta etapa el uso de las representaciones geométricas para algunos ejercicios particulares, muestra la importancia que tienen las representaciones de tipo gráfico para la comprensión de problemas , y hace reflexionar sobre su utilidad en la enseñanza del álgebra escolar en la actualidad, pues en la enseñanza de esta se privilegia el uso de las representaciones simbólicas, sin tener en cuenta las posibilidades que ofrecen los demás tipos de representaciones; en el caso particular de los estudiantes sordos, este tipo de representación gráfica como "antesala" de la simbólica, puede ofrecer niveles más altos de comprensión de los conceptos.

Segunda etapa: el álgebra sincopada.

Esta etapa inicia con el simbolismo de Diofanto año 250, y va aproximadamente hasta el siglo XVI con François Viète. Se puede considerar como un tránsito entre la fase retórica y la simbólica donde se empiezan a utilizar símbolos para la simplificación en la solución de algunos problemas; se introducen algunas abreviaturas para ciertos conceptos y poco a poco se van involucrando procesos de generalización. "En este periodo se comienzan a desarrollar los métodos algebraicos, alcanzando una mayor generalización pero descuidando la expresión simbólica, que es estrictamente retórica en los procesos de resolución". (Esquinas, 2008:84). Durante esta etapa algunas culturas, como la árabe, tuvieron gran influencia; más adelante durante el siglo XVI con el renacimiento, el movimiento cultural que significó el paso de la edad media a la edad moderna, y que introdujo un nuevo espíritu de ciencia, se consolidó en el surgimiento y progreso del álgebra; a continuación se presentan los aportes más significativos de la cultura árabe y de los matemáticos renacentistas:

Influencia del mundo árabe.

La influencia de los musulmanes en el álgebra, se extendió desde el año 700 hasta el 1200 d.C.; aunque está en discusión sus aportes en el uso del simbolismo algebraico; para Malisani (1999:6) la cultura árabe, no se caracterizó precisamente por utilizar símbolos: "[…] empleaban ciertos nombres particulares para representar la incógnita y sus potencias, pero en general ellos desarrollaban un álgebra íntegramente retórica y esto representa un paso atrás con respecto al algebra diofantina e Hindú".

Algunos matemáticos árabes importantes como Al-Khuarizmi, hicieron sus aportes sobre métodos para solucionar ecuaciones:

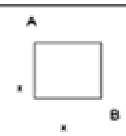
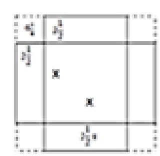
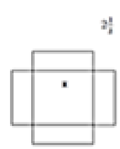
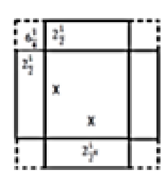
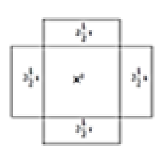
> En el siglo IX, el matemático árabe al-Khuarizmi sistematizó la teoría de ecuaciones en su libro Hisab al-jabrw" al-mugabala (Cálculo por restauración y reducción, Joseph, 1996) haciendo referencia a los métodos utilizados en la resolución de ecuaciones algebraicas. La técnica de cálculo por restauración y reducción, (hoy en día diríamos transposición y simplificación de términos), se impuso para el tratamiento de los problemas algebraico. (Esquinas, 2008:85).

Por su parte, Ballén (2012:17), da a conocer un ejemplo para encontrar la solución de una ecuación, propuesto por Al-Khuarizmi y su traducción al lenguaje actual:

Solución dada por Al-Khwarizmi	*Traducción al lenguaje actual*
1. *Un cuadrado y diez raíces de la misma cantidad suman treinta y nueve dirhemm[10]; ¿qué debe ser el cuadrado que, incrementado en diez de sus propias raíces suma treinta y nueve?*	1. $x^2 + 10x = 39$
2. *tomar una mitad de las raíces mencionadas. Por tanto tomamos 5, que multiplicado por sí mismo da 25, una cantidad a la que sumamos 39, dando 64.*	2. $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ $x^2 + 10x + 25 = 64$ $(x + 5)^2 = 64$
3. *Habiendo tomado después la raíz cuadrada de éste, que es 8, le restamos la mitad de las raíces, 5, quedando 3.*	3. $\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{64}$ $x + 5 = 8$ $x = 8 - 5$
4. *El número tres por tanto representa una raíz de este cuadrado.*	4. $x = 3$

Solución de una ecuación del tipo 4, por Al-Khuarizmi.
Tomado de Ballén (2012).

Además, el antiguo matemático realiza una solución del mismo utilizando representaciones geométricas:

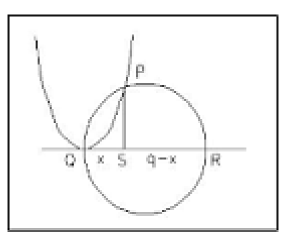
1. Se construye un cuadrado AB cuyo lado es la raíz buscada x	1. 	4. Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados de las equinas, cada uno de los cuales tiene un área de $6\frac{1}{4}$ unidades o sea 25.	4. 
2. *Sobre cada uno de los cuatro lados se construyen rectángulos cada uno de los cuales tiene $\frac{1}{4}$ de 10 o $2\frac{1}{2}$ unidades de ancho.*	2. 	5. El cuadrado mayor tiene un área de 39 + 25 =64, por lo tanto, el lado del cuadrado mayor es igual a 8 unidades.	5. 
3. *El cuadrado conjuntamente con los cuatro rectángulos es igual 39*	3.  $x^2 + 10x = 39$	6. El lado del cuadrado menor es $2\frac{1}{2} + x + 2\frac{1}{2} = 8$, resultando que $x = 3$	6. $x = 3$

Dentro de los más grandes aportes de los árabes está la resolución de ecuaciones de tercer grado mediante la intersección de curvas cónicas, el matemático árabe Al-Khayyam en el siglo XI resolvió las ecuaciones cúbicas con métodos geométricos de intersección de cónicas en donde se evidenció un avance en el uso de simbolización.

Con Al-Khayyam (1038-48-1123) el álgebra se transformó en la *teoría general de las ecuaciones algebraicas* con *coeficientes positivos y de grado menor o igual que tres. Este autor resolvió las ecuaciones de segundo grado* con raíces positivas utilizando el procedimiento geométrico de Euclides. Obtuvo, además, la solución general de las *ecuaciones de tercer grado* (con raíces positivas y no reducibles a ecuaciones de segundo grado) mediante la intersección de curvas cónicas. Así por ejemplo para resolver la ecuación:

$$x^3 + ax = \ b \ con \ a \ y \ b \ positivos$$

$$escribió \ la \ forma \ homogénea\text{:} \ x^3 + p^2x = p^2q; \ con \ p^2 = a \ y \ p^2q = b.$$

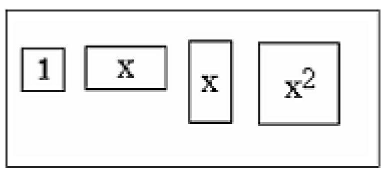


Tomado de: Malizani (1999:11)

Otro personaje importante en la cultura árabe fue Tabit ben Qurra el-Harani (siglo X, d.C.), quien introdujo el concepto de homogeneización, concepto que permite tratar los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y la altura. El aporte de este personaje árabe, es fundamental para convertir los polinomios en objetos tangibles siempre que sus coeficientes sean números racionales:

> Al intentar solucionar problemas que ahora se representarían de la forma $x^2 + mx = n$, Tabit Ben Qurra evidencia que no sepuede igualar área con longitud, ni áreas con números (objetos a-dimensionales) e introduce una unidad de medida (e) que le permite escribir la ecuación anterior como $x^2 + m(e)x = n(e)^2$, el mecanismo de introducir (e) se conoce como proceso de homogeneización y ha permitido elaborar una representación geométrica que se usa para factorizar, multiplicar, dividir, sumar y restar expresiones cuadráticas de manera tangible. (Grupo GESCAS)[10].

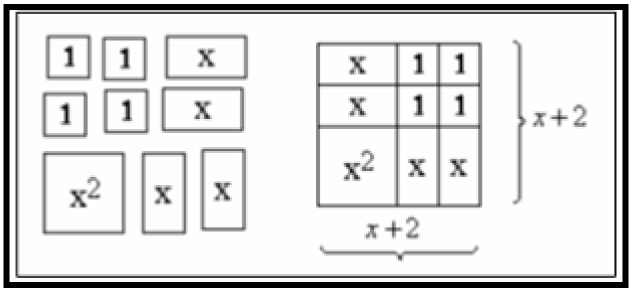
Basados en la propuesta de Tabit, estas fichas en la actualidad son utilizadas para la enseñanza del álgebra en la herramienta denominada “la caja de polinomios”.



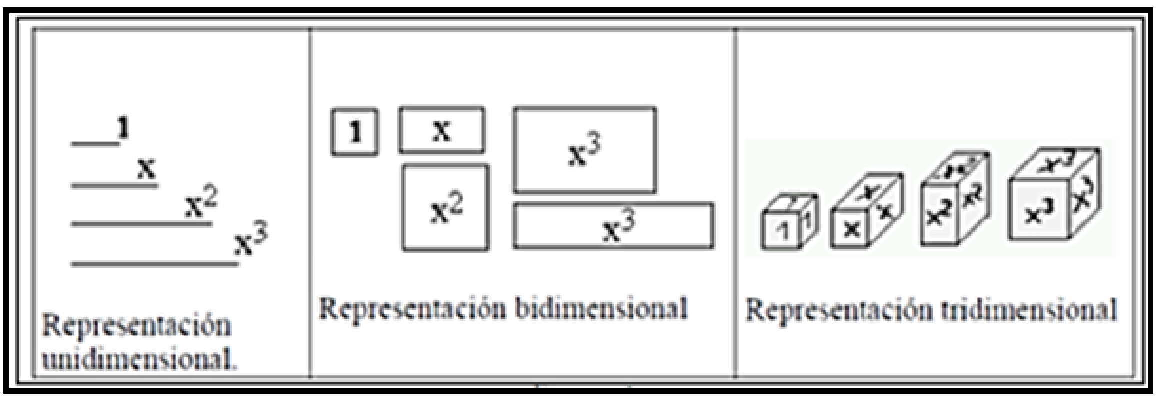
En la figura, la interpretación geométrica de TabitQurra, en donde ?² es representada como un cuadrado de lado ?, la variable ? como un rectángulo de lados ??1 y el 1 es un cuadrado de lado 1.

En la actualidad, esta herramienta didáctica en la enseñanza del álgebra representa un elemento muy útil, por ejemplo, en la factorización de $(x + 2)(x + 2)$, se puede representar el área del cuadrado mediante las fichas y encontrar las áreas que lo conforman $(x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$. Este tipo de representación puede facilitar el aprendizaje del concepto del producto, ya que no necesita de la memorización de la “fórmula” para encontrar su respuesta, desafortunadamente este método aún no es aplicado en las aulas.

[10]Grupo GESCAS de la Universidad de Pasto, Nariño; proyecto “la caja de polinomios”



Representación geométrica del producto $(x+2)(x+2)$
como el área de un cuadrado.



"El proceso de homogeneización hace posible representar cualquier potencia de X en los mundos unidimensional, bidimensional o tridimensional"(Grupo GESCAS.)

Aportes del renacimiento (siglo XIV al XVI).

Esta época en la historia en las matemáticas es importante porque a raíz del cambio que se evidencia en este periodo de renovación científica, se retoman las grandes obras clásicas de la antigüedad y con ellas los aportes de los griegos, árabes e hindúes. La invención de la imprenta facilitó la reproducción de grandes obras; los matemáticos de la época se muestran interesados por los métodos para la solución de ecuaciones utilizados por sus antecesores. El auge por la ciencia permitió los aportes de muchos matemáticos, entre ellos:

Fibonacci (1180-1250).

En su obra *Liberabaci* (1202), proporciona una fórmula para la resolución de ecuaciones cúbicas en función de sus coeficientes; obra que no fue editada hasta el siglo XIX.

Chuquet (1484).

Elabora un manuscrito: *Triparty en la science des nombres*, que trata de operaciones aritméticas sobre números; las cuatro operaciones fundamentales son expresadas con palabras y frases: *plus, moins, par, partyr par;* uno de sus mayores aportes fue la *Regle des premiers*, es decir de la incógnita. "Durante los siglos XV y XVI se utilizaron varios nombres para la incógnita: *res* en latín, *chose* en francés, *cosa* en italiano, *coss* en alemán. Chuquet utilizó *premier*, y a la segunda potencia la llamó *cubiez* y a la cuarta *champs de champs.* Para múltiplos de esta utilizó una notación exponencial".

Chuquet introdujo la *denominación* o potencia de la incógnita indicada por un exponente asociado con el coeficiente del término, por ejemplo:

$5x, 6x^2, 10x^3$, aparece como:. $5.^1$,. $6.^2$,. $10.^3$

Luca Pacioli (1445-1524).

Escribe el primer libro de álgebra impreso: *Summa de Arithmética, geométrica, proportioni etproportionalita* (1494) es una compilación de material en cuatro campos: aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y contabilidad, en él se evidencia el uso de algunos símbolos para las operaciones de suma y resta y algunas abreviaturas para las incógnitas y sus potencias.

A partir de 1545, con la publicación de *Ars Magna dovulga,* de Jerónimo Cardanose hizo común la solución de la ecuación cúbica, resuelta por Scipione Del Ferro (1465-1526), y Niccolo Fontana Tartaglia (1500-1557); así mismo la solución de la ecuación cuártica, descubierta por Ludovico Ferrari (1522-1565).

"Se considera que la solución de las ecuaciones cúbica y cuártica son la mayor contribución al álgebra desde los babilónicos. No ha habido otros descubrimientos que hayan estimulado el desarrollo del álgebra como lo hizo el *Ars Magna dovulga";* al respecto Esquinas (2008:85) opina que "El libro muestra poca sincopación y la solución de las ecuaciones se presentan todavía en forma retórica".

Francois Viète (1540-1603).

Fue quien introdujo un sistema único de símbolos algebraicos organizados que facilitó la expresión de ecuaciones y sus propiedades mediante fórmulas generales. "Fue el primero en utilizar una vocal para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado (distinción entre parámetro e incógnita), su notación algebraica fue denominada *logística speciosa* en contraposición a la logística numerosa de sus predecesores". (Ballén, 2012:20). Esta evolución en el lenguaje a una forma más simbólica posibilitó más adelante el desarrollo de la geometría analítica y el cálculo.

Finalizando el siglo XVI ya se podían evidenciar ideas de variabilidad y generalización, a pesar de que el simbolismo utilizado en los trabajos realizados era aún muy limitado, se va imponiendo el pensamiento algebraico sobre el aritmético. "Los símbolos algebraicos dan un salto cualitativo importante al pasar de jugar el papel representativo de las abreviaturas o signos literales, utilizados hasta entonces, a ser un simbolismo cargado de sentido, con el que se pueden realizar operaciones". (Mahoney en 1980, como se cita en Esquinas, 2008:86).

La etapa del álgebra sincopada es considerada por Esquinas (2008) como el comienzo histórico del lenguaje algebraico, puesto que hasta entonces los símbolos solo cumplían una función sustitutiva de números u objetos geométricos, pero carecían de toda articulación semántica y sintáctica propia del lenguaje; y además hace énfasis en que es en esta etapa donde se produce una primera ruptura en la evolución algebraica, al realizarse el tránsito de la aritmética al álgebra.

Transcurrieron muchos siglos, desde las matemáticas de las culturas antiguas (Mesopotamia1700 a.C.), hasta las matemáticas del siglo XVI, para que el uso del lenguaje algebraico empezara a tomar sentido y se hiciera más evidente la transición de la aritmética al álgebra, pero teniendo en cuenta las limitaciones con que se da este paso,[11]se considera una primera ruptura epistemológica, hecho que supone repensar la enseñanza actual del álgebra: los procesos de transición de un lenguaje natural a una representación simbólica y en general el uso de diferentes formas de representación para los conceptos deben constituir un paso obligado en el trabajo con expresiones algebraicas.

Tercera etapa: El álgebra simbólica.

Esta etapa comprende desde Viète (1540-1603), hasta nuestros días; los aportes de este matemático en simbolización algebraica, permitieron más adelante que Descartes (1596-1650), y Newton (1643-1727), aplicaran procesos de álgebra a la geometría y viceversa. “Después de Viète, tanto Descartes como Newton dieron soluciones algebraicas a problemas geométricos y soluciones geométricas a problemas algebraicos, y los matemáticos estaban empezando a usar las nuevas entidades simbólicas y a operar con ellas como si fueran cantidades reales”. (Rogers en 2001, como se cita en Esquinas, 2008:87).

[11]donde se pasó del “álgebra primitiva” de los griegos a todo el dinamismo que ofrecen los símbolos en el álgebra moderna.

Descartes en su obra 'La geometría' (1637), emplea la letra X como incógnita: "En ese tratado de geometría se concreta el modo actual del lenguaje algebraico, con el uso de las primeras letras del alfabeto -a, b, c.- para parámetros y constantes y las últimas letras -x, y, z.- para incógnitas y variables. (Gonzáles y Diez en 2002; como se cita en Esquinas, 2008:87).

Se considera que el álgebra moderna surge a partir del siglo XVIII, alejándose de los casos particulares y acercándose más al estudio de las estructuras de sistemas matemáticos abstractos, donde el lenguaje natural como medio de comunicación para la resolución de problemas es reemplazado por métodos más formales y abstractos en donde se emplea un lenguaje algebraico y simbólico.

El representante más significativo del álgebra moderna fue Galois (1811-1832), quien determinó las condiciones necesarias para solucionar un polinomio por radicales y es famoso por su teoría de grupos, crea el concepto de grupo que será fundamental para el desarrollo de la teoría de ecuaciones algebraicas. Para Esquinas (2008:88) "Galois convierte, así, el estudio del álgebra en una teoría de estructuras, que no solo no fue comprendida por sus contemporáneos sino que, tuvo que pasar más de un siglo para que sus ideas alcanzasen el merecido reconocimiento".

Actualmente, el álgebra puede ser entendida como el desarrollo de habilidades para manipular letras y símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas[12]; ahora se pueden considerar múltiples los significados del álgebra, para Usiskin en 1988 son los siguientes:

- Como aritmética generalizada, que formaliza distintos patrones numéricos y propiedades en los que los números se sustituyen por variables.
- Como método para la resolución de ciertos tipos de problemas matemáticos en los que se desconocen algunos valores llamados incógnitas.

[12] VXII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística UTPC, septiembre de 2009.

- Como estudio de las relaciones entre magnitudes, que implica la variación conjunta y el concepto de función.
- Como el estudio de estructuras matemáticas, por ejemplo, grupos, polinomios, etc. (Esquinas, 2008:80).

En el caso que ocupa, para la comprensión de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, es necesario un nivel de desarrollo en el pensamiento algebraico, ya que no se trata de que el estudiante repita procedimientos vacíos de significado, sino que alcance la comprensión lógica de los conceptos.

Para Font *et al.* (2003:9) “El desarrollo del pensamiento algebraico, requiere de representar, generalizar y formalizar patrones en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones”, y a su vez el uso de símbolos proporciona elementos para la evolución del pensamiento algebraico; Arzarello *et al*. afirman que: “El uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, por este motivo en la historia del álgebra tiene importancia no solo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos.” (Malisani, 1999:4)

Por lo anterior, la introducción del razonamiento algebraico representa un nuevo obstáculo epistemológico en la historia del álgebra que viene a desequilibrar los conceptos que hasta el momento estaban ‘estables’ por conceptos y estructuras nuevas con significados mucho más profundos como: variable, incógnita, generalización, entre otros. "De este modo se considera una segunda ruptura en el desarrollo histórico del álgebra a partir del siglo XIX, durante el cual se produjo el paso del álgebra como método al algebra como objeto." (Esquinas, 2008:88).

Como se pudo observar en la historia; en la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra han enmarcado una variedad de obstáculos, algunos de ellos tienen que ver con la transición de la aritmética al álgebra (paso que se ve afectado por el afán de cumplir los currículos, sin detenerse en la formación de conceptos pre-algebraicos básicos), debido a que la enseñanza de esta última se ha caracterizado por una secuencia de variables y símbolos, muchas veces carentes de significado, causando poca comprensión y desmotivación en los estudiantes. En el caso de los estudiantes sordos la situación de hace más grave, la asimilación de los nuevos conceptos propios del álgebra no es significativa, los símbolos que representan los conceptos algebraicos deben pasar primero a su lengua de señas para que sean apropiados por ellos, pero son simplemente algunas señas más que se introducen a su léxico; para que estas nuevas señas tomen significado como conceptos, se hace necesario pensar en construir alternativas didácticas teniendo en cuenta las perspectivas que ofrece el análisis histórico- epistemológico.

Teoría de polinomios.

En el recorrido histórico se evidencia que: "En las culturas Egipcia, Mesopomámica y Griega, la génesis de la noción de polinomio estaba vinculada con problemas prácticos de áreas geométricas, cálculos astronómicos, problemas prácticos problemas de proporcionalidad y la solución de las primeras ecuaciones lineales y cuadráticas". (Escobar y Valdivé, 2011:1). En la actualidad el manejo de operaciones básicas con polinomios constituye la base para el trabajo del álgebra y para formalizar los procesos del cálculo.

Al respecto de la teoría de polinomios se presentarán algunos referentes teóricos [13], estos se han incluido para que sirvan de apoyo en la institucionalización de los conceptos y se tomarán de éstos referentes los elementos que resulten pertinentes para la propuesta didáctica.

En la presente investigación se debe aclarar que el concepto de polinomio al que se pretende dar lugar, parte del uso de generalizaciones en contextos geométricos, por lo que

[13] Tomados de Lothar , Saleem y Stewart (2007).

el sistema numérico manejado en esta etapa inicial tiene su dominio en los números naturales, fijando una restricción inicial a los demás conjuntos, ya que en estos contextos se representan las variables a partir de área de rectángulos. Para Rojas (2010) citando a pretexto (1997) hace referencia a que si el estudiante trae como referencia el sistema aritmético la mayor posibilidad de contextualizar conceptualmente el uso de la letra es como una generalización de número.

En la etapa de operatoria de los polinomios (adición, sustracción y multiplicación), se conceptualizan solo polinomios de segundo y tercer grado, ya que estos representan construcciones posibles con la herramienta "Caja de polinomios", en esta etapa se puede ampliar el campo numérico a de los números enteros. Las propiedades que estructuran estos dominios de la variable y que intervienen en la conceptualización de las operaciones con polinomios son las siguientes: clausurativa, conmutativa (caso de la adición y multiplicación), asociativa, distributiva del producto con respecto a la suma, y modulativa.

Concepto de polinomio.

La forma general de un polinomio de grado n (donde n es un entero no negativo) en la variable x es:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_{0,} a_{1\,,}$ ... a_n son constantes y $a_n \neq 0$.
En el caso de que los coeficientes pertenezcan al conjunto de los números reales se dice que $p(x)$ es un polinomio real entero, y en el caso de que pertenezca al conjunto de los números racionales se dice que es un polinomio racional entero (este último tipo de polinomios son los que tienen que ver con este trabajo).

El grado de un polinomio: Es la potencia más alta de la variable. Cualquier polinomio es una suma de **términos** de la forma ax^k, llamados **monomios,** donde a es una constante y k un entero no negativo. Un **binomio** es la suma de dos monomios, un **trinomio** es la suma de tres monomios, y así sucesivamente.
Por ejemplo: $2x^2 - 3x + 4, ax + b, x^4 + 2x^3$ son polinomios de grado 2,1 y 4 respectivamente; el primero es un trinomio, y los otros dos son binomios.

Sumamos y restamos polinomios utilizando las propiedades de los números reales. La idea es combinar los **Términos semejantes** (estos son los términos con la misma variable elevada a la misma potencia) utilizando la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$5x^7 + 3x^7 = (5+3)x^7 = 8x^7$$

En la resta de polinomios, debemos tener en cuenta que si el signo menos antecede un signo de agrupación, al eliminar el signo de agrupación aplicando la propiedad distributiva, los términos de adentro cambian de signo:

$$-(b+c) = -b-c$$

(Este es simplemente un caso de propiedad la distributiva,$a(b+c) = ab + ac,\ con\ a = -1$).
Ejemplo de suma y resta de polinomios:

Calcule la suma de: $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (3x^3 + 5x^2 - 4x)$

$$(x^3 + 3x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 4x) + 4 \qquad Agrupe\ términos\ semejantes$$

$$4x^3 - x^2 - 2x + 4 \qquad combine\ términos\ semejantes$$

Calcule la resta de: $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (3x^3 + 5x^2 - 4x)$

$$x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x \qquad propiedad\ distributiva$$

$$(x^3 - 3x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 4x) + 4 \qquad Agrupe\ términos\ semejantes$$

$$-2x^3 - 11x^2 + 6x + 4 \qquad combine\ términos\ semejantes$$

Para obtener el **producto de** polinomios o de otras expresiones algebraicas, necesitamos utilizar varias veces la propiedad distributiva. En particular si se utiliza tres veces en el producto de dos binomios, obtendremos:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Si multiplicamos los dos factores, al multiplicar cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos de otro factor, y sumamos estos productos. Esquemáticamente tenemos:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Multiplicación de binomios.

$$\boldsymbol{a)\ (2x+1)(3x-5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 \qquad propiedad\ distributiva}$$

$$\boldsymbol{= 6x^2 - 7x - 5 \qquad combine\ términos\ semejantes}$$

$$\boldsymbol{b)\ 3(x-1)(4x+3) = 3(4x^2 + 3x - 4x - 3) \qquad propiedad\ distributiva}$$

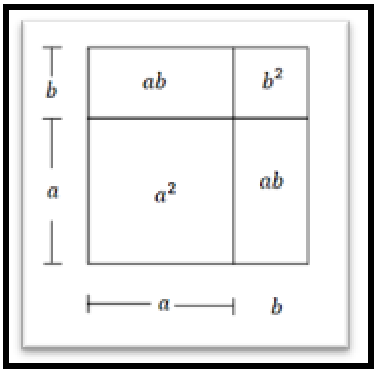
$$\boldsymbol{= 3(4x^2 - x - 3) \qquad combine\ términos\ semejantes}$$

$$\boldsymbol{= 12x^2 - 3x - 9 \qquad propiedad\ distributiva.}$$

En general, podemos realizar productos de cualesquier dos polinomios utilizando la propiedad distributiva y la combinación de términos semejantes.

Así, se puede observar el papel que juega la propiedad distributiva en las operaciones de suma, resta y producto; esta propiedad tiene sus raíces en la primera proposición del libro de Euclides. (Ballén, 2012:10). En los modelos geométricos usados por los griegos se obtienen además otras formas de productos, como por ejemplo la representación de la proposición:

"Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos":



En esta representación geométrica la relación de igualdad surge al comparar el área de la figura con la suma de cada una de las áreas que la conforman, al traducir esta expresión al lenguaje actual, corresponde a la expresión:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se debe aclarar que en las representaciones geométricas propuestas por los griegos no es posible representar expresiones tales como$2x^3 + x^2 + x + 4$, ya que se estarían sumando cantidades que representan volúmenes, áreas y longitudes; lo anterior limita el trabajo con álgebra geométrica para estas expresiones.

Hasta esta parte del trabajo se ha realizado una aproximación a la evolución histórica-epistemológica del álgebra y conjuntamente a los conceptos de adición, sustracción y producto de polinomios, observando los aportes de grandes civilizaciones como la cultura Mesopotámica, Griega, Árabe, la Edad Media, hasta su consolidación en el siglo XVIII; al respecto, Escobar *et al.* (2011) muestran el análisis histórico-epistemólogico del concepto de polinomio discriminado en dos etapas: antes y después de Cristo; en él contemplan algunas variables como situaciones en las que se aplicaban los polinomios, métodos utilizados, definiciones importantes, argumentos buscados y formas de representación.

Es por ello que todo el aporte que brinda el recorrido histórico-epistemológico, es de suma importancia para el diseño de la Ingeniería Didáctica, porque ofrece al investigador un reconocimiento sobre los elementos que constituyen el objeto matemáticos de la investigación, y además permite predecir algunos obstáculos epistemológicos que se pueden presentar, y reflexionar sobre la importancia de las diferentes formas de representación (verbal, geométrica y simbólica) en la construcción de los conceptos algebraicos y la necesidad de implementar procesos didácticos que faciliten la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes con limitación auditiva a la hora de aprenderlos.

Los apuntes anteriores sobre el origen y evolución del álgebra brindan algunas pautas para analizar los diferentes pasos que dieron lugar a la consolidación del lenguaje algebraico.[14] Para Malisani (1999: 19) el álgebra simbólica no suplantó de golpe al álgebra sincopada.

> El desarrollo del lenguaje algebraico ha sido muy lento y dificultoso: se pasa de ciertos nombres para designar a la incógnita y algunas relaciones, a las abreviaturas de estas palabras, a los códigos intermedios entre el lenguaje retórico y el sincopado y por último, a los símbolos. Es decir, estas abreviaturas y estos códigos se van depurando gradualmente hasta que se llega a elaborar un simbolismo algebraico correcto sintácticamente y más eficiente operativamente, en este proceso se observa el abandono progresivo del lenguaje natural como medio de expresión de las nociones algebraicas.

Desde este punto de vista en las tres fases de la evolución histórica del álgebra se refleja la influencia de las formas de representación en la construcción del pensamiento algebraico: en la fase retórica se hace uso exclusivo del lenguaje natural; en la fase sincopada aunque los cálculos se realizan en lenguaje natural, se empiezan a introducir algunas abreviaturas y

[14] Cabe recalcar que dichos cambios tuvieron lugar mediante un proceso de transición muy lento.

símbolos, y en la fase simbólica se hace uso de las letras y signos para representar objetos y reglas generales; aunque el uso de lenguajes y formas de representación se hace más evidente en la fase sincopada, donde se da la transición entre el pensamiento aritmético y geométrico; para Malisani (1999: 19) "En la fase sincopada es necesario apoyarse en otros lenguajes: natural, aritmético o geométrico, semánticamente más ricos, para formular las reglas, para interpretar y resolver los problemas. Con la elaboración de un lenguaje algebraico adecuado, los otros lenguajes se abandonan progresivamente".

A modo de conclusión, la consolidación del lenguaje simbólico del álgebra se puede discriminar en los siguientes aspectos:

- Uso del lenguaje natural para solucionar situaciones cotidianas.
- Uso del lenguaje geométrico como soporte para la solución de algunos problemas de tipo retórico o numérico.
- Intervención de las diferentes formas de representación: lengua natural, formas de representación geométricas y simbólicas.
- En la transición de la aritmética al álgebra se va generando un cambio de sistemas semióticos de representación.
- Los procesos de generalización tienen su inicio en la fase sincopada tras la necesidad de introducir nuevos objetos más complejos y de responder a la imposibilidad de resolver problemas con métodos conocidos.

Análisis de la dimensión didáctica.

En este aspecto del análisis preliminar se pretende encontrar las implicaciones didácticas que tienen que ver con la enseñanza tradicional de los conceptos algebraicos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios. En el planteamiento del problema de la presente investigación se hace evidente que los estudiantes sordos son tratados didácticamente de la misma forma que sus pares oyentes; además los estándares para el área de matemáticas y los lineamientos curriculares del MEN (1998) están dirigidos en términos generales a todos los estudiantes, es decir, no se establecen directrices para el desarrollo de conceptos y competencias del pensamiento matemático para los estudiantes sordos, fijando los mismos objetivos a alcanzar, por esta razón se partirá de un análisis de las competencias y estándares requeridos por el MEN (2006); posteriormente, se hará un análisis de los libros de texto más utilizados en los últimos años para la enseñanza de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

El currículo y la enseñanza del álgebra.

En los Estándares básicos de competencias del MEN (2006), se encuentra que las competencias a desarrollar en la enseñanza del álgebra deben abordarse desde el reconocimiento, la percepción, la identificación, la caracterización de la variación y el cambio de los conceptos en los diferentes contextos donde la descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos juegan un papel importante.

> En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero estas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas fórmulas que permiten reproducirlo. MEN (2006).

Desde esta perspectiva, la forma apropiada de lograr aprendizajes significativos de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico se debe llevar a cabo mediante actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos, de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números, a partir de la visualización, la exploración y la manipulación de números y figuras.

Por tal motivo, se describen a continuación los estándares que tiene que ver con los conceptos que se abordarán en el presente trabajo:

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Además, para el diseño de la secuencia se tendrán en cuenta algunos elementos para la didáctica del álgebra planteados por Socas (1989), a los que hace referencia Esquinas (2008:159):

1. Un determinado grado de automatización de las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo del siguiente.
2. No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado rápido.
3. No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro.
4. Asegurar que los aspectos diferentes de una idea, técnica o símbolo algebraico estén claramente distinguidos.
5. No introducir notación formal, antes de que una idea o técnica algebraica haya sido asimilada por los alumnos.
6. Evitar la complejidad notacional innecesaria.
7. Favorecer la comprensión algebraica en términos de lenguaje.
8. No introducir técnicas formales demasiado pronto.

Por su parte, Esquinas (2008), hace énfasis en la importancia de fomentar las traducciones entre distintos modos de representación -icónico, activo y simbólico- como herramienta para facilitar la reconstrucción de conocimientos matemáticos por parte del alumno, sin prisas que dificulten su proceso de simbolización.

Por último, otros medios recomendados para la enseñanza del álgebra son las herramientas computarizadas; existen al respecto variadas investigaciones que buscan evidenciar sus potencialidades en el aprendizaje, ya que ofrecen múltiples posibilidades para las diversas formas de representación, y además constituyen un elemento didáctico motivador para los estudiantes.

Con el objetivo de dar una mirada a algunos aspectos generales sobre la forma como son abordados los conceptos de adición, sustracción y multiplicaciòn de polinomios, se diseñó y aplicó una encuesta a 16 docentes del área de matemáticas de la institución Educativa CASD de Armenia,[15] donde se indagó a cerca de la importancia que se les da a los conceptos previos antes de introducir a los estudiantes en el trabajo con polinomios, el uso que se hace de las diversas formas de representación para la enseñanza de las operaciones entre estos, si se tienen en cuenta los errores frecuentes que cometen los estudiantes en el estudio de estas operaciones de álgebra, la forma de abordar las temáticas cuando de trata de estudiantes sordos, entre otros; obteniendo como resultado las siguentes observaciones:

- Pocos docentes reconocen cómo mínimo tres formas de representación de los objetos matemáticos.
- Las formas de representación más usadas son: la simbólica (siendo esta la primera que se trabaja) y la gráfica.
- Aunque en algunos casos se usan diferentes formas de representanción para los conceptos, no se da el tiempo necesario para que los estudiantes realicen los procesos de transición entre las diferentes formas de representación. Muchos docentes desconocen la forma de enseñar las relaciones entre las formas de representación de los conceptos de álgebra.

[15] Algunos de ellos han trabajado en aulas donde hay inclusión con estudiantes sordos.

- El manejo didáctico que se realiza cuando el aula tiene estudiantes sordos es el mísmo, solo que mediado por el intérprete de LSC.
- En el proceso de transposición didàctica influye en un alto porcentaje el papel del intérprete de LSC, ya que este es quien finalmente es el transmisor de la información al estudiante.
- Algunos temas como los productos notables, todavía se enuncian de forma verbal.
- Las aplicaciones que más se realizan son con respecto a áreas y perímetros.
- Hay conocimiento empírico de los errores frecuentes que cometen los estudiantes al iniciar su proceso con el ágebra.
- Los docentes no involucran al LSC en sus secuencias didácticas.

.

De acuerdo a lo anterior, se hace necesario hacer una reflexión de carácter pedagógico, ya que a fin de cuentas estos aspectos están marcando la realidad que se vive en las aulas. En el caso que nos ocupa, es de notar que los docentes indagan por los conceptos previos antes de iniciar el trabajo con polinomios, sin embargo, el tratamiento que se le da a esta parte tiene lugar en muy poco tiempo, lo que obliga a que se inicie el trabajo con los objetos de álgebra sin que los estudiantes tengan solvencia suficiente en las operaciones básicas con números enteros (de allí que algunos de los errores más frecuentes que los docentes comentan que cometen los estudiantes en álgebra son los asociados a estas operaciones básicas); por otro lado, el uso de las formas de representación (simbólica, verbal, gráfica) está enmarcado por aquellas que proponen los libros de texto; de igual forma los talleres y las actividades. Hace falta que el docente se atreva a diseñar sus propias situaciones didácticas donde se involucren estas formas de representación y que estén adecuadas a las necesidades de sus estudiantes, y más aún si se trata de un aula con inclusión. Para DAmore, Fandiño y Lori (2013: 164) en la construcción cognitiva de un nuevo objeto matemático este se debe examinar desde diversos puntos de vista: matemático, epistemológico, histórico y semiótico.

Repecto al trabajo de aula con estudiantes sordos, los procesos de inclusión deben responder a un tratamiento didáctico que se centre en las individualidades y potencialidades de los estudiantes, es de aclarar que no ha bastado la mediación lingüística que realiza el intérprete de LSC, ya que este puente comunicativo se puede ver afectado por algunas variables (falta de comprensión del intéprete, falta de proficiencia, apatía hacia el área, etc); por eso el maestro en su intervención didáctica debe incluir alternativas donde se privilegien otras formas de repesentación que puedan aportar a la construcción de los objetos matemátcios y complementar el papel del intérprete. Lo anterior, además de ayudar a la comprensión de los estudiantes sordos también puede ser de ayuda para sus pares oyentes.

El objetivo de la enseñanza es promover el aprendizaje, sin embargo, a veces la enseñanza se produce sin que de ella resulte un aprendizaje, por ello es conveniente considerar si pueden mejorarse los procesos y es allí donde el papel del maestro resulta preponderante; debe buscar mecanismos didácticos que le permitan convertirse de forma eficaz en el mediador de este aprendizaje.

Dar una mirada hacia el trabajo didáctico previo que se realiza en las aulas en la iniciación con expresiones algebraicas; pues una de las mayores dificultades que dicen los docentes encontrar en los estudiantes durante este proceso es el uso y significado que hacen de las letras y los símbolos, pues este aspecto es el que le da al álgebra la naturaleza de abstracta, reconociendo que de forma frecuente se hace una entrada a los conceptos algebraicos con demasiada rapidez, sin tener en cuenta las dificultades asociadas a un óptimo aprendizaje de los mismos, dedicando poco tiempo y recursos a este proceso de asimilación. Para introducir el trabajo hacia las expresiones algebraicas primero se hace un repaso sobre conjuntos numéricos y sus operaciones: naturales, enteros, racionales e irracionales; luego aparecen las letras junto con las definiciones de las expresiones algebraicas y con sentido operativo; en esta forma de introducir el trabajo inicial hacia el álgebra se podría deducir que se construye a partir de considerar el uso de las letras en las siguientes categorías: letra no utilizada o letra como objeto, donde se puede correr el riesgo de que estas se construyan con ausencia de significado.

Otro aspecto que puede generar confusiones en los estudiantes, tiene que ver con que los significados que provienen de la aritmética están muy arraigados y se tiende a realizar falsas generalizaciones. Para el grupo Azarquiel (1993: 15), “la mayoría de los símbolos que se utilizan el álgebra se han utilizado antes en la aritmética. Por eso para los alumnos ya tenían un significado que, con frecuencia, puede entrar en conflicto con el que se les atribuye ahora”.

Lineamientos de atención para los estudiantes con limitación auditiva.

En el decreto 366 de 2009 del MEN (Art. 5 y 6), se establecen algunas condiciones pedagógicas que se deben brindar para la atención a la población sorda, determinando que al nivel de primaria estos deben tener docentes en condiciones de biligüismo (LSC y lengua castellana), así como también modelos linguísticos y culturales (sordo adulto con dominio de la lengua materna que haya terminado como mínimo básica secundaria); para secundaria y media, docentes de área, docente de castellano (como segunda lengua), intérpretes de LSC (persona oyente idónea en dicha lengua, su papel es transfomar la información que da el profesor en lengua castellana a señas, para que los estudiantes sordos puedan acceder a esta), apoyos técnicos, visuales y didácticos pertinentes; es importante que estos elementos se conjugen en bienestar del estudiantado sordo, pues, la simple existencia de las normas, no garantiza su funcionamiento; es allí donde la actitud del docente juega un papel preponderante, pues, en últimas, es él quien debe planear con los recursos existentes (pocos o muchos) secuencias de enseñanza que propicien desempeños significativos en dicha población.

El papel de los textos escolares.

En la forma de planear y desarrollar las clases los maestros reflejan sus ideas y sus concepciones acerca de cómo aprender y enseñar matemáticas, ideas que han ido construyendo de acuerdo a su formación y a sus propias experiencias. En la enseñanza tradicional de las matemáticas escolares, especialmente del álgebra, se ha privilegiado la adopción de algunos textos del mercado, los que se han convertido en una guía de trabajo para muchos docentes.

La revisión de los textos escolares utilizados en los últimos años para la enseñanza del álgebra, es pertinente porque refleja la forma como son abordados los conceptos y otros aspectos de la didáctica, como por ejemplo, cuáles son los sistemas de representación más utilizados; para Fernández y Mejía (2010:1): "Los textos escolares hacen parte de los procesos de estudio, lo que en ellos se presenta puede ser fundamental en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Esto debido a que en algunos casos la organización de los contenidos, la presentación de las actividades y las sugerencias pedagógicas se convierten para muchos profesores en una guía de planeación". Los textos que se tuvieron en cuenta para el análisis:

- Ardila, V. (2003). *Inteligencia lógico matemática 8*. Bogotá: Ed. Voluntad.
- Barnet, R. y Kearns, T. (1993). *Matemáticas octavo grado.* Bogotá: Ed. McGraw-Hill.
- Díaz, F. *et al.* (2002). *Pensamiento matemático 9.Bogotá:* Ed. Libros y libros
- Padilla, L. (1999). *Aventura matemática 8.* Bogotá: Ed. Norma.
- Dimaté, M. (2000).*Matemáticas 8.* Bogotá: Ed. Prentice Hall.
- Rincón, M. (2010). *Hipertexto 8.*Bogotá: Ed. Santillana.
- Baldor, A. (1983). *Algebra de Baldor.* España: Ed. Mediterráneo.

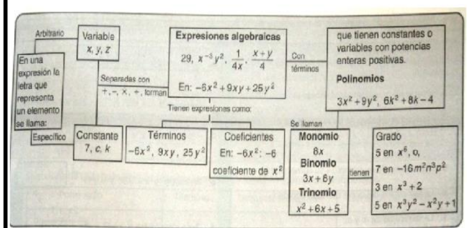
En estos textos se analizó la forma de abordar los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, para ello se tomó como referencia el modelo para análisis de textos en el tema de polinomios elaborado por Escobar *et al.* (2011:17)[16], y se hicieron algunas adaptaciones.

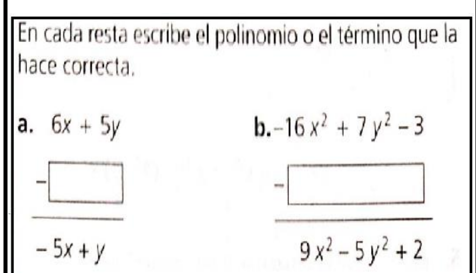
[16]Escobar y Valdive (2011) , incluyen en su análisis categorías como: presentación del tema, tipos de situaciones que se presentan, definiciones y argumentos dados, tipos de representación y notas históricas.

Texto	***Álgebra de Baldor* (1983)**	***Aventura Matemática 8* (1999)**
Nombre y composición de la unidad.	Los temas de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, están desarrollados en los 4 primeros capítulos del texto; en el capítulo preliminar se presentan las definiciones de los conceptos pre-requisitos, entre ellos: (concepto de álgebra y su diferencia con la aritmética, fórmula, signos de relación y de agrupación, coeficientes, cantidades positivas y negativas, grado, valor absoluto, clasificación de las expresiones algebraicas, términos semejantes y valor numérico); en el capítulo uno se presenta el concepto de adición de polinomios; en el capítulo dos el concepto de sustracción; en el capítulo tres el de signos de agrupación y en el cuatro la multiplicación de polinomios.	El nombre de la unidad en que presentan los conceptos es: **Expresiones algebraicas y polinomios;** Las temáticas son trabajadas en 4 apartes que se denominan de la siguiente manera: 1. Expresiones algebraicas, donde se especifican: (variable, constante, términos, coeficientes, clasificación de las expresiones algebraicas, grado); 2. Adición de polinomios; 3. Sustracción de polinomios; 4.Multiplicación y división de polinomios.
Presentación de los conceptos	Los conceptos son presentados mediante títulos, luego se hace explicación de forma verbal de cada	Los conceptos iniciales (unidad 1), se presentan mediante un mapa conceptual, donde se muestran los

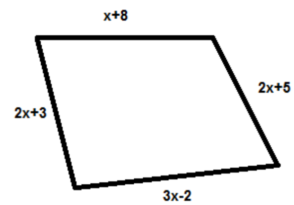
<table>
<tr>
<td>(entidades matemáticas, procedimientos, algoritmos)</td>
<td>operación, se presentan las propiedades y se dan los ejemplos respectivos.
Por ejemplo en el capítulo IV, se explica que: “la multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto, que sea respecto del multiplicando, en valor absoluto y en signo, lo que el multiplicador es respecto de la unidad relativa”.

Posteriormente, son presentadas las propiedades conmutativa, asociativa, ley de los signos, ley de los exponentes, ley de los coeficientes, casos que se presentan para la multiplicación: (entre monomios, polinomios por monomios y dos polinomios); en cada caso anterior se muestran ejemplos y el respectivo taller.

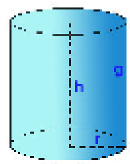
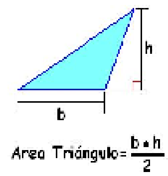
Ejemplo de ejercicio propuesto de adición:
Suma: $3a + 2b - c, 2a + 3b + c$.</td>
<td>conceptos pre-requisitos y sus relaciones: (variable, expresión algebraica, constante, términos, coeficiente, monomio, trinomio, polinomio, binomio, grado).


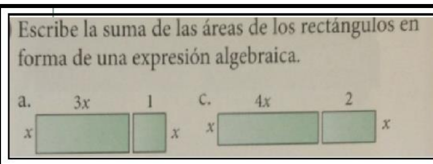
Los demás conceptos como (adición, sustracción y multiplicación de polinomios), son presentados en un mínimo resumen muy general al comienzo de la unidad y se proponen ejercicios para completar tablas y realizar las operaciones.
Ejemplo de sustracción de polinomios:

En cada resta escribe el polinomio o el término que la hace correcta.
a. $6x + 5y$
$- \boxed{}$
$-5x + y$
b. $-16x^2 + 7y^2 - 3$
$- \boxed{}$
$9x^2 - 5y^2 + 2$</td>
</tr>
</table>

	Ejemplo de ejercicio propuesto de sustracción: $de\ 7x^3y^4\ restar -8x^3y^4$. Ejemplo de ejercicio propuesto de combinación de suma y resta: $hallar\ la\ expresión\ que\ sumada\ c$ $-x^2+5, da\ 3x-6.$ Ejemplo de ejercicio propuesto de multiplicación: $multiplicar\ 4x-3y\ por-2y+5x.$	
Notas históricas	En cada capítulo se hace referencia a algún hecho histórico del álgebra.	No presenta notas históricas
Situaciones de aplicación	En el capítulo preliminar, se realizan algunas aplicaciones sobre notación algebraica, utilizando variables. Ejemplo: $Recibo\ \$x\ y\ después\ \$a. si\ gasto\ \$m, ¿cuánto\ me\ queda?$ En los capítulos de las operaciones no se usa ninguna aplicación.	Aplicación de expresiones algebraicas en áreas y perímetros de figuras geométricas y se presentan ejemplos como : *"Escribe la expresión que representa el perímetro de cada figura"*:

		
Formas de representación usadas	Verbal, simbólica.	Verbal, geométrica, simbólica.
Principios para la enseñanza del álgebra que se tienen en cuenta socas (1989).	• Un determinado grado de automatización de las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo del siguiente. • Asegurar que los aspectos diferentes de una idea, técnica o símbolo algebraico estén claramente distinguidos.	• No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro. • Asegurar que los aspectos diferentes de una idea, técnica o símbolo algebraico estén claramente distinguidos.
Aplicación a las TICS	No se evidencia lo relacionado a este aspecto.	No se evidencia lo relacionado a este aspecto.

Texto	*Inteligencia Lógico Matemática 8*(2003)	*Hipertexto 8* (2010)
Nombre y composición de la unidad.	El nombre de la unidad es **Álgebra de los polinomios**, presenta una relación de los estándares que se trabajarán según el MEN, y sus respectivos indicadores de logro; se inicia la unidad con una lectura donde se contextualiza el tema de polinomios con un caso real (aplicación en algoritmos en la internet); posteriormente, se da inicio a la unidad con una aplicación a la solución de problemas. Los temas desarrollados son: expresiones algebraicas, polinomios, adición de polinomios, sustracción de polinomios; finalmente, multiplicación de polinomios.	Las temáticas son trabajadas en 2 unidades (unidad dos y tres), la número dos se denomina: **Expresiones algebraicas** y contiene las temáticas de: Lenguaje algebraico, monomios, polinomios; la unidad número tres se denomina: **Operaciones entre expresiones algebraicas** y contiene los temas de suma y resta de polinomios, multiplicación de polinomios y división de polinomios. Se da inicio a cada unidad con un aparte histórico y algunos ejercicios para analizar. Posteriormente, son presentados los conceptos con ejercicios y actividades; al finalizar, se presenta una síntesis de los conceptos utilizados y una situación de aplicación.
Presentación de los conceptos	Los conceptos son presentados de forma práctica, mostrando gran importancia la representación gráfica de las expresiones	En la unidad de Expresiones algebraicas, se da inicio con una explicación de lo que significa “el lenguaje algebraico”, se definen los

	algebraicas de áreas y volúmenes:  Se definen los conceptos de variable y constante, valor numérico y se plantean ejercicios donde se realiza conversiones entre el lenguaje verbal y el simbólico de las expresiones algebraicas. Se define el concepto de polinomio así: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *donde n es un entero no negativo y* $a_{0,} a_{1\,,} \ldots\ a_n$ *son números reales.* Además se definen conceptos pre-requisitos como: grado, orden y clases de polinomios. Las demás temáticas adición, sustracción y multiplicación se presentan con una explicación de la operación, utilizando representaciones geométricas y talleres de aplicación. Ejemplo de multiplicación de polinomios:	conceptos de monomio y sus características, se presentan algunos ejemplos como el siguiente: *Calcular el volumen de una esfera con radio=5 cm.* También presenta el concepto de polinomio como: *“Un polinomio es una expresión algebraica formada por sumas o restas entre monomios. Los monomios que conforman un polinomio se denominan términos del polinomio”,* además presenta las características y generalidades de los polinomios como orden, términos semejantes, opuesto, grado; algunos ejercicios de cada tema y al final un taller de aplicación. Ejemplos de ejercicios propuestos: • *Ordena los siguientes polinomios en forma ascendente con respecto a la variable indicada. Luego determina el término independiente en cada polinomio:* x- $4x^3 + 7x^2 + 10x^4 - 6$ • *Construye un enunciado para cada expresión dada:* $3a + 2;\ (a-b)^2;\ a^2 + b^2$



Se continúa con el siguiente ejemplo:

Multipliquemos:

$$-2x(5x^2 + 2x - 3)$$

Solución 1

Aplicando la propiedad distributiva y la ley de los exponentes $a^n x a^m = a^{n+m}$:

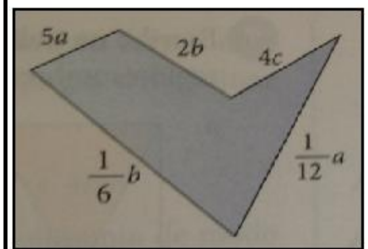
-$2x(5x^2 + 2x - 3)$=-$2x(5x^2) - 2x(2x) - 2x(-3) = -10x^3 - 4x^2 + 6x$.

Solución 2

Multiplicando verticalmente:

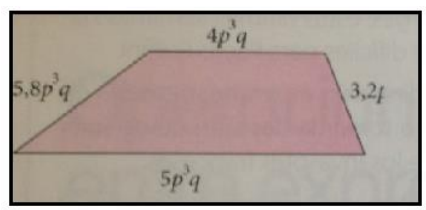
$$
\begin{array}{r}
5x^2 + 2x - 3 \\
x \quad - 2 \\
\hline
-10x^3 - 4x^2 + 6x.
\end{array}
$$

- *Determine el perímetro del siguiente polígono:*

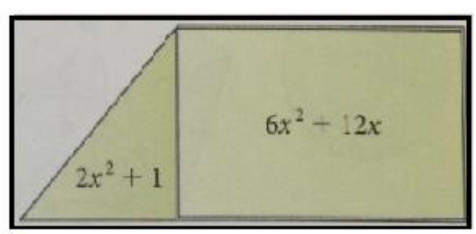


La segunda unidad que contiene las operaciones inicia con los conceptos de suma y resta de polinomios, empezando por los monomios (define monomios semejantes), presenta ejemplos con aplicaciones en áreas y perímetros:

"Calcular el perímetro de la figura":



Se continúa con los conceptos de resta, signos de agrupación para suma y resta combinadas, y multiplicación de polinomios (empezando por los monomios); se hace un resumen de pre-requisitos

		para el tema: las propiedades de los exponentes. También se incluyen ejercicios de cada tema, que se combinan con aplicaciones en situaciones de tipo geométrico.
Notas históricas	No presenta notas históricas, sin embargo, en la parte final presenta direcciones de internet para consultar notas históricas.	Al iniciar cada unidad se realiza un aparte histórico donde se recrea alguna situación en forma de historia corta, involucrando hechos históricos.
Situaciones de aplicación	Se muestran aplicaciones a problemas cotidianos y a problemas de tipo geométrico en áreas y volúmenes. *Ejemplo:* *En un terreno rectangular de un parque se van a instalar juegos infantiles, cada uno ocupará el área triangular con las figuras mostradas. El área de cada juego ya incluye espacio para que los niños caminen alrededor de ellos.* *¿Cuál es el área del parque?* *Describe una forma de determinar cuántos juegos del tamaño descrito caben en el parque y qué parte del área de él sobra después de haber instalado los juegos.*	Las aplicaciones corresponden a problemas cotidianos de tipo geométrico: • *Pedro compró un terreno con área como se muestra en la figura, para sembrar frutas. Si el terreno tiene un área rocosa de* $x^2 - 5x + 1$ *que no puede ser sembrada, halla el polinomio que representa el área que se puede sembrar.* 

Formas de representación usadas	Expresiones lingüísticas, simbólicas, geométricas.	Expresiones lingüísticas, simbólicas, geométricas.
Principios para la enseñanza del álgebra tenidos en cuenta Socas (1989).	• No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado rápido. • No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro.	• Un determinado grado de automatización de las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo del siguiente. • No introducir técnicas formales demasiado pronto
Aplicación a las TICS	Aunque no presenta aplicaciones, en la parte final del texto muestra una página de ciber consulta.	No se evidencia este aspecto.

Texto	*Matemáticas octavo grado* (1993)	*Matemáticas 8* (2000)
Nombre y composición de la unidad.	Este texto presenta las temáticas en tres unidades. Las operaciones y conceptos sobre expresiones algebraicas se van desarrollando de acuerdo al conjunto numérico que se trabaje en la unidad. En cada unidad, se inicia con el reconocimiento del conjunto numérico (Naturales, Enteros, Racionales), de acuerdo al grado de complejidad de cada conjunto numérico, se introducen los conceptos propios del álgebra, así: **Números Naturales**: Expresiones algebraicas, su formulación y evaluación; igualdad y desigualdad; propiedades de la adición y multiplicación, ley de exponentes, propiedad distributiva, términos semejantes. **Números Enteros:** Simplificación de expresiones algebraicas con números enteros, problemas verbales y aplicaciones.	La unidad que contiene los temas referidos se denomina NÚMEROS REALES, en ella se contemplan 24 apartes. Inicia con una página denominada *conexión con la historia*, luego en los apartes del 1 al 13, se trabajan los conceptos pre-requisitos necesarios desde el campo numérico de los números Reales (operaciones básicas, orden, recta real). En los siguientes apartes de la unidad se presentan los conceptos: 14. Expresiones algebraicas 15. Adición de polinomios 16. sustracción de polinomios 17. Multiplicación de expresiones algebraicas I. 18. Multiplicación de expresiones algebraicas II. La unidad desarrolla otros temas como: división de polinomios, productos y cocientes notables y división sintética.

	Números Racionales: Suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas con números racionales, problemas numéricos y geométricos. Al finalizar cada unidad propone ejercicios de repaso del capítulo, incluyendo todos los temas vistos en cada unidad, donde se combinan otros conceptos como: ecuaciones, razones y proporciones.	Al finalizar, propone actividades de nivelación, aplicaciones a situaciones problema, gimnasia matemática, tecnología aplicada, resumen, mapa conceptual y actividades de profundización, y además una sección que denomina: "conexión con el ICFES".
Presentación de los conceptos (entidades matemáticas, procedimientos, algoritmos)	Inicialmente el texto presenta un acercamiento al concepto de expresión algebraica, su formulación y validación, en donde define conceptos como: Variables y constantes, expresión algebraica, orden, traducción del lenguaje algebraico al simbólico, igualdad y desigualdad, propiedades. En la unidad uno, se trabaja combinación de términos semejantes y evaluación de expresiones por medio de diagramas.	El primer concepto presentado es expresión algebraica, por medio de ejemplos con expresiones verbales y simbólicas; posteriormente, presenta otros conceptos como: término, parte numérica, parte literal, clasificación de los polinomios, grado, términos semejantes; después presenta un taller de aplicación de los conceptos: Ejemplo: *Representa los enunciados en forma de expresión algebraica:*

	En la unidad dos, se realizan simplificaciones de expresiones algebraicas, que involucran adición, sustracción y multiplicación, el conjunto de los enteros, y se realizan ejercicios utilizando diagramas. El lenguaje algebraico es introducido desde los conjuntos numéricos, mezclado con las operaciones y las aplicaciones en fórmulas y ecuaciones.	*"Un número incrementado en 8"* *"La diferencia de un número y 3"* Los conceptos de adición y sustracción se inician con ejemplos de las operaciones y ejercicios: *"Adicionemos los polinomios:"* $5xy^3 - 8 + 3xy^2 \; y \; 4xy^3 + 3y$ El desarrollo de estas operaciones es de forma vertical: *"De la suma de* $2xy^3 - 2y^3$ $Con \quad -7xy^3 - 2y^3, \quad resta \quad xy^3 + 3xy^3$ De igual manera, se presenta el concepto de multiplicación desde un ejemplo de operación: *"Multipliquemos"* $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y \; por \; \frac{1}{4}x^3 + 2y^2$. La operación es realizada de forma vertical. Los ejercicios hasta aquí propuestos solo se refieren a operaciones con representaciones simbólicas.

Notas históricas	No presenta notas históricas.	Al empezar la unidad hace referencia a hechos históricos.
Situaciones de aplicación	Se presentan aplicaciones en situaciones geométricas con ecuaciones: Ejemplo: *"Encontrar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 52 cm, si su largo es 5 cm más que el doble de su ancho".*	Muestra aplicaciones de tipo geométrico en situaciones problema, como encontrar el área de una figura.
Formas de representación usadas	Expresiones lingüísticas, simbólicas y geométricas, esquemas.	Expresiones lingüísticas, simbólicas y geométricas.
Principios para la enseñanza del álgebra tenidos en cuenta Socas (1989).	• Favorecer la comprensión algebraica en términos de lenguaje.	• No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro. • Favorecer la comprensión algebraica en términos de lenguaje.
Aplicación a las TICS	No se evidencia este aspecto.	Se hace una aplicación al programa DERIVE.

Aspectos generales de la revisión de textos.

Nombre y composición de las unidades	Se puede observar que en general la composición de las unidades se presenta de forma secuencial, empezando con el campo de los números reales, continuando con la presentación de las expresiones algebraicas y sus generalidades; finalmente, se presentan las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.
Presentación de los conceptos (entidades matemáticas, procedimientos, algoritmos)	Los conceptos son presentados por medio de enunciados verbales o ejemplos y en pocos casos utilizan representaciones geométricas para encontrar áreas y perímetros; los ejercicios propuestos evidencian pocas aplicaciones a situaciones cotidianas y en general corresponden a procesos de mecanización de operaciones algebraicas.
Notas históricas	Algunos textos realizan de manera muy general una conexión con hechos históricos relacionados con los conceptos tratados en cada unidad.
Situaciones de aplicación	Las situaciones de aplicación que se presentan en los textos relacionadas con las operaciones con polinomios corresponden en su mayoría a procesos para encontrar áreas y perímetros de figuras geométricas y a problemas presentados de manera textual y descontextualizada.

Formas de representación usadas	Las formas de representación más usadas son las expresiones simbólicas, lingüísticas y geométricas, pero no se evidencian ejercicios, ni ejemplos donde exista una correspondencia y relación entre ellas.
Principios para la enseñanza del álgebra tenidos en cuenta Socas (1989).	Al revisar los textos se reflejan de manera aislada los principios y recomendaciones para la enseñanza del álgebra que hacen algunos autores. Las ideas, técnicas algebraicas y formas de notación formal son presentadas de forma breve, y si estas se explican así a los estudiantes pueden generar la poca asimilación de los conceptos. En la mayoría de los textos no se favorece la comprensión algebraica en términos de lenguaje, lo cual es importante en la construcción de los conceptos algebraicos.
Aplicación a las TICS	Se observa en general que pocos textos proponen herramientas tecnológicas.

En la mayoría de los textos se puede observar el desarrollo metodológico de los objetos matemáticos de forma tradicional, donde se presentan los temas desde su expresión lingüística, ejemplos, ejercicios y situaciones problema.

Lo anterior es de gran relevancia, ya que si los maestros preparan sus clases a partir de estos textos y las desarrollan siguiendo esta metodología, se puede llegar a la simple transmisión de información de manera algorítmica y mecánica; la cual los estudiantes tratan de interiorizar y repetir al pie de la letra en los talleres y evaluaciones; sin embargo, para lograr la construcción de verdaderos conocimientos matemáticos con comprensión y aplicabilidad, se requiere de procesos didácticos que busquen más que la enseñanza, el aprendizaje de los conceptos por parte de los estudiantes, esto se puede lograr a través de situaciones didácticas que ofrezcan la posibilidad de que el docente trabaje de manera secuencial el desarrollo del concepto, de tal forma que los estudiantes busquen, generen y modifiquen estrategias de solución para construir con sentido y profundidad un conocimiento.

Así mismo, la compleja realidad de la enseñanza de las matemáticas exige del maestro el dominio de concepciones, estrategias y herramientas que deben ir más allá de la mera experiencia e intuición, por esta razón es importante que se tengan en cuenta los resultados de las investigaciones en didáctica de las matemáticas, ya que estas ofrecen alternativas para identificar procesos de aprendizaje, técnicas específicas de enseñanza, la forma como se construyen los conceptos, los obstáculos ligados a la enseñanza y al aprendizaje, entre otros.

Además del análisis de textos se puede concluir que una forma usual de iniciar el álgebra en la mayoría de casos tiene que ver con los aspectos que se enuncian a continuación:

- Se realiza un acercamiento de forma verbal a los conceptos, es decir se empieza por enunciar, definir y describir los objetos matemáticos emergentes en la construcción de los conceptos; cabe resaltar que en el caso de los estudiantes sordos, si se sigue el proceso de estos textos, este “acercamiento” inicial al álgebra podría convertirse en un “alejamiento” si el docente no realiza un trabajo didáctico en el que adapte dicho proceso.

- En la mayoría de los textos analizados la introducción al álgebra no da significado alguno a los objetos matemáticos, generalmente se inicia con ejercicios cuyo objetivo parece consistir en manipulaciones rutinarias de expresiones con letras. Al respecto Azarquiel (1993) dice que esta forma automatizada de empezar el estudio del álgebra es causa de que se vea la letra como un objeto, pero no es la única, también le atribuyen el hecho a la utilidad que se les dan a estas en la aritmética, donde aparecen como una etiqueta que acompaña al número.

- Algunos textos realizan su introducción al álgebra dando sentido al lenguaje algebraico por medio de su relación con formas de representación simbólica, esta manera de dar entrada a las expresiones algebraicas puede servir para ver la utilidad del álgebra en situaciones significativas para los estudiantes, ya que posibilita empezar a ver las letras como variables y como incógnitas; además podría facilitar el proceso de traducción de lenguaje natural a simbólico, teniendo en cuenta una de las recomendaciones hechas por Socas (1989) en cuanto a la importancia de favorecer la comprensión algebraica en términos de lenguaje; sin embargo, para los estudiantes sordos se hace necesario incluir su lengua natural en estas traducciones.

- El uso de representaciones geométricas para iniciar el trabajo con el álgebra se refleja de forma implícita en algunos textos, sin embargo se dejan ver como procesos muy rápidos que necesitan de un trabajo didáctico donde el docente organice secuencialmente las actividades de acuerdo a lo que quiere que sus estudiantes comprendan, si se trata de dar sentido a los objetos matemáticos.

Finalmente, se muestra en resumen algunos procesos y elementos matemáticos que deben comprender los estudiantes para lograr la construcción cognitiva de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, a la luz del análisis de textos:

CONTENIDOS	PROCESOS MATEMÁTICOS	ACTIVIDAD MATEMÁTICA
Conceptos previos: • Área y perímetro • Variables, constantes • Operaciones y propiedades en números enteros • Valor numérico de una expresión.	Nociones: Reconocimento de los conceptos previos para la consolidación de los objetos matemàticos.	Consolidación de los conceptos previos, haciendo uso de representaciones en lengua materna (LSC) y estableciendo relaciones con las expresiones en lengua escrita.
Notación y clasificación: • Polinomios • Clasificación de polinomios • Orden de los polinomios • Grado de un polinomio • Adición, sustracción, multiplicación. • Minuendo, sustraendo, factor, producto, exponente.	Interpretaciones: Reconocimiento de los objetos algebraicos desde las representaciones gráficas (FRVG), hasta el establecimiento de relaciones con las formas de representación verbales y linguísticas. (castellano escrito y LSC).	Construcción del significado de los conceptos haciendo uso de la manipulación y la visualización de sus representaciones geométricas en contextos de área y perímetro y estableciendo relaciones con las otras formas de representación (FRZ-FRVL).
Relaciones y uso de representaciones: • Proposiciones y propiedades	Identificación : Contextualización del lenguaje algebraico y natural como objeto geométrico en contextos de área y perímetro.	Relación entre las diferentes formas de representación (FRVG-FRS-FRVL) para un mismo concepto. Formulación y validación de proposciones en lengua natural (LSC), para justificar el uso de un determinado

		procedimiento.
Operaciones y procedimientos: • Adición, sustracción y multiplicación de polinomios. • Uso de representaciones • Propiedades	Interpretación y Comprensión del significado de las operaciones, haciendo uso de las formas de representación (FRVG-FRS-FRVL).	Interiorización de los procedimientos para realizar operaciones entre polinomios en coontextos aditivos y multiplicativos.

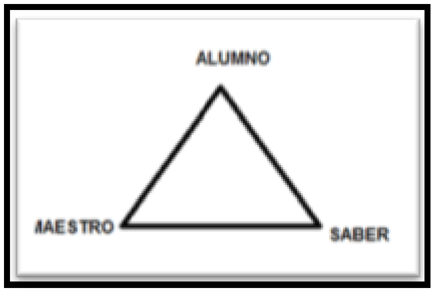
Análisis de la dimensión cognitiva.

Hasta ahora se han realizado los análisis histórico-epistemológico (en relación con el concepto) y didáctico (en relación con la enseñanza), a continuación se realizará el análisis en relación con el estudiante, en esta triada: saber-alumno-profesor se encuentran los actores principales al interior del sistema didáctico:

El alumno, debe aprender aquello que de forma previa ha sido establecido socialmente, según su edad, nivel y tipo de estudios, y que la institución escolar toma como proyecto que va a desarrollar.

El saber, en este caso las matemáticas que deben ser transmitidas como patrimonio a las nuevas generaciones, el objeto de aprendizaje.

El profesor, encargado por la sociedad y la institución de llevar a cabo el proyecto de enseñanza, de hacer funcionar todo el sistema.



Triángulo de la didáctica.
D'Amore, Fandiño y Godino (2008). Competencias y Matemática

Al analizar la dimensión cognitiva es importante indagar sobre ¿cómo aprenden las matemáticas los estudiantes sordos?, ¿cómo estos adquieren los conceptos? y sobre las deficiencias u obstáculos que se pueden presentar al adquirirlos.

En el aula de clase puede verse una marcada diferencia entre los aprendizajes de los estudiantes oyentes y los sordos, para una mejor comprensión de lo anterior, se debe tener en cuenta que los niños en su etapa inicial tanto sordos como oyentes, aprenden a conocer de su contexto a partir de la manipulación de los objetos más cercanos por medio de los sentidos, y poco a poco dicha manipulación ira evolucionando a un “proceso mental”, siendo capaz de pensar y dando lugar al desarrollo de un pensamiento cada vez más abstracto; sin embargo, en el caso del niño sordo esta realidad es mucho más compleja. Para Ávila y García (1996) “El niño deficiente auditivo presenta unos procesos de maduración similares a los del niño oyente en las primeras etapas manipulativas, pero posteriormente su desarrollo se irá lentificando, ya que no puede incorporar todas aquellas informaciones y experiencias que normalmente se reciben por la vía auditiva”.

Del mismo modo, para Ávila et al (1996) en el caso de los sordos, el área lógico matemática al encontrarse profundamente interrelacionada e interactuar con otras áreas del conocimiento, debe verse afectada por la influencia del lenguaje (que a su vez es fundamental en la adquisición de los conceptos). Además señalan que, en el contexto educativo se debe tener en cuenta, que para el niño sordo, las etapas de desarrollo intelectual y los procesos se dan en otros niveles, sin olvidar que su discapacidad, le genera obstáculos a la hora de estructurar, clasificar y sistematizar el mundo que lo rodea, a través de lo que suele ser la vía natural habitual: el lenguaje; al respecto, estos autores enmarcan algunos obstáculos que tienen que ver con:

Dificultad en la comprensión de enunciados.

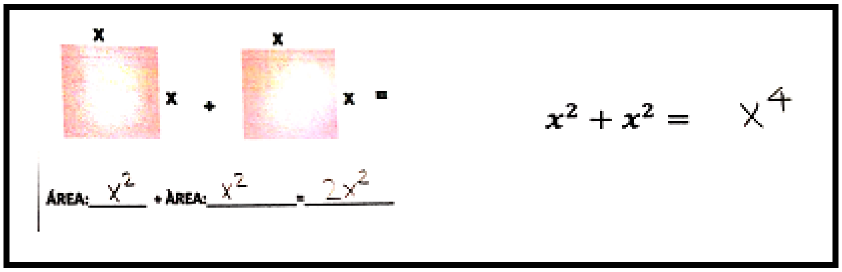
El estudiante sordo presenta muchas dificultades al momento de comprender enunciados verbales o escritos, puede conocer el algoritmo o procedimiento para solucionarlo, pero si no comprende el enunciado no podrá proponer una alternativa de solución; en el caso de operaciones algebraicas puede aplicar el algoritmo para solucionar, por ejemplo una suma, sin embargo, esto no garantiza que comprenda el concepto, y cuando se propone un problema que involucre perímetros con expresiones algebraicas no podrá dar una solución adecuada al problema. Para Ávila *et al.* (1996) al afrontar estas dificultades derivadas del déficit en el lenguaje se hace necesaria una adaptación del niño con los enunciados de las actividades matemáticas, evitar palabras dificultosas, perseguir la sencillez lingüística y sintáctica del texto, clarificar información compleja e incorporar una anotación complementaria que favorezca la comprensión del enunciado. El papel del intérprete de lengua de señas es fundamental en este aspecto, ya que de su interpretación depende gran parte la comprensión de enunciados y problemas de aplicación.

Problemas en los procesos de abstracción matemática.

Según Ávila et al. (1996) “La abstracción es uno de los principales hándicaps[17] con los que se enfrenta un alumno sordo a la hora de aprender matemáticas”, y esto se debe a la propia metodología de la ciencia, donde se parte de axiomas, y se procede a un proceso de creación sustentado en razonamientos lógicos, sin importar si en el mundo real concreto existe un objeto que corresponda a tales enunciados y este alejamiento de la realidad es complejo para el estudiante sordo. En los procesos de abstracción matemática, la vía que utilizan los sordos es diferente a la de los oyentes, ya que el niño sordo debe utilizar más códigos que el oyente, el sordo debe recurrir por ejemplo a aquellos de tipo visual.

[17] RAE: Circunstancia desfavorable, desventaja.

El siguiente es un ejemplo de dos procesos realizados por un estudiante sordo de una misma operación, en diferentes formas de expresión simbólica y gráfica:



Como se puede observar, el estudiante asimila mejor la operación cuando se trata de una representación geométrica.

Precisamente para Ávila *et al.* (1996) el niño sordo tiene especiales problemas cuando en los razonamientos matemáticos debe utilizar conceptos previos abstractos, que al parecer ya estaban asimilados, pero surgen como necesarios para construir un concepto nuevo; además hacen énfasis en que la persona sorda no solo presenta dificultades en la abstracción en sí misma, sino en otros procesos que resultan necesarios como la axiomatización, los procesos demostrativos, la formalización, entre otros. Además, recomiendan que cualquier conocimiento abstracto que se intente enseñar a un sordo debe estar relacionado, en un primer momento, con otros conocimientos previos de naturaleza concreta.

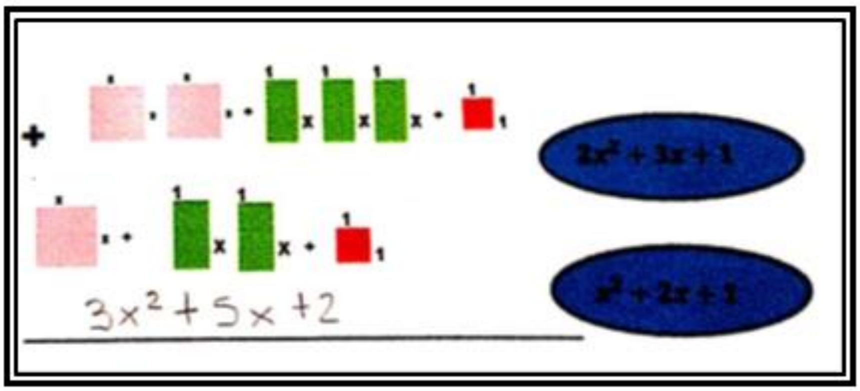
Igualmente, es importante tener en cuenta que las nociones nuevas representan una dificultad para el estudiante, si además para su comprensión debe utilizar conceptos abstractos que todavía no ha asimilado, así por ejemplo, para poder realizar el producto entre dos polinomios, si no hay claridad en la propiedad distributiva, el estudiante difícilmente logrará realizar la operación.

El siguiente ejercicio fue realizado por un estudiante sordo en actividad previa del análisis preliminar, como se puede observar fue mucho más significativo un acercamiento al concepto previo desde las representaciones gráficas.

Ejercicio realizado de forma simbólica:

$$(2x^2 + 3X + 1) + (x^2 + X + 1) = 6x^3 + 1x^3 = 7x^6$$

Ejercicio realizado con el apoyo de la representación gráfica:



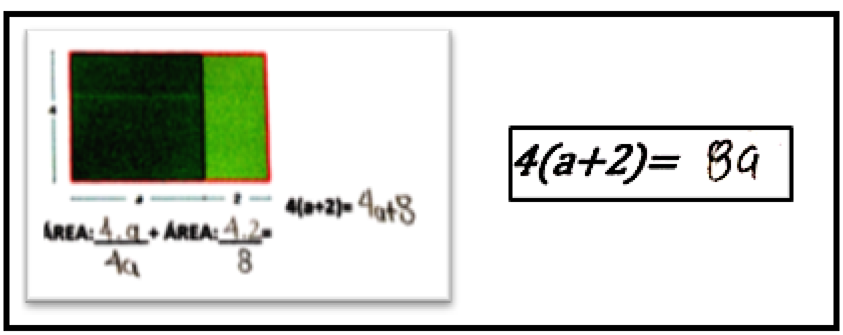
De acuerdo al análisis anterior, es importante evaluar la importancia de incluir en la secuencia didáctica, situaciones en las que se usen materiales manipulativos que permitan la construcción de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios; de igual manera tener en cuenta el papel que juegan las representaciones lingüísticas en la construcción de los conceptos y en el caso de los estudiantes sordos trabajar las señas que representan tanto los conceptos previos como los nuevos, y finalmente, incluir en las situaciones didácticas actividades en las que se utilicen algunas formas de representar visualmente los conceptos, de tal manera que favorezcan la comprensión de los mismos utilizando, por ejemplo, esquemas o mapas mentales.

Al respecto Márquez (2011), expresa que en el trabajo pedagógico dirigido a estudiantes sordos, es importante potenciar las formas visuales de presentar y esquematizar el conocimiento, las cuales pueden ir desde estructuras simples como esquemas, dibujos y diagramas, hasta estructuras más complejas como mapas conceptuales y las representaciones simbólicas y lenguajes propios de cada disciplina.

Por otro lado, se observa que la mayoría de los estudiantes sordos tienen una marcada diferencia en edad y desarrollo en comparación con sus pares oyentes, es importante resaltar que ambos tipos de estudiantes presentan las mismas capacidades para el aprendizaje, pero los estudiantes sordos han iniciado su etapa escolar de forma tardía lo que lentifica la adquisición de un código lingüístico que le permita interactuar con su entorno y progresivamente consolidar estructuras y formas de simbolización, razón por la cual algunos de sus conceptos previos no están estables y se muestran carentes de significado, ya que muchos conceptos primitivos de pensamiento matemático están asociados a las experiencias del sujeto con el medio.

> En este contexto de experiencias e interacciones que ocurren en el sujeto desde el nacimiento hasta la vida adulta, el desarrollo del lenguaje se manifiesta, se hace visible de forma concreta como capacidad de simbolización del mundo propia de la especie humana, en buena parte y de manera fundamental por la adquisición y el dominio de un código lingüístico compartido con un grupo social y cultural determinado que llamamos lengua. (Márquez, 2011:17).

A la izquierda se muestra un ejercicio realizado por un estudiante donde muestra falta de estabilidad en la propiedad distributiva, a la derecha se puede observar que la ayuda del componente visual facilita la operación:



Aquí se evidencia una vez más que las representaciones gráficas podrían ofrecer posibilidades de comprensión y construcción del significado de los conceptos en estos estudiantes; para el grupo Azarquiel[18], son evidentes las ventajas de este tipo de ejercicio de representación gráfica frente a los de tipo simbólico en los que los símbolos no tienen contexto, no representan nada, y las operaciones se realizan según reglas arbitrarias, sin un modelo físico o intuitivo que les dé sentido.

Además, Márquez (2011) propone un manejo de tipo constructivista para el aprendizaje de los conceptos matemáticos en sordos, orientado desde el diseño e implementación de situaciones didácticas de formulación, acción, validación e institucionalización, ya que desde una visión constructivista, el aprendizaje matemático se construye y obtiene significado, gracias a la interacción del sujeto con su entorno físico, social y cultural. "Particularmente, generar ambientes en donde los estudiantes sordos desarrollen procesos de construcción de conocimiento matemático significa ofrecer situaciones problema que, teniendo en cuenta las características socioculturales y comunicativas del mismo niño y de su contexto generen retos y desarrollos cognitivos y promuevan simultáneamente el desarrollo del lenguaje y las producciones lingüísticas que permitan hablar de ellos". (Márquez, 2011:45). Para este autor, el constructivismo es pertinente para los procesos de enseñanza y aprendizaje en sordos, puesto que promueve la generación y el uso de diversos tipos de representaciones para comprender y comunicar el conocimiento y prioriza el hecho de que la construcción de los conocimientos esté en la base de situaciones y experiencias que tengan sentido y significado para los estudiantes.

De otra parte, las situaciones de acción, formulación y validación que se diseñaron para esta secuencia didáctica, contienen elementos que permitan al estudiante sordo ser el actor principal en la construcción de los conceptos, en este caso la adición, sustracción y

[18]El grupo Azarquiel reflexiona sobre los problemas que plantea la didáctica del álgebra en su libro: Ideas y actividades para enseñar álgebra (1993).

multiplicación de polinomios, de tal forma que se propicie un aprendizaje por descubrimiento como lo plantea la teoría constructivista, el estudiante se verá enfrentado a situaciones donde deberá proponer diversas estrategias, ideas matemáticas, justificaciones y procedimientos, entre otros, para solucionarlas exitosamente. En palabras de Brousseau (1995):

> Se trata siempre de saber a qué juego debe jugar el estudiante para que las estrategias más eficaces impliquen el uso del saber que se les quiere enseñar. Se le debería también poder explicar el juego y, para que entienda, se necesita, en general, que él pueda inmediatamente poner en acto una estrategia de "base" que, aunque no hace vencer, permite jugar y esperar vencer. (D'Amore, 2006:243).

De acuerdo al planteamiento anterior, se espera entonces que el conocimiento y el significado de los conceptos se construya por medio de las situaciones didácticas, en las cuales se propicien episodios de desequilibrio cognitivo, de acuerdo a Brousseau (1986) el estudiante aprende adaptándose a un ambiente que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, las nuevas respuestas que son fruto de la adaptación del estudiante son la prueba del aprendizaje. (D'Amore, 2006:243).

Los análisis anteriores, han permitido formular algunas categorías en cuanto al contenido y habilidades algebraicas y a la importancia de relacionar los conceptos desde las formas de representación visual-geométrica (FRVG), verbal-lingüística (FRVL) y simbólica (FRS), además de fijar una postura en cuanto a la iniciación al álgebra que permite analizar y valorar el nivel de comprensión de los conceptos:

Categoría	Descripción
Categoría: Identificación y relación entre las formas de representación.	Identifica los polinomios y hace relaciones entre las diferentes formas de representarlos: visual-geométrica, simbólica y verbal-lingüística.
Categoría II: Reconocimiento y relación de los conceptos con objetos geométricos de área y perímetro.	Reconoce e identifica los polinomios y los relaciona con objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.
Categoría III: Aplicación de las propiedades de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.	Aplica las propiedades de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos con polinomios algebraicos.
Categoría IV: Realizar operaciones, relacionando las formas de representación.	Realiza operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios relacionando las diferentes formas de representación: FRVG, FRVL y FRS.
Categoría V: Argumentación y relación entre la FRVL y las demás formas de representación.	Utiliza su lengua materna (LSC) para justificar la relación que existe entre los conceptos desde sus diferentes formas de representación.
Categoría VI: Contextualizar el lenguaje algebraico en situaciones de área y perímetro.	Resuelve problemas de aplicación con polinomios algebraicos que involucran los conceptos de área y perímetro.

Postura didáctica para la iniciación al álgebra de la presente secuencia

La postura didáctica en cuanto a la entrada al álgebra que se implementa en esta secuencia didáctica tiene que ver con una inducción adecuada y progresiva a los símbolos y expresiones donde las interpretaciones de los significados de los objetos algebraicos se construyen a través de la mediación de las diferentes formas de representación (forma de representación visual-geométrica, forma de representación verbal-lingüística y forma de representación simbólica). Esta manera de concebir la iniciación al álgebra pretende reflejar una entrada a la misma con algunos procesos de aritmética generalizada.

Autores como Mason (1996), Mason *et al*. (2005), Kieran (2006, 2007), Schliemann *et al.* (2003), entre otros, citados por Trujillo (2008); consideran la generalización como una ruta de entrada álgebra, de igual forma se admite que la generalización de la aritmética es un componente fundamental que debe ser considerado en la enseñanza del álgebra escolar; para otros es uno de los procesos esenciales de la actividad matemática, para el grupo Azarquiel (1993: 18) “adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos: *Generalización:* que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas y *Simbolización:* que permite expresar de forma abreviada los que tienen en común todas las situaciones”.

Otro aporte importante a cerca de la generalización es el de Cañadas (2007), reseñado por Trujillo (2008: 16) “[…] como un lenguaje verbal y de gestos que emplean los estudiantes en sus intentos por generalizar (como una alternativa al sistema de representación algebraico) y como una de las ideas básicas que puede guiar a los estudiantes a la utilización y manejo del lenguaje algebraico”.

Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, la construcción de los significados de los conceptos se realizaron mediante procesos de generalización usando representaciones geométricas que se llevaron a cabo en situaciones de acción y formulación, haciendo uso del lenguaje natural (LSC) y de la lengua castellana; con estos procesos se busca dar sentido a los objetos matemáticos emergentes (monomio, binomio, trinomio, polinomio, entre otros) a partir de contextos geométricos de área y perímetro en un escenario (situación didáctica) donde las formas de representación son fuentes de construcción de significados alrededor de las cuales se va consolidando poco a poco el lenguaje algebraico.

Esta propuesta de iniciación al álgebra se podría comparar con la fase del álgebra sincopada (el análisis histórico, deja claro que en esta fase tuvo lugar la lenta transición del lenguaje natural o retórico al simbólico y que las formas de representación fueron elementos claves en esa transición), aclarando que en el caso de los sordos se debe privilegiar un primer contacto con representaciones de tipo visual. Desde esta perspectiva se espera que las letras adquieran el sentido de número generalizado y las expresiones algebraicas como representaciones geométricas asociadas a la idea del área de un rectángulo.

Análisis a priori en situaciones a-didácticas

En esta parte se realiza el análisis a priori desde la dimensión cognitiva, en el cual se pretende indagar sobre los elementos y procesos matemáticos que intervienen en la construcción de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación, y se elaboran situaciones a-didácticas teniendo en cuenta las categorías de análisis establecidas.

Las situaciones a-didácticas son aquellas en las que se halla en juego el estudiante y el objeto del conocimiento (en este caso reflejado en los procesos que describen las categorías), pero no el maestro. Las situaciones a-didácticas que fueron diseñadas y aplicadas tienen como propósito identificar la forma como están concebidos los procesos y objetos matemáticos en los estudiantes; de igual forma identificar los errores comunes que cometen en dichos procesos; además, en el caso especial de los estudiantes sordos identificar las implicaciones que tienen las diversas formas de lenguaje (verbal, simbólico, gráfico, lingüístico) en la solución de situaciones relacionadas a los objetos matemáticos.

Análisis del instrumento aplicado en las situaciones a-didácticas.

Los análisis preliminares permitieron determinar algunos procesos y elementos presentes en los objetos matemáticos, entre los que se destaca el uso de diversas formas de representación que han sido un paso obligado en la consolidación de los mismos a través de la historia, además estas representaciones constituyen un elemento didáctico enriquecedor para el aprendizaje, en este caso las representaciones de tipo visual constituyen una fortaleza en los procesos de los estudiantes sordos; para Calderón *et al.* (2009) uno de los retos para la didáctica de las matemáticas orientadas a poblaciones sordas, es la existencia como mínimo de tres sistemas semióticos de representación y articulación de los mismos en la práctica matemática.

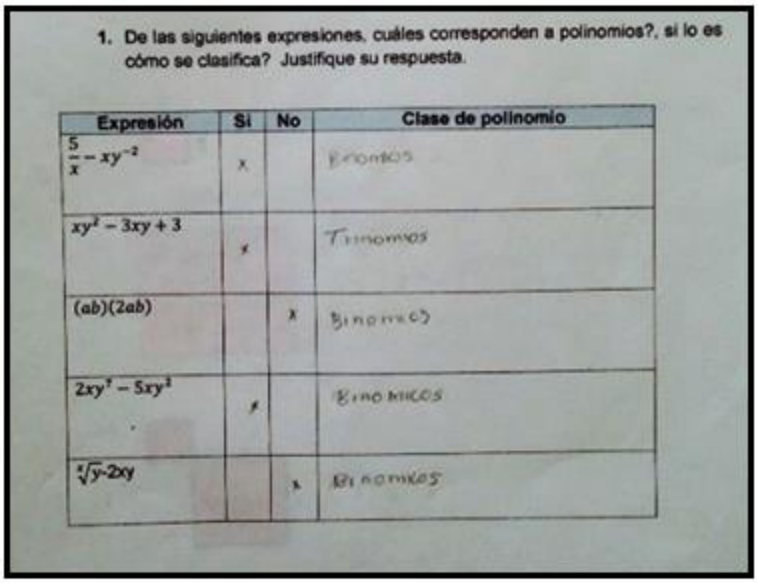
A continuación se realizará una breve descripción, análisis y discusión de los instrumentos aplicados en las situaciones a-didácticas: se aplicó a los estudiantes E_1 y E_2 una prueba de entrada conformada por 15 tareas que fueron asociados en grupos de acuerdo a las seis categorías establecidas, de la primera categoría se realizaron los ítems 1,2 y14; de la segunda, los ítems 3,5,6,7; de la tercera, los ítems 4 y8; de la cuarta, los 9 y 10; de la quinta, el 15; y finalmente, de la sexta los ítems 11,12 y 13; de los cuales se seleccionan algunos para el respectivo análisis teniendo en cuenta el desempeño de los estudiantes en las preguntas, y las argumentaciones dadas en la entrevista [19].

Para consolidar los conceptos matemáticos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios es importante partir del primer nivel categorial: ***Identificar los polinomios y hacer relaciones entre las diferentes formas de representarlos: visual-geométrica, simbólica y verbal-lingüística.***

---

[19]videograbaciones interpretadas por un especialista en Lengua de Señas Colombiana.

En el ítem 1 del cuestionario, se indaga por la identificación de un polinomio, desde su representación simbólica, en este punto se pone en evidencia las falencias que tienen los estudiantes en el dominio de la lengua escrita que pueden fundamentarse en el hecho de que esta no es su lengua materna, a continuación se muestra el desempeño de $E_{1:}$



1. De las siguientes expresiones, cuáles corresponden a polinomios?, si lo es cómo se clasifica? Justifique su respuesta.

Expresión	Si	No	Clase de polinomio
$\frac{5}{x} - xy^{-2}$	x		Binomios
$xy^2 - 3xy + 3$	x		Trinomios
$(ab)(2ab)$		x	Binomicos
$2xy^{[illegible]} - 5xy^2$	x		Binomicos
$\sqrt[{[illegible]}]{y}-2xy$		x	Binomicos

Desempeño de E_1, situación a-didáctica número uno.

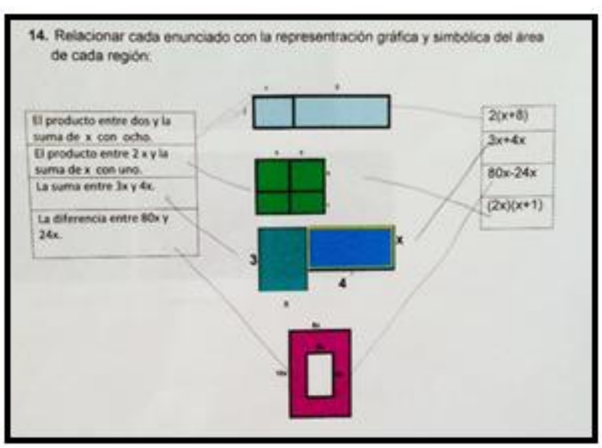
Se puede notar que E_1 no diferencia entre expresión algebraica y polinomio, aunque tiene la idea de que el número de términos que tiene el polinomio permite clasificarlos y clasifica perfectamente los trinomios; en el caso de los binomios se observa que presenta dificultades en la escritura del nombre, y además no logra identificar el monomio, frente a lo anterior en la entrevista manifiesta que:

P: Las expresiones primera, tercera, cuarta y quinta dices que corresponden a binomios (hace la seña) ¿explica?
E_1: Si, porque tiene dos partes
P: ¿Cuáles son las dos partes que tienen?

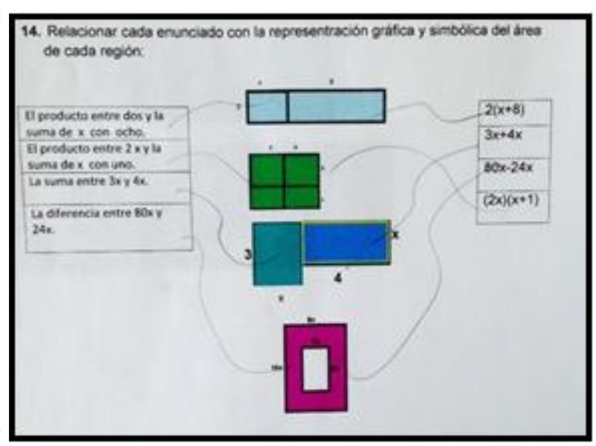
E_1: (Piensa…y muestra los términos).
P: Y ¿en el caso de (ab)(2ab)?
E_1: (Señala los dos monomios)
P: ¿Sabes cuáles deben ser las características de un polinomio?
E_1: No lo se
P: ¿Por qué escribes en una parte binomios y en otra binómicos?
E_1: No sé…, me confunde la parte escrita. ¿Cómo es? …no lo sé… solo sé la seña.

Se deduce entonces que algunos términos de la lengua escrita resultan difíciles para los estudiantes sordos, debido a que existen en esta cultura algunos prejuicios en cuanto al dominio de esta, por eso es importante al empezar una temática nueva, involucrar un vocabulario donde se interactúe con los dos tipos de lenguaje (Lengua de señas y Lengua escrita), pues de acuerdo a esta tarea, los estudiantes pudieron identificar la mayoría de polinomios por la seña, sin embargo, se les dificultó escribir el nombre de los mismos.

Continuando con esta categoría, se analiza el ítem 14, esta pregunta involucra la relación entre tres formas de representación de los conceptos FRVG, FRVL y FRS; en este caso se tendrán en cuenta los desempeños y argumentos de los dos estudiantes:



Respuesta de E_1, ítem 14 , situación a-didáctica 1



Respuesta de E_2, ítem 14 situación a-didáctica 1

En las imágenes anteriores se observa que los dos estudiantes realizaron correctamente la tarea, logrando establecer las correspondencias entre las formas de representación; se debe tener en cuenta que la representación gráfica geométrica está sirviendo de puente conector entre las otras dos, este pudo ser un motivo para que la relación se estableciera.

Los estudiantes respondieron en la entrevista de la forma como se describe a continuación:

Entrevista E1:

P: Justifica: ¿cómo solucionaste la pregunta?
E_1: En lo que está de texto habla de un número dos y una x, también habla de un número 8, entonces en la figura que tenía el 8 la uní con esa y también con la fórmula que tenía el 8, las comparé y pues creo que esa es la fórmula con la figura y el texto.
P: ¿Reconoces la escritura de la palabra dos? Y ¿el número ocho?
E_1: ¡Sí!
P: Y ¿qué significa producto?
E_1: No sé, solo miré esas dos…

Por su parte E_2, justifica su tarea de la siguiente manera:

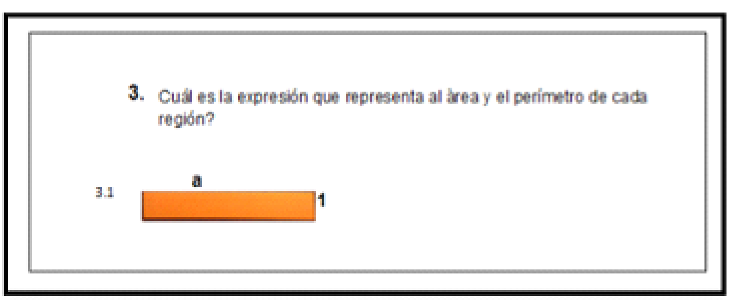
P: ¿Por qué el área verde corresponde con ese enunciado y esa representación simbólica?
E_2: En la frase dice hay dentro de dos x y entonces pues escogí la última porque dice 2x y hay una x más uno y entonces creo que esa es la respuesta
P: ¿Dónde está en la representación gráfica la suma de x con uno?
E_2:(Muestra el lado de medidas x y uno)
P: ¿Sabes por qué es el producto?
E_2: No.

Las formas de representación simbólica, gráfica y verbal (en este caso lengua escrita) de los ejercicios propuestos, al parecer facilitaron la comprensión para que se estableciera la relación de forma correcta; solo bastó que E_2 identificara algunas palabras clave en la representación escrita (en este caso palabras comunes), sin embargo, no manifiestan la justificación adecuada para inferir que comprenden el concepto, por lo que se debe profundizar en otros ítems sobre cómo se establecen estas relaciones.

Como se puede observar, los estudiantes se dejaron llevar por las representaciones visuales, las palabras claves y relacionaron correctamente las representaciones, pero esto no necesariamente demuestra que tengan el conocimiento del porqué se establecen estas relaciones; por otro lado, la seña de la palabra producto es desconocida, y por lo tanto, carente de sentido en la construcción del concepto de polinomio en su FRVG.

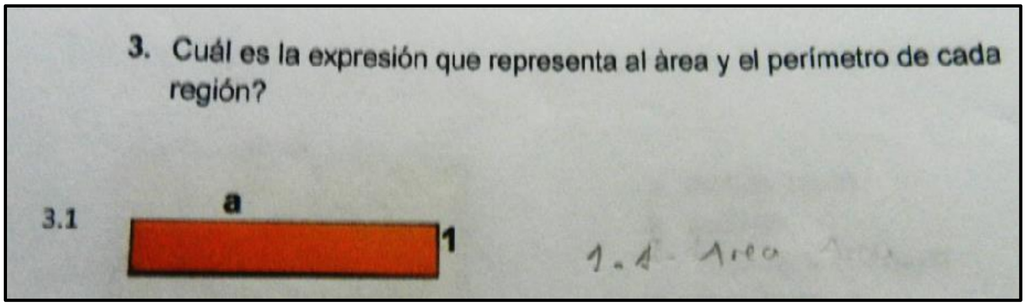
Otro de los aspectos a analizar tiene que ver con ***reconocer e identificar los polinomios y relacionarlos con objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.*** El álgebra como lenguaje tiene un valor agregado que en el caso de los sordos se debe aprovechar, los símbolos adquieren significado en contextos desde elementos geométricos como formas de representación visual, que se han asociado a objetos geométricos de área y perímetro de regiones rectangulares, buscando que la comprensión de los objetos matemáticos adquieran más significado. Se analizaron los desempeños de los estudiantes en las preguntas 3.1 y 5 de esta categoría.

El propósito del ítem 3.1 de la situación a-didáctica del cuestionario 1 fue indagar sobre la relación y significado que tienen los conceptos de área y perímetro en la construcción de la noción de polinomio algebraico en los estudiantes.



Ítem 3.1, situación a-didáctica 1.

Desempeño en la pregunta de E_2:



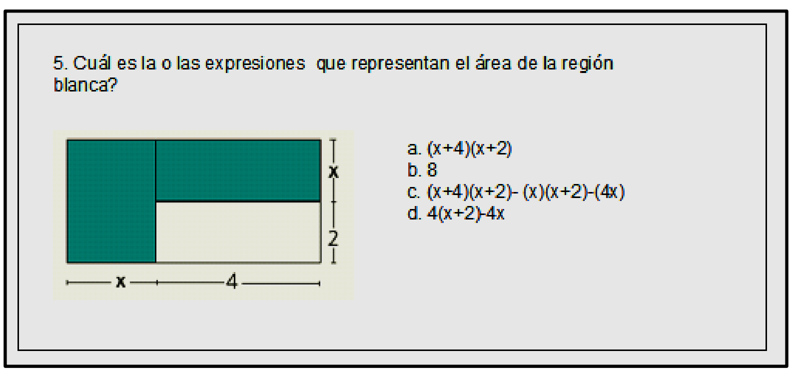
E_2 no encuentra el perímetro de la figura, pero escribe el resultado del área, para verificar y entender lo que ha escrito se le realiza la entrevista y argumenta lo siguiente:

Durante la realización del ejercicio E_2 *piensa un rato y escribe* $1.A = \ Area$ *y luego pasa al siguiente ejercicio.*
P: Para ti ¿qué es área?
E_2*: El área significa el espacio que hay adentro de una figura.*
P: ¿Qué es perímetro?
E_2*: El perímetro es lo que hay por fuera, su forma.*
P: ¿Cuál es la diferencia?
E_2*: esa es la diferencia.*
P: Entonces ¿qué sucedió al momento de responder la pregunta del cuestionario donde aseguras que 1A = área?
E_2*: Estaba confundido, no recordaba la fórmula del área yo pensaba que era una multiplicación entre los dos números, creo que es así… pero no recuerdo.*
P: ¿y el perímetro?
E_2*: No lo sé, (dice que no sabe cómo explicarlo en ese caso).*

En el desempeño de E_2 en este tipo de tareas, parece evidenciarse que tiene dificultades en interpretar los concepto de área y perímetro en contextos algebraicos y relacionarlos con polinomios, pero cabe resaltar que en la argumentación de la entrevista tiene la idea o noción de los conceptos geométricos, esto puede ser debido a que las señas que representan las palabras área y perímetro dan mayor claridad para la comprensión del concepto, esto en comparación con las representaciones en lengua escrita. Para Márquez (2011:58) "la lengua de señas es el vehículo mediador que posibilita todas las interacciones comunicativas de manera significativa con los educandos sordos en su proceso de formación”.

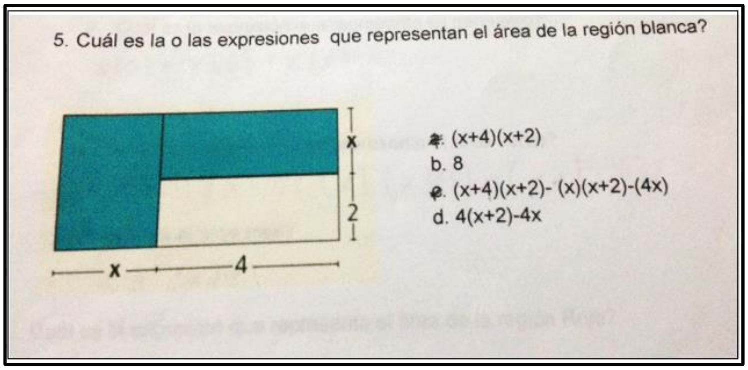
Representaciones en LSC de área y perímetro.

Continuando con el análisis de la categoría II, se muestra la pregunta número 5, cuyo objetivo fue averiguar si se establecía una relación entre una operación con polinomios y la representación del concepto de área de una región sombreada rectangular.



Pregunta 5, situación a-didáctica 1

El desempeño de E_1 en esta tarea fue el siguiente:



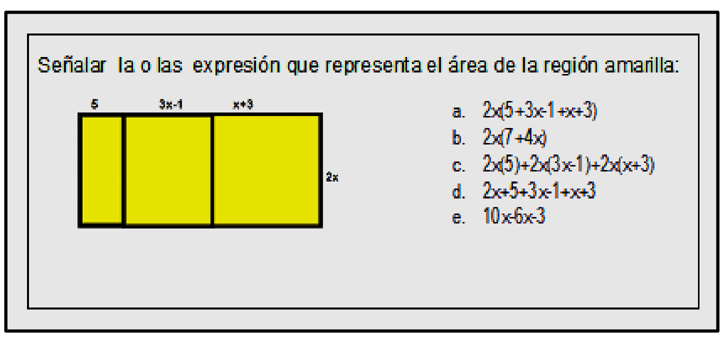
Respuesta de E_1, situación a-didáctica 2.

E_1 elige primero la opción a: *(x+4)(x+2)*,que es la representación de toda el área y en otra la opción c: *(x+4)(x+2)-(x)(x+2)-(4x),* que posibilita mediante una operación algebraica encontrar la respuesta: 8; sin embargo, E_1 no realiza ningún proceso para justificar su respuesta y en la entrevista tampoco da una justificación para su elección, como se verifica a continuación:

P: ¿Por qué pusiste dos opciones de respuesta, la opción a y la opción c?
E_1: Bueno había probabilidades que fueran dos, entonces no estaba seguro y puse las dos, porque no podía responder al azar, entonces tenía que hacer pruebas y esas eran las más opcionadas.
P: ¿Qué es lo que te pide el problema?, haz de cuenta que no tuvieras intérprete.
E_1: Creo que por lo visual entiendo la pregunta y de ahí saco la respuesta, por lo visual.
P: Y ¿cuál es la pregunta?
E_1: Me están preguntando por el área blanca, el área dentro del rectángulo.
P: ¿Por qué elegiste las opciones?
E_1: Porque eran las más opcionadas, tienen las letras y los números que tiene la gráfica
P: Y ¿qué opinas de la opción b: ocho?
E_1: No creo que sea porque debe llevar letras.

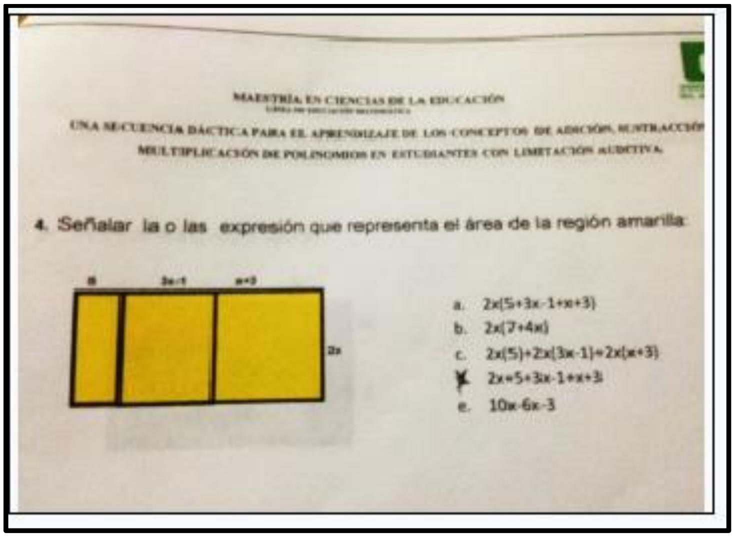
De acuerdo a la entrevista y el desempeño de E_1 se puede determinar que aunque comprende el enunciado y elige una de las posibles respuestas, se le dificulta establecer una relación entre las operaciones y la representación de los polinomios, se puede concluir que sus elecciones se realizan por conjeturas de acuerdo a las letras y números utilizados en la representación gráfica.

En la construcción de los objetos matemáticos, juega un papel importante el conocimiento de algunas propiedades básicas, teniendo en cuenta lo anterior, se establece el nivel categorial III: ***Aplica las propiedades de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos con polinomios algebraicos***, para dar cuenta sobre este proceso se revisará el desempeño del E_2, con respecto a la pregunta número 4, que pretende identificar y relacionar los polinomios con las representaciones geométricas de área de rectángulos y a su vez verificar el reconocimiento de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.



Ítem número 4, situación a-didáctica 2.

Se muestra a continuación la respuesta dada por el E_2 y las conjeturas que hace al respecto en la entrevista:


MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNA SECUENCIA DÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE ADICIÓN, SUSTRACCIÓN

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS EN ESTUDIANTES CON LIMITACIÓN AUDITIVA

4. Señalar la o las expresión que representa el área de la región amarilla:

a. 2x(5+3x-1+x+3)
b. 2x(7+4x)
c. 2x(5)+2x(3x-1)+2x(x+3)
d. 2x+5+3x-1+x+3
e. 10x-6x-3

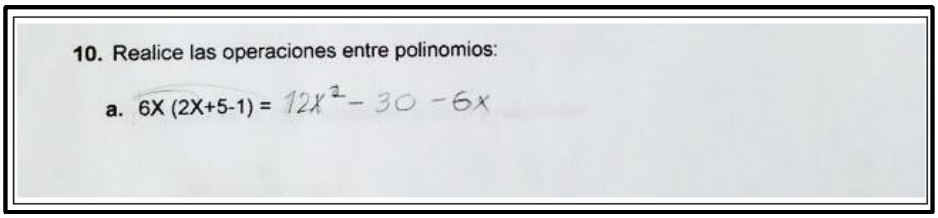
Respuesta del E_2, pregunta 4, situación a-didáctica 2.

El E_2, responde la opción D, que corresponde a una respuesta incorrecta, pues no establece una relación entre las formas de representación gráfica y simbólica de la propiedad distributiva, en la entrevista E_2 responde lo siguiente:

P: ¿Por qué eliges esta opción?
E_2: Bueno, teniendo en cuenta la forma de la figura y las fórmulas, creo que los números que están afuera son los de la fórmula D, por eso lo escogí.
P: O sea que ¿escogiste las expresiones de alrededor de la figura?
E_2: Pienso que si es un perímetro la opción mejor es la D.
P: Recuerda que la pregunta se refiere al área de una región.
E_2: si, pero esa área está compuesta por muchos lados, por eso elegí el perímetro.

Se puede establecer que E_2 no conoce ni identifica la propiedad que se puede aplicar en el caso de encontrar el área de la región (propiedad distributiva del producto con respecto a la suma), por lo tanto, tampoco la relaciona con el polinomio que representa; además, muestra confusión en las ideas previas de área y perímetro y su relación con las representaciones de los polinomios.

Continuando con el análisis de esta categoría, se tendrá en cuenta el desempeño de E_1 en el ítem 10 de esta, desde únicamente representaciones simbólicas:


10. Realice las operaciones entre polinomios:

a. 6X (2X+5-1) = $12x^2 - 30 - 6x$

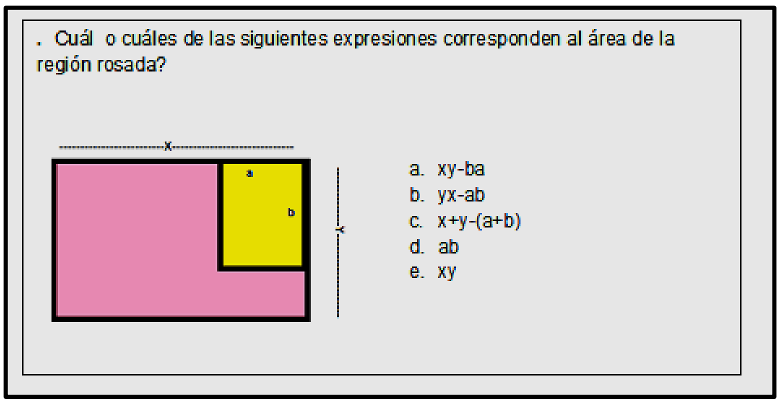
Desempeño de E_1, pregunta 10, situación a-didáctica. 2

El E_1 reconoce desde la representación simbólica la propiedad distributiva y realiza su proceso, cometió un error en la distribución de 6x con +5, cuya respuesta es 6x, en la entrevista da los siguientes argumentos:

P: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?
E1: Si hay unos paréntesis, el número que esta por fuera de este paréntesis es el que va a multiplicar los que están adentro, entonces la repuesta se fue encontrando con la ley distributiva (hace la seña), entonces llegamos a la ecuación.
P: y ¿cómo resulta el término -6x?
E_1: De la multiplicación de 6x con 1.
P: Y ¿el 30?
E_1: Ese es de multiplicar a 6x con 5.
P: ¿Te faltó algo en este producto?
E_1: No sé,… ah,.. sí, creo que la x, con el 30.

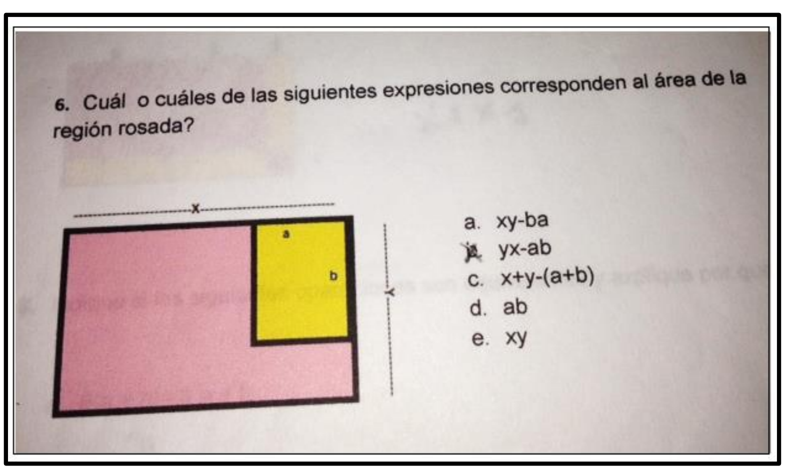
Se observó que E_1 reconoce la propiedad distributiva y su uso, a pesar de no tener representaciones visuales, el error que comete al parecer es debido a un olvido, sin embargo, en el desempeño de la prueba en operaciones que requieren productos comete errores muy simples.

Finalmente, de esta categoría se analizará la pregunta número 6, en la que se requería establecer una operación entre las expresiones que representan el área de dos regiones rectangulares, y la comprensión de la propiedad conmutativa del producto.



Pregunta número 6, situación a-didáctica 2.

E_2 responde de la siguiente manera:



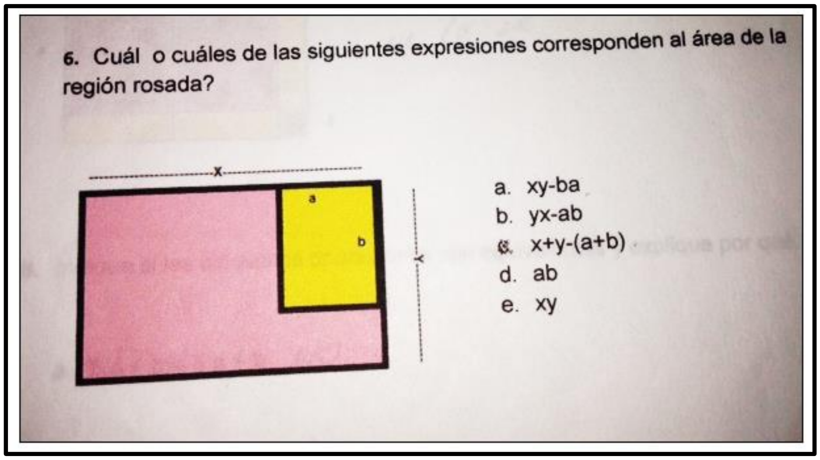
Desempeño de E_1.

E_2 reconoce, al parecer, los monomios que representan las áreas y también la sustracción, sin embargo, no establece la relación con la opción a, que se refiere a identificar la propiedad conmutativa, al respecto E_2 se justifica en la entrevista de la siguiente manera:

P: ¿Cómo llegaste a esa respuesta?
E_2: Con respecto al área rosada escogí las letras que estaban, primero escogí la x y la y, después vi que hay un área amarilla entonces resté y puse la a y la b.
P: ¿Por qué dices que hay que restar?
E_2: Por qué?, porque hay dos regiones y las otras opciones no tienen dos, solo la c, pero no me parece que sea.
P:-¿Qué pasa con la opción a?
E_2: Vi que las letras estaban cambiadas, entonces no es el orden correcto por eso creo que es la b.

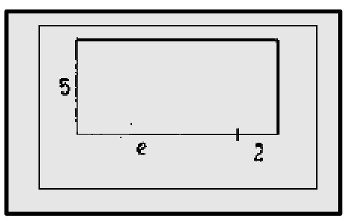
De acuerdo a la entrevista, E_2 deja ver que no hace un reconocimiento de la propiedad conmutativa; por otro lado, en el caso de las operaciones, al parecer identificó los productos de los monomios que representan las áreas y la sustracción, pero sus argumentos no son suficientes para justificar por qué eligió una sustracción.

Por su parte el E_1, ante la misma pregunta elige una opción incorrecta, se le dificulta reconocer el área de los rectángulos y relacionarla con su forma de representación simbólica, por lo tanto, no se puede establecer si tiene reconocimiento del uso de la propiedad conmutativa.



Respuesta de E_1; situación a-didáctica 2-

Desde el punto de vista de Filloy *et al.* (1989) para los estudiantes (se refiere a oyentes) no es tan obvia la notación que debe usarse para expresar este tipo de respuestas cuando se involucra el álgebra, este autor retoma el ejemplo de una investigación realizada por Kuchemann (1981), a 2820 estudiantes Británicos de secundaria, en la cual se pedía determinar el área del rectángulo de la figura:



Tomado de Filloy et al. (1989:230)

Encontrando que el 42% respondieron e2, o e10, o 10e, o e+10; señala además que las entrevistas realizadas a los estudiantes que cometieron los errores indicaron que la habilidad para describir verbalmente un método no trae consigo necesariamente la habilidad para simbolizar este método matemáticamente; al respecto Booth en 1983 señaló que los estudiantes pueden responder correctamente al ítem que requiere una cierta notación y ser incapaces de discriminar entre representaciones correctas e incorrectas, según Booth la comprensión de las notaciones es un procesos que puede avanzar por etapas, lo que hace pensar que no hay mayor diferencia entre las dificultades marcadas, hasta ahora en este análisis a priori, entre estudiantes oyentes y sordos. (Filloy *et al.*, 1989)

Dentro de este análisis a priori otro aspecto para tener en cuenta, en la construcción de los objetos de estudio, está representado en la categoría IV: ***Realiza operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios relacionando las diferentes formas de representación: FRVG (forma de representación visual geométrica), FRVL (forma de representación verbal lingüística) y FRS (forma de representación simbólica);*** al respecto se analizarán los resultados de los ítems 9 y 10, en los que se puede realizar las operaciones desde la representación simbólica y justificar la elección en su lengua natural, a continuación se muestra la pregunta 9, se pide a E_1 y E_2 que realicen las operaciones indicadas entre los polinomios P(x) y Q(x):

Dados los siguientes polinomios, realice las siguientes operaciones:

$P(x)= (x^2-4x+2)$ $\qquad$ $Q(x)= (6x+5)$

a. $P(x)-Q(x)=?$
b. $P(x)+Q(x)=?$
c. $Q(x)-P(x)=?$
d. $Q(x).P(x)=?$

Ejercicio propuesto en situación a-didáctica 3.

El desempeño de E_1 y E_2 en este ítem es igual, no logran identificar lo que les pide el enunciado, a pesar del trabajo del intérprete, señalan una de las opciones (como si fuera un ejercicio de opción múltiple) como se verá a continuación, al parecer hay desconocimiento de la notación P(x) y Q(x) para los polinomios, lo que se verifica en la entrevista. Para Ávila *et al.*(1996), el mensaje escrito es más difícil de comprender para el sordo que el mensaje oral, aunque parezca contradictorio, esto se debe a que el mensaje escrito es estático, mientras el oral se acompaña de otros recursos (por ejemplo los gestos), por esto ante las actividades escolares la comprensión de enunciados resulta un proceso complicado para el sordo, pues puede conocer los algoritmos necesarios para desarrollar la tarea pedida, pero desconoce lo que debe realizar; en nuestro caso se suma el desconocimiento de la notación de polinomio.

9. Dados los siguientes polinomios, realice las siguientes operaciones:

$P(x)= (x^2-4x+2)$ $Q(x)= (6x+5)$

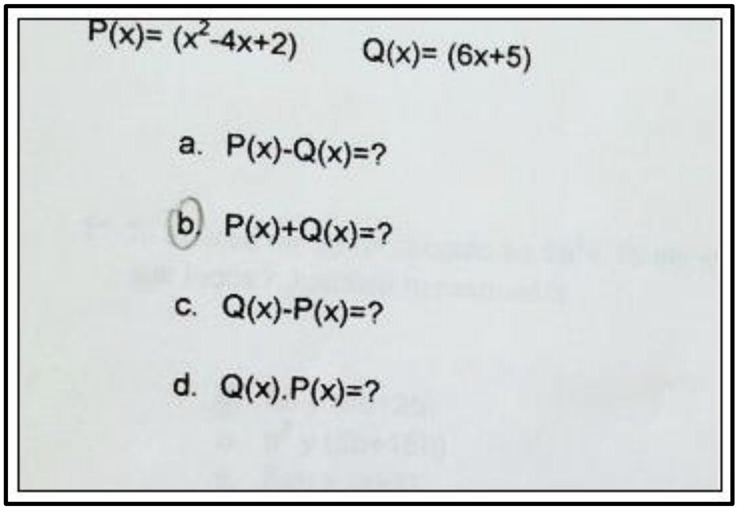
a. $P(x)-Q(x)=?$

b. $P(x)+Q(x)=?$

c. $Q(x)-P(x)=?$

d. $Q(x).P(x)=?$

Respuesta del E1; situación a-didáctica



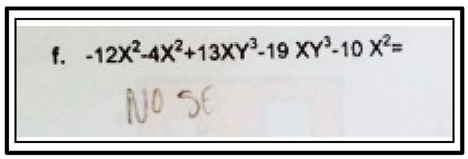
$P(x)= (x^2-4x+2)$ $Q(x)= (6x+5)$

a. $P(x)-Q(x)=?$

b. $P(x)+Q(x)=?$

c. $Q(x)-P(x)=?$

d. $Q(x).P(x)=?$



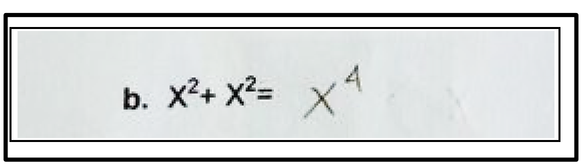
f. $-12X^2-4X^2+13XY^3-19XY^3-10X^2=$

NO SE

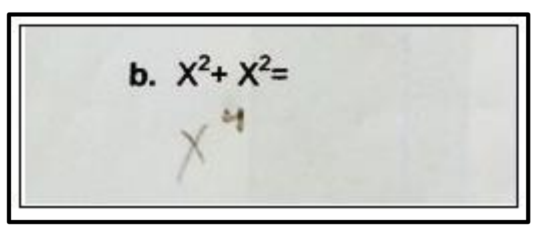
Respuestas del E2; en preguntas de la situación a-didáctica 3.

En el registro de las entrevistas, E_1 y E_2 afirmaron desconocer de los procesos.

Del nivel categorial II, se finaliza con el análisis de la pregunta 10 literal b, en la cual se cuestiona por un cálculo simple de la suma de los monomios $x^2+ x^2$, obteniendo las siguientes respuestas de E_1 y E_2:



b. $X^2+X^2=$ X^4



b. $X^2+X^2=$

X^4

Respuesta de E1 *Respuesta de E2*

En las entrevistas acerca de los procesos que realizaron, E_1 y E_2 manifiestan lo siguiente:

Entrevista E_1:

P: ¿Por qué te dio x ala 4?
E_1: Bueno porque las bases están iguales, es una x y los exponentes como está el símbolo de sumar entonces los sumé, entonces pues,…, no sé si en una resta el signo también se cambia,…, pueden ser dos opciones.
P: ¿Conoces las propiedades que se aplican en este caso?
E_1: No estoy seguro (…). Creo que se suman los exponentes
P: ¿Cuándo se suman dos potencias de igual base?
E_1: No sé.

Entrevista E_2:

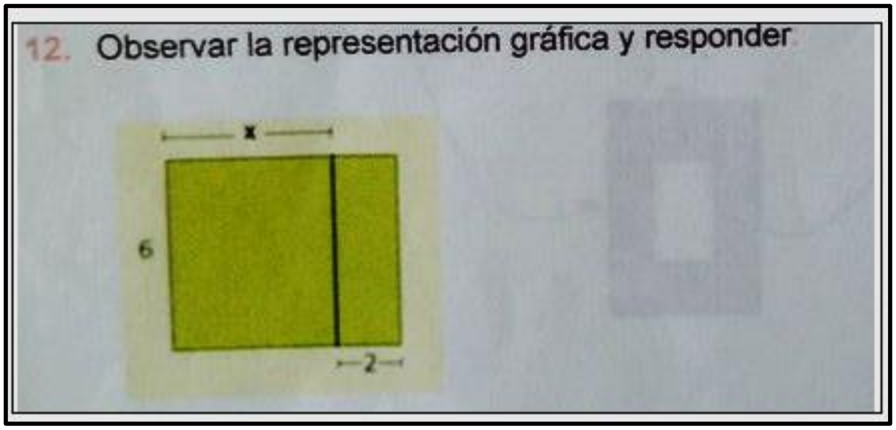
P: ¿Por qué te dio x ala 4?
E_2: Bueno porque las x están para sumar entonces bajo las x y sumo los exponentes: 2 y 2 igual 4.
P: ¿Dices que cuando las x están para sumar se suman los exponentes?
E_2: Sí.

En la entrevista y desempeño se verifica que tienen conceptos errados sobre los temas prerrequisitos para el trabajo con las operaciones de multiplicación y adición de polinomios, como son las propiedades de la potenciación; en este caso se puede hablar de un obstáculo de tipo epistemológico, para Brousseau (1983) estos obstáculos están relacionados intrínsecamente con el propio concepto, se hace claridad que no se hablará en este caso de obstáculos de origen ontogénico (propios de las características del desarrollo del niño), ya que como se ha citado antes estos errores son comunes en todos los estudiantes (oyentes y sordos), más bien se podría hablar de errores del álgebra que se originan en la aritmética, debido a que corresponden a conocimientos previos mal establecidos. (Palarea et al. 1994).

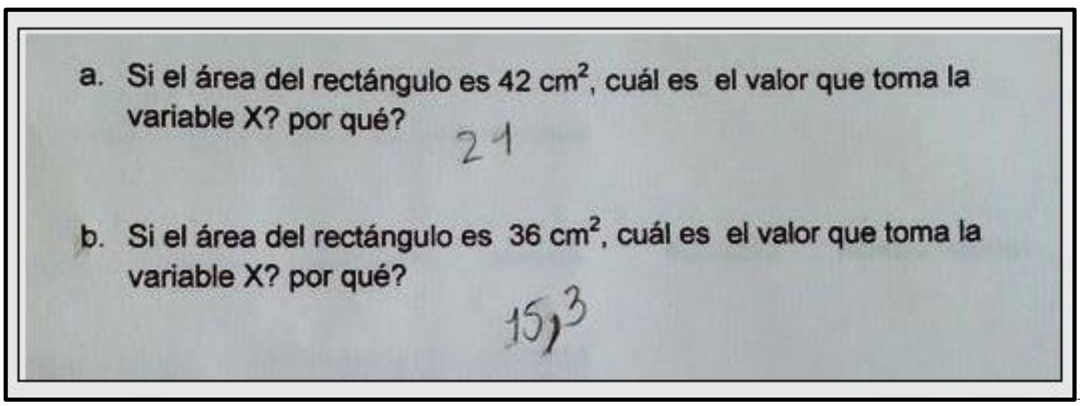
Además Brousseau (1983), citado por Palarea y Socas (1994: 92), afirma que el fracaso y el error no tienen un papel simplificado; “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar [...] sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus éxitos, pero que ahora se refleja falso, o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son intermitentes o imprevisibles, están constituidos en obstáculos”; el autor clasifica otros tipos de obstáculos que tienen su origen en el sistema didáctico, estos últimos se pueden evitar con el empleo de secuencias de enseñanza pensadas en las características y necesidades de los estudiantes, en este caso, se requiere de los diferentes significados que aportan a las operaciones con polinomios el uso de las diversas formas de representaciones en los procesos didácticos.

El análisis de la categoría V: ***Utiliza su lengua materna (LSC) para justificar la relación que existe entre los conceptos desde sus diferentes formas de representación.*** Se realizó durante la experimentación y se hizo patente en las situaciones de formulación; uno de los objetivos fue que E_1 y E_2 tuvieran que emitir mensajes entre ellos necesarios para la realización de una tarea, de tal forma que se pudiera evidenciar la utilidad del lenguaje (LSC) en la solución de la misma. En el análisis preliminar se incluyó una pegunta directa sobre el conocimiento de algunas señas involucradas en el cuestionario a-didáctico y E_1 y E_2 la solucionaron de forma correcta.

Para finalizar con el análisis de la construcción de los objetos matemáticos, se indagó sobre la forma de aplicación de estos en ejercicios de contextos geométricos, dando origen a la categoría VI: ***Resuelve problemas de aplicación con polinomios algebraicos que involucran los conceptos de área y perímetro.*** Al respecto, se analiza la pregunta número 12, en la que se pide que E_1 y E_2 observen la gráfica y respondan los literales a) si el área del rectángulo es 42 cm^2, ¿cuál es el valor que toma la variable x? ¿Por qué? y b) si el área del rectángulo es 36 cm^2, ¿cuál es el valor que toma la variable x? ¿Por qué? En los literales se pretende saber si reconocen la relación entre la representación gráfica y simbólica y si se realiza el proceso mental requerido para incluir el concepto de constante como el área del rectángulo y entender la variabilidad que toma el valor de la x. Se observó en el desempeño que E_1 y E_2 no comprenden lo que se les pide y lo justifican en la entrevista de la forma en que se muestra más adelante.



Pregunta de situación a-didáctica


a. Si el área del rectángulo es 42 cm², cuál es el valor que toma la variable X? por qué?
21

b. Si el área del rectángulo es 36 cm², cuál es el valor que toma la variable X? por qué?
15,3

1.

Desempeño del E_1.

Entrevista a E_1:

P: ¿Por qué escribes la respuesta de 21?
E_1: Bueno, ahí dice que el área total es 42, entonces, creo que la mitad de eso, porque hay una línea en medio de la figura, por eso creo que es la mitad.
P: Y ¿si la variable x toma el valor de 21, y lo reemplazas obtienes el área total?
E_1: Sí, (...), no sé.
P: ¡Hagámoslo! Si x vale 21 ¿cuánto mide cada lado del rectángulo?

$E_{1:}$ 23 y 6
P: ¿Y?
$E_{1:}$ No sé cómo encontrar el valor.

E_1 no resuelve bien la tarea, y como se verifica realiza algunas conjeturas que no son correctas ni necesarias para dar solución a este problema. La solución de problemas es un proceso de alto nivel que requiere tener sólidos los conceptos aplicados; en este caso, E_1 y E_2 tienen algunos vacíos, como se ha observado en los análisis de las anteriores categorías, por esta razón se concluye que no hay elementos que permitan determinar el alcance que tienen E_1 y E_2 en esta categoría.

En el análisis a priori se aplicaron situaciones a-didácticas, planeadas con el propósito de establecer el nivel de comprensión de E_1 y E_2 en las VI categorías que surgieron luego de los análisis preliminares en las dimensiones histórico- epistemológica, didáctica y cognitiva que propone la ingeniería; y los resultados obtenidos han permitido establecer algunas deficiencias en los conceptos previos que tienen E_1 y E_2 con respecto a los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios algebraicos, haciendo necesario en el diseño de la secuencia un trabajo inicial donde se repasen estos conceptos, como son: área y perímetro; adición, sustracción y multiplicación de números enteros. Los errores más frecuentes que cometen los estudiantes sordos en las operaciones iniciales del álgebra son de características similares a los que cometen los oyentes, clasificados en trabajos de autores como Abrate *et al.* (2006) y Palarea et al. (1994).

También se puede establecer que la condición del sordo limita la compresión de enunciados en lengua escrita, lo que impidió la realización de algunas tareas, sin embargo, se notó que el uso de representaciones gráficas como apoyo favorecen dicha comprensión; por lo tanto, en los diseños didácticos se involucrarán elementos y variables que permitan relacionar las diferentes formas de representación de los conceptos para lograr que estos adquieran significados profundos y sólidos en los estudiantes; además se incluirá todo el vocabulario de señas posible para posibilitar el puente de comunicación didáctico necesarios que debe darse entre el docente, el medio y el estudiante para posibilitar el aprendizaje.

Análisis a Priori de las Sesiones

Teniendo en cuenta los planteamientos de la didáctica francesa, D'Amore (2006) quien afirma que en el marco de teoría de situaciones didácticas propuesto por Brousseau, el conocimiento matemático incluye no solo conceptos, sino también esquemas de representación simbólica, no solo procesos de desarrollo, sino, también validaciones de nuevas ideas matemáticas, de acuerdo con ello, se definen los diferentes tipos de situaciones didácticas (acción, formulación, validación, e institucionalización); por otro lado, Márquez (2011) propone la teoría de situaciones como elemento didáctico que favorece y potencializa los procesos de enseñanza en los estudiantes sordos.

Desde la perspectiva de la teoría de situaciones didácticas, las relaciones de un alumno con el medio se clasifican en tres grandes categorías: intercambios de informaciones no codificados o sin lenguaje (acciones y decisiones); intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (mensajes); y finalmente intercambios de juicios (sentencias que se refieren a un conjunto de enunciados que tienen un rol en la teoría). Brousseau (2007: 98). De acuerdo con lo anterior, en esta secuencia didáctica se ponen en práctica las tres situaciones mencionadas y los procesos de institucionalización como componentes esenciales dentro de la teoría que se pueden dar al interior de las situaciones de acción, formulación y validación. De esta manera en la secuencia didáctica tiene lugar el elemento de la institucionalización, al interior de las situaciones de acción, formulación y validación.

El contrato didáctico.

Los contratos didácticos han estado presentes de forma implícita o explícita en todas las relaciones que se dan entre los actores al interior de los procesos de enseñanza y aprendizaje; al respecto D'Amore (2006: 129) expone que "Podemos pensar el contrato didáctico como un conjunto de reglas con verdaderas y propias cláusulas, la mayoría de las veces no explícitas (muchas veces incluso no realmente existentes, sino creadas por la mente de los personajes involucrados en la acción didáctica, para volver coherente un modelo de escuela o de vida o de saber)…”; explicando además que existen múltiples y diversas interpretaciones de este.

En el caso que nos ocupa, se tienen en cuenta sobre este instrumento los siguientes aspectos: primero, se debe aclarar que no se trata del uso que algunas prácticas cotidianas han hecho del mismo (donde los estudiantes esperan obedecer a unas reglas establecidas por el docente con el objetivo de dar respuestas y estar sujetos a un monitoreo de su actuar); por el contrario, se busca la construcción de un contrato didáctico que sea flexible y que se fundamente principalmente en la sensibilización y la motivación necesaria para iniciar la intervención didáctica, y más adelante en el transcurso de esta, establecer interacciones docente-estudiante, donde se den a conocer las intenciones didácticas y los propósitos que se tienen para lograr la consolidación de los objetos matemáticos emergentes al interior de las situaciones didácticas.

Una postura muy acertada al respecto es la que refiere Alagia, Bressan y Sadovsky (2005:11)[20] : “[…] esta es la relación didáctica que el docente va comunicando, a veces explícitamente, pero muchas veces de manera implícita, a través de palabras pero también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemático que está tratando en la clase. Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo de clase con respecto a cierto objeto matemático, se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas, es el contrato didáctico”.

Más concretamente, la secuencia didáctica está conformada por tres sesiones: explorando conceptos previos y conociendo los polinomios, adición y sustracción, y, multiplicación; cada sesión está compuesta por etapas que se planearon teniendo en cuenta elementos que

[20] “La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de las matemáticas”. Este artículo hace parte del texto: Reflexiones teóricas para la educación matemática. Alagia, Bressan y Sadovsky (2005).

proporcionaron el análisis preliminar (en las dimensiones didáctica, histórico-epistemológica y cognitiva) y el análisis del instrumento aplicado en situaciones a-didácticas.

Cada análisis a priori de las sesiones contiene los siguientes aspectos: Propósito, descripción general, vocabulario de señas, duración, metodología, recursos y materiales, dificultades esperadas en los estudiantes y acciones esperadas de los estudiantes.

Análisis a priori de la sesión número uno
Explorando saberes previos- conociendo los polinomios.

Propósitos:

- Reflexionar sobre el tipo de saberes básicos necesarios para afrontar los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

- Propiciar situaciones que permitan a los estudiantes construir o reconstruir aquellos conceptos que son considerados requisitos para la adquisición de los conceptos.

- Empezar a observar el papel que juegan las representaciones de tipo visual, simbólico y lingüísticas en la adquisición de los conceptos en los estudiantes sordos.

- Identificar algunos de los errores y obstáculos que se pueden presentar en el proceso de la adquisición de los conceptos y que pueden inferir en las operaciones con polinomios.

- Introducir situaciones de acción y formulación para que los estudiantes comiencen a relacionar el concepto de polinomio con representaciones visuales en contextos de área y perímetro.

Descripción general:

En esta sesión se trabajarán dos etapas; en la primera, se busca reforzar algunos conceptos previos como área y perímetro y las operaciones de adición, sustracción y multiplicación con números enteros; en la segunda, se van a implementar situaciones de acción y formulación que posibiliten ir construyendo el concepto de polinomio, en estas se pretende privilegiar las representaciones de tipo visual; además se incluirán las señas del LSC[21] de los conceptos básicos a trabajar para reforzar el puente de comunicación didáctica, puesto que este podría verse interrumpido por situaciones de tipo lingüístico.

Esta sesión de conceptos previos, aunque hace parte de la base de la ingeniería didáctica que se pretende diseñar, no está en su totalidad dentro de las condiciones del marco teórico de las situaciones didácticas, ya que se busca con esta sesión dar respuesta a las necesidades encontradas en el análisis preliminar y cognitivo (Fase I).

Duración: 5 horas.

Variables didácticas:

Se deben tener en cuenta, los elementos matemáticos que emergen al realizar el trabajo con el concepto de polinomio: área y perímetro, operaciones con enteros (suma, resta, multiplicación, potenciación, propiedades).

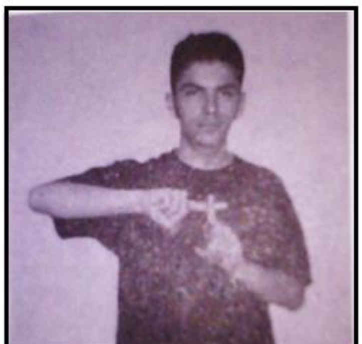
---

[21]Las señas fueron tomadas de los tomos 1, 2 y 3 del Vocabulario pedagógico de lengua de señas colombiana, FENASCOL (2000). otras que no se encontraron en los textos fueron creadas en conjunto por el intérprete, los estudiantes sordos y la docente de matemáticas.

Vocabulario de señas: Algunas de las señas involucradas, se muestran a continuación:

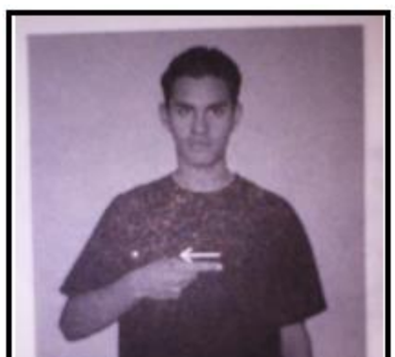

ÁREA

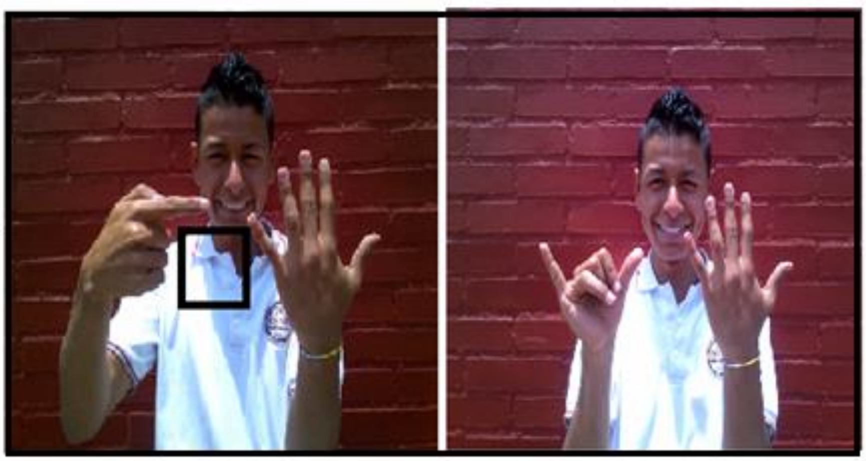

PERÍMETRO


SUMA


MULTIPLICACIÓN

FIGURA


RESTA



Pentominóes: Esta seña ha sido creada por el grupo de estudiantes sordos, el docente y el intérprete, pues no existe en el diccionario de lengua de señas.

Metodología:

Inicialmente en cada sesión se debe hacer un reconocimiento e institucionalización de las señas involucradas en la sesión (en caso de que no existan en LSC, se deben crear). En esta primera parte se busca afianzar los conocimientos previos en los estudiantes, utilizando material manipulativo, para lo cual se debe iniciar dando a conocer las señas de los conceptos a trabajar y en caso de que no existan las señas se crearán con el intérprete y se institucionalizaran con los estudiantes; luego se realizarán actividades para el reconocimiento de las fichas de polyominóes (recurso didáctico utilizado), las actividades estarán orientadas con una serie de preguntas para ir elaborando y reconstruyendo estas ideas previas, en las que se espera se diferencien los conceptos de área y perímetro y refuercen algunas operaciones básicas; mediante la lúdica se pondrán en juego el ingenio y la creatividad de los estudiantes quienes tendrán que competir entre ellos para obtener un estímulo; finalmente, se socializaran las estrategias que cada uno utilizó y se obtendrán las conclusiones necesarias. Las actividades se registrarán mediante videograbaciones y fotografías.

La iniciación al trabajo con polinomios, se llevará a cabo en situaciones de acción y formulación, involucrando actividades lúdicas (con señas de los objetos matemáticos involucrados), bloques de Diénes, caja de polinomios; con estas se busca ir construyendo el concepto de polinomio, sus formas de representación visual-geométrica y simbólica, su clasificación, y se inicia con el concepto de término semejante utilizando representaciones de áreas de rectángulos.

Recursos y materiales:

Tableros y fichas, bloques de Diénes, pizarra, marcadores, talleres y guías, intérprete de lengua de señas.

Dificultades esperadas:

La interpretación de las actividades dependerá del acompañamiento del intérprete de lengua de señas; por eso es necesario que este se encuentre presente en las actividades.
Se pueden encontrar dificultades para la comprensión de situaciones problema por el poco manejo que tienen los estudiantes de la lengua castellana; y es posible que las señas de algunos de los conceptos no estén establecidas en LSC, por lo que se deben crear.

Se puede esperar que los estudiantes tengan una confusión entre los conceptos de perímetro y área, al respecto, estudios realizados sobre dificultades y errores en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, muestran que pueden ser debidos a un tratamiento didáctico demasiado centrado en lo numérico, que se refleja en la deficiente construcción de conceptos previos. (Abrate *et al.*, 2006).

Los errores cometidos por los estudiantes en conceptos previos se podrían convertir en obstáculos epistemológicos o didácticos, para la comprensión de los objetos propios del álgebra, por esta razón es importante realizar una indagación sobre el estado de estos y atenderlos a tiempo antes de empezar el trabajo algebraico.

Acciones esperadas por los estudiantes:

Puede esperarse al comienzo de las actividades, muchas preguntas sobre las reglas y normas de los ejercicios con los materiales y sobre el contrato didáctico que se va a establecer; además, que los estudiantes demuestren habilidades en el manejo del espacio, pues su percepción del mundo es a través de la visión y de una lengua que requiere del manejo de habilidades viso- espaciales.

Análisis a priori de la sesión dos
Adición y sustracción de polinomios.

Propósitos:

- Implementar situaciones de acción, formulación y validación que posibiliten la comprensión de los conceptos de adición y sustracción de polinomios.

- Reflexionar sobre el impacto que tiene el uso de material manipulativo y concreto en la adquisición de los objetos matemáticos.

- Identificar el nivel de comprensión de los conceptos de adición y sustracción de polinomios alcanzados por los estudiantes con limitación auditiva, mediante la relación que se establece entre los diferentes sistemas semióticos de representación intervinientes (FRVG, FRS y FRVL).

- Identificar los errores que comenten los estudiantes en el trabajo con expresiones algebraicas.

Descripción general:

Esta sesión se llevará a cabo por medio de situaciones de acción, formulación y validación. Se empieza con una primera etapa de reconocimiento de términos semejantes en contextos de área, luego se realiza un trabajo con fichas y modelos geométricos, para dar sentido y significado a los objetos de adición y sustracción de polinomios, y finalmente se utilizará la herramienta ***"Caja de polinomios"***, buscando que en las tareas propuestas se establezcan relaciones entre las diversas formas de representación de los objetos matemáticos.

Duración: 5 etapas de 4 horas semanales.

Variables didácticas:

Se involucran las nociones de modelo geométrico, variable, orden, grado de un polinomio, clasificación, secuencias, patrones.

Vocabulario de señas:

Orden ascendente: seña creada.

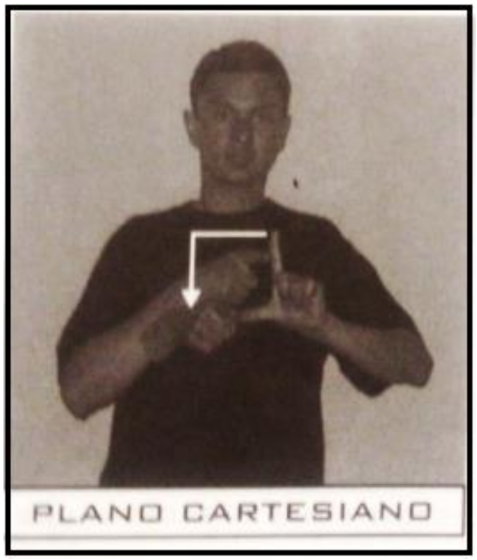
Orden descendente: seña creada

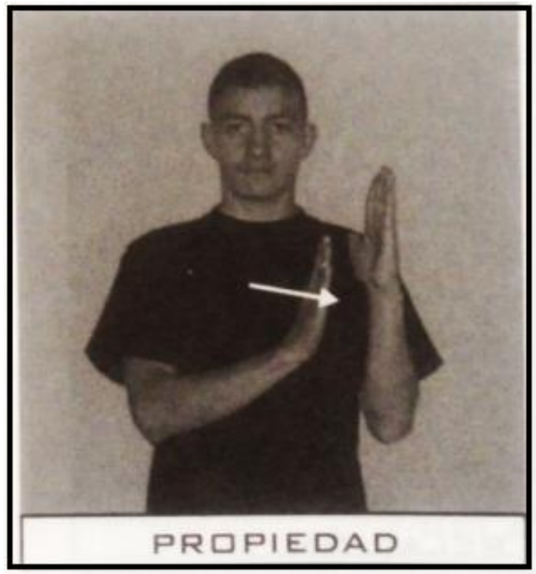
.

Modelo geométrico: seña creada.

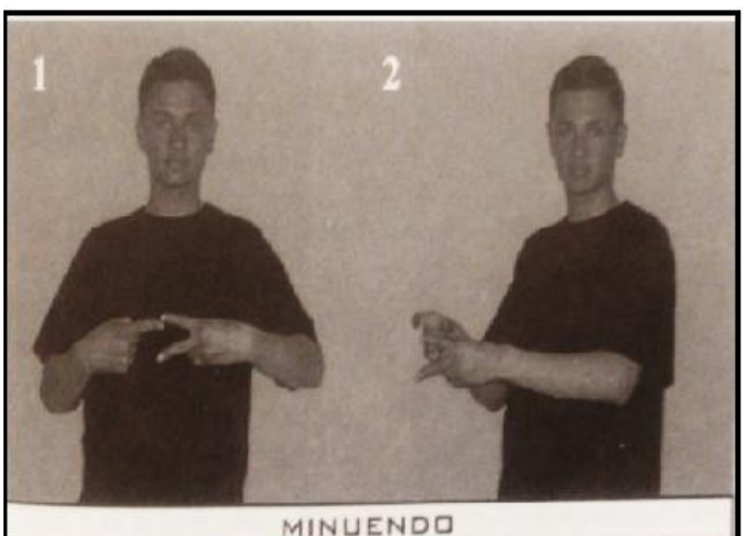
Caja de polinomios: seña creada.

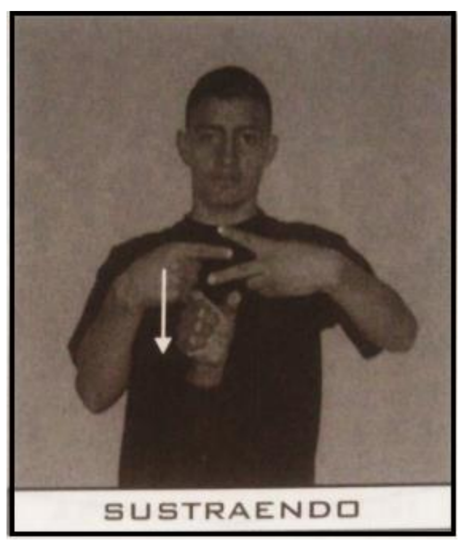
Base y altura.





Polinomios opuestos: seña creada.





Metodología:

En esta sesión se inicia con situaciones de acción, en la cual los estudiantes deben interactuar con tareas en las que se hace necesario simplificar términos semejantes para darles solución de forma correcta; además, en situaciones de formulación se pide establecer relaciones entre los tres sistemas de representación usados, a través de problemas de aplicación y modelos geométricos de la caja de polinomios, se emplea el demo que viene en el software para mostrar la forma de realizar operaciones de adición y sustracción.

Recursos y materiales:

Caja de polinomios, modelos geométricos, fichas y tableros, dominó con términos semejantes, software, intérprete de LSC.

Dificultades esperadas:

En la comprensión de los objetos matemáticos en cuestión, se identifican algunos errores y obstáculos propios del álgebra y otros debido al mal uso de las operaciones básicas de la aritmética (Palarea, 1999), por lo que espera que se presenten algunos de estos errores comunes; en lo que tiene que ver con los limitados auditivos, la comprensión de los enunciados de las tareas puede representar otro obstáculo, pues, aunque ellos puedan desarrollar y conocer el proceso o algoritmo necesario para solucionarla, la pueden realizar mal, por el desconocimiento de la lengua escrita. “[…] Si se le plantea un problema matemático para cuya resolución debe utilizarse un proceso de cálculo, pero él no entiende el enunciado, no tendrá éxito en la resolución del problema porque no sabe qué es lo que se le está solicitando […]” (Ávila *et al.,* 1996:37).

Acciones esperadas por los estudiantes:

Se espera, por un lado, que haya motivación hacia el trabajo, ya que en el contrato didáctico se estableció que esta es una propuesta que redundará en el beneficio de la población sorda de la institución; por otro lado, la existencia de diversos modos de representaciones, donde las de tipo visual juegan un papel preponderante y sirven de puente entra las otras dos, es otro elemento motivador.

El uso excesivo del registro algebraico y algorítmico para la enseñanza de operaciones algebraicas, puede ocasionar confusión a los estudiantes en cuanto a empezar a utilizar otras formas de representación, pero se espera que las representaciones de tipo visual ayuden a dar significado a los conceptos.

Análisis de la sesión tres: Multiplicación de polinomios.

Propósitos:

- Implementar situaciones de acción, formulación y validación para que los estudiantes logren establecer relaciones entre las formas de representación (FRS; FRVG, FRVL) y los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

- Analizar el nivel de comprensión de los estudiantes en las diferentes categorías establecidas en el análisis a priori de los objetos matemáticos en cuestión.
- Establecer los errores frecuentes que cometen los estudiantes con limitación auditiva al realizar operaciones de multiplicación de polinomios.
- Identificar la importancia que tiene el uso de recursos manipulativos en la construcción de los conceptos de operaciones entre polinomios cuando se trabaja con estudiantes sordos.
- Identificar el grado de comprensión de enunciados matemáticos en contextos de área y perímetro que realizan los estudiantes sordos, luego del trabajo con diferentes formas de representación.

Descripción general:

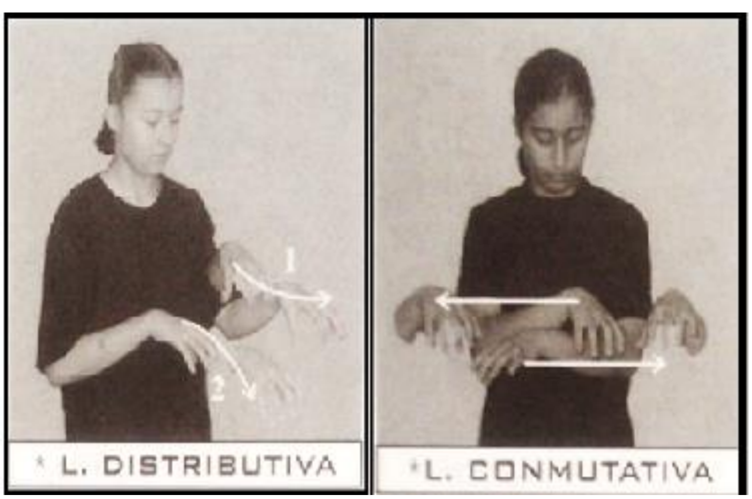
En esta sesión se comienza con situaciones de acción, donde se pretende dar sentido a la operación de la multiplicación desde las representaciones visuales geométricas, luego se llevan a cabo algunas etapas: multiplicación de monomios, propiedad distributiva, multiplicaciones de la forma (ax+b) (cx+d), y ejercicios de aplicación. Las situaciones de formulación exigen de los estudiantes establecer relaciones entre los sistemas de representación de los objetos matemáticos, y la justificación de los procesos realizados en la resolución de algunas aplicaciones. Las situaciones de validación se establecerán de tal forma que permitirán analizar el nivel de desempeño en las categorías.

Duración: 4 horas semanales, durante 1 mes.

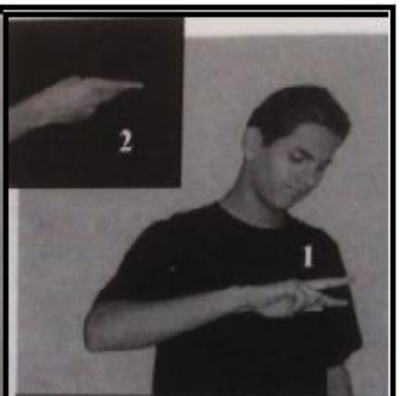
Variables didácticas:

En esta parte final, intervienen todos los elementos emergentes a los objetos matemáticos (adición, sustracción), que fueron nombrados en las sesiones I y II; además de los propios de la multiplicación como son: propiedades de la potenciación, propiedad distributiva, uso de paréntesis.

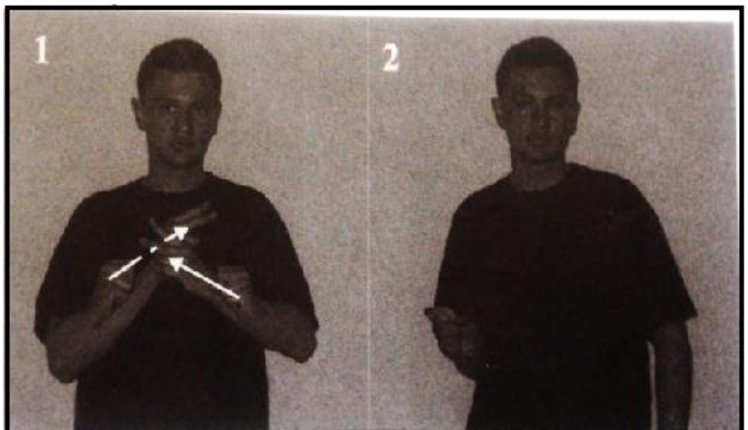
Vocabulario de señas:



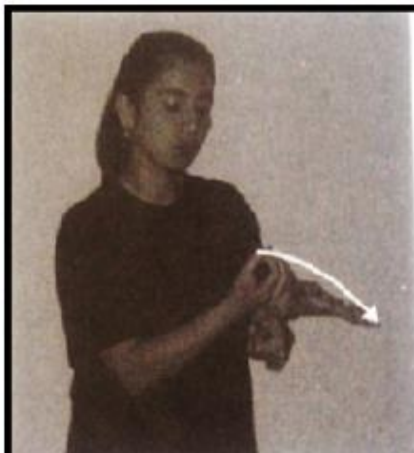
INCÓGNITA



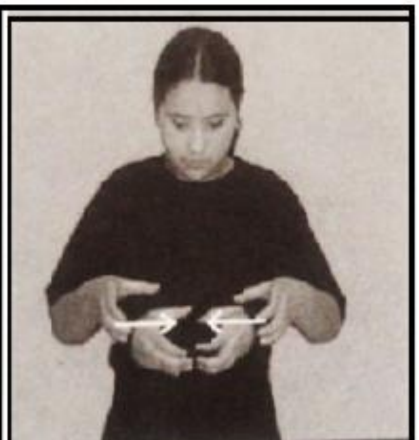
INVERSO



FACTORES



EXPRESIONES ALGEBRAICAS



* L. ASOCIATIVA

Metodología:

En esta sesión se inicia con situaciones de acción en las cuales los estudiantes deben interactuar con tareas en las que se pide encontrar el área de rectángulos cuyos lados son monomios, se busca además el reconocimiento de algunas propiedades básicas como: conmutativa, distributiva y asociativa, desde el trabajo con representaciones visuales geométricas; se usa la metodología del trabajo colaborativo y algunos procesos se registran en video-grabaciones y fotografías.

Recursos y materiales:

Caja de polinomios, modelos geométricos, fichas y tableros, tarjetas, software, situaciones didácticas, intérprete de LSC.

Dificultades esperadas:

Las dificultades a este nivel de la investigación, son las mismas establecidas en los análisis anteriores; en cuanto a las sesiones I y II hay algunos elementos que son determinantes para la multiplicación como lo son: la simplificación de términos semejantes, las operaciones con enteros, la sustracción, el uso de la propiedad distributiva, el uso de paréntesis, la comprensión de enunciados, entre otros; que se podrían convertir en errores y obstáculos.

Acciones esperadas por los estudiantes:

En esta sesión los procesos de validación tendrán una mayor participación, de tal forma que se espera que los estudiantes muestren algún avance en sus desempeños, como el dominio y razonamiento algebraico, un mayor significado de los conceptos, y uso de las formas de representación verbal-lingüística (FRVL), para hacer conjeturas y construir argumentos válidos en contextos algebraicos de área y perímetro.

Experimentación

En el apartado anterior se realizó una descripción general de las sesiones que corresponde al análisis a priori desde el punto de vista didáctico, en la experimentación se pone en marcha el diseño didáctico de las situaciones de acción, formulación y validación que fueron planeadas para lograr la comprensión de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios en los estudiantes con limitación auditiva, que permitirán conocer las concepciones y obstáculos que estos presentan, y algunas alternativas de solución; así mismo, identificar los procesos cognitivos que pueden utilizar los estudiantes ante la solución de situaciones problema y el papel que juegan los recursos didácticos implementados en cada secuencia.

Sesión Uno:
Conociendo los Polinomios

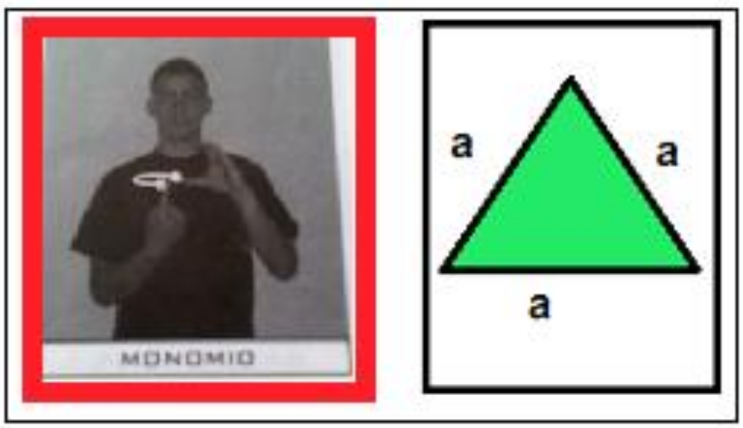
En esta sesión se trabajó durante tres sesiones de 2 horas, la primera parte se dificultó mucho por ser muy teórica, pero también determinante al momento de establecer algunos elementos formales para la notación del concepto de polinomio y para establecer relaciones y características de los mismos (clasificación, orden, notación, grado, entre otros).
Las categorías implícitas en las situaciones fueron las siguientes:

I: Identifica los polinomios y hace relaciones entre las diferentes formas de representarlos: visual-geométrica, simbólica y verbal-lingüística.

II: Reconoce e identifica los polinomios y los relaciona con objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.

A continuación, se describe el desempeño y entrevista de una de las situaciones de acción, que tuvo como objetivo la implementación de una tarea involucrando un juego; en esta se cuenta con un tablero con la señas de las palabras monomio, binomio, trinomio, y polinomio y un grupo de tarjetas con representaciones de tipo visual-geométrico; los estudiantes deben interactuar de tal forma que se deben desplazar por el tablero con fichas y relacionar la seña de la casilla donde se encuentren con la figura cuyo perímetro represente correctamente el polinomio pedido.

Los estudiantes inician la tarea y cuando E_2 se encuentra en una casilla con la seña de monomio, decide elegir la figura indicada y nos argumenta su elección en la entrevista de la siguiente manera:

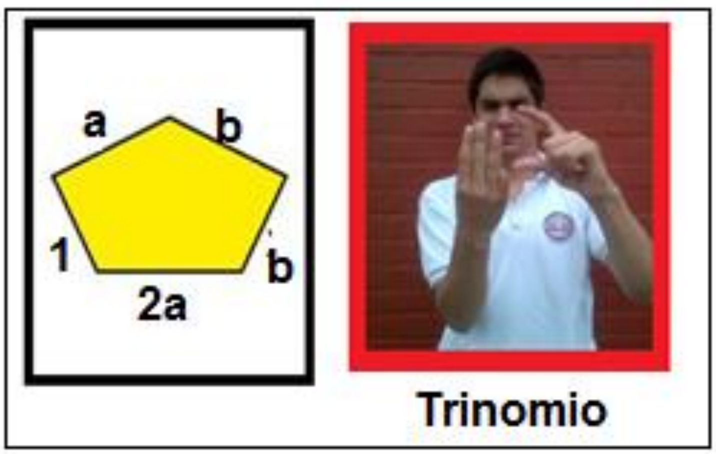


Relación hecha por E2.

Entrevista realizada a E_1 y E_2, situación didáctica de acción, sesión uno:

P: ¿Cuál es el polinomio que debes entregar?
E_2: un monomio, (Elige la figura)
P: ¿Por qué dices que es un monomio?
E_2: ¿Por qué?...porque dice que a y a y a, entonces no hay otras variables, entonces es monomio.

P: ¿Puedes expresar ese perímetro en el tablero?
E_2: Escribe. a+a+a= a.
P: ¿Cuántas a tienes?
E_2: tres, entonces ¿es 3 a?
P: ¿Por qué es un monomio?
E_2: Porque tiene solamente a la letra a.
(Intervención de E_1)
E_1: Es monomio porque queda 3 a y no hay sumas ni restas.
E_1: Es como el monomio 3x. (Muestra una figura similar de lado x).
P: Y... ¿qué me dices de esta figura?
E_1: Es un trinomio, porque tiene 2 lados a dos b y uno de 1.



Relación hecha por E_1, situación didáctica de acción- sesión uno.

Al analizar los desempeños en las situaciones y los argumentos dados en las entrevistas, se puede observar que E_1 y E_2 realizan un reconocimiento de las clasificaciones de los polinomios según el número de términos, y establecen una relación entre su forma de representación visual-geométrica (perímetro) y su forma de representación verbal lingüística (seña), estos procesos en la etapa inicial juegan un papel importante, ya que los símbolos acompañados de un contexto, en este caso geométrico, van adquiriendo un mayor significado, que cuando se proponen tareas de tipo únicamente simbólico. Al respecto, el grupo Azarquiel aclara que la ausencia de significados al introducir las expresiones algebraicas, se termina convirtiendo en una mecanización de procesos, en los cuales E_1 y E_2 terminan actuando con la mayor rapidez, transformando expresiones algebraicas, las cuales carecen de significado que pueda aportar sentido a su trabajo, agregando que “En efecto si el álgebra no se introduce significativamente, si a los objetos (símbolos y operaciones) no se les asigna ningún sentido, ¿en qué puede apoyarse un alumno que se encuentra en dificultades, para decidir la licitud o ilicitud de una transformación?”. (Azarquiel, 1993:137).

Continuando con la experimentación de la sesión número uno, se tendrá en cuenta otra de las situaciones de acción, la número 3, que se denominó “Creando polinomios” y se centró en darle sentido al concepto de polinomio, utilizando material concreto (bloques de Diénes o regletas) a continuación se describe el desempeño de E_1 y E_2 ante esta tarea:

Primero se pidió a E_1 y E_2 que encontraran el área representada por cada tableta, luego se introdujo la idea implícita de monomios semejantes, y finalmente, se pide determinar los polinomios que conforman las figuras dadas y viceversa.

E_1 al respecto de la situación de acción, describe así su desempeño en una de las tareas, donde se pedía escribir el polinomio representado en cada modelo:

Situación de acción 1.1.3 literal C: sesión uno.

Entrevista al $E_{1:}$

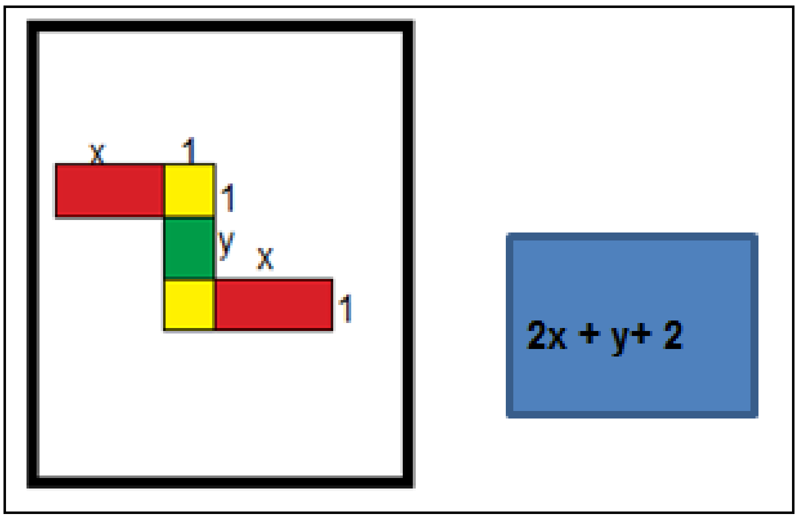
> *P: ¿Por qué dices que la figura conforma el polinomio $a^2+ab+a+1$?*
> *$E_{1:}$ Porque, le voy a explicar, ahí nos dicen de que es un polinomio que se reduce, ¿entonces que hice? empiezo con las figuras y lo arme y me da, empiezo con a^2 y lo voy disminuyendo, porque si es un polinomio, voy disminuyendo el exponente.*
> *P: Y ¿cómo sacaste que contiene a^2?*
> *$E_{1:}$ porque a las figuras previamente les dimos un nombre, aquí están (Muestra las actividades anteriores), aquí están las figuras.*

E_1 y E_2 en esta tarea mostraron gran motivación por el trabajo realizado y además empezaron a adquirir habilidad para ***identificar los polinomios y relacionarlos con objetos geométricos en contextos de área y perímetro***, en este caso, el área de las figuras formadas. Como se sabe, la teoría de situaciones didácticas tiene su origen en el enfoque constructivista, en esta secuencia se implementa en las situaciones de acción, ya que allí se posibilita el trabajo con recursos manipulativos, buscando dar significado al concepto de polinomio; al comienzo solo se espera que haya una interpretación espontánea de los estudiantes, pero, más adelante se irán implementando normas para el trabajo con dichos recursos.

Siguiendo con el análisis de la sesión uno, se tendrá en cuenta la situación de formulación, en la que se buscó desarrollar un proceso de comunicación que permitiría conocer la influencia que hasta ahora tiene la lengua materna (LSC) en la construcción del concepto de polinomio, dando respuesta a la habilidad descrita por la categoría I: ***Identifica los polinomios y hace relaciones entre las diferentes formas de representarlos: visual-geométrica, simbólica y verbal-lingüística.***

La situación consistió en un trabajo con dos juegos de tarjetas, el primero contenía representaciones gráficas de polinomios en contextos de área y el segundo representaciones simbólicas de las mismas; el estudiante (emisor) debía destapar una tarjeta del primer juego, describir a su compañero (receptor) en lengua de señas el área representada y este sacar del segundo juego la tarjeta que las relacionara.

El desempeño de los estudiantes durante esta situación fue impecable, todas las tarjetas fueron apareadas de forma correcta, como se registra en las videograbaciones; Cada estudiante emite el mensaje a su compañero en LSC, expresan las representaciones simbólicas que representan las áreas como monomios y entre ellos el signo más, para tener un ejemplo, E_2 elige la tarjeta mostrada a continuación, emite el mensaje de x más x más y más 1 más 1, y el E_1, elige la tarjeta que se relaciona en la figura:



Relación hecha por E_1 y E_2 *en la situación didáctica de formulación de la sesión uno.*

Posteriormente, en la entrevista estos fueron algunos de sus argumentos:

P: Explícame, ¿por qué esa representación gráfica corresponde a esa representación simbólica?
E_1: Bueno hay dos x, entonces sería x a la dos, [...], porque son iguales [...], dos x perdón: x y x "dos x"; hay una sola y, entonces pues es y sola; más dos que son las dos unidades que sobran entonces se suman, sería un dos y ya.

En el análisis que se realizó, se observa que se establece una coherencia entre los procesos realizados y los argumentos, lo que permite inferir que la información fue transmitida de forma correcta; cabe recordar que no se han llevado a cabo las situaciones para el concepto de adición y existe aún confusión entre la forma de operar términos semejantes que se hicieron evidentes en el análisis a priori.

Para finalizar, hay que resaltar que el conocimiento no se adquiere de forma espontánea, es un proceso que se asimila por medio de la construcción de significados y de representaciones y en el caso de los estudiantes sordos se busca que las formas de representación visual sean el eje central, para luego pasar de allí a la construcción de procesos más formales del álgebra.

Sesión Dos: Adición y Sustracción de Polinomios

Esta sesión se compuso de tres etapas, la primera orientada hacia el reconocimiento de términos semejantes, la segunda para la operación de adición y la tercera sobre la sustracción; se trabajó durante 4 semanas en jornadas de 4 horas semanales; se pretendió realizar un análisis sobre los procesos descritos por las siguientes categorías:

III: ***Aplica las propiedades de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos con polinomios algebraicos.***

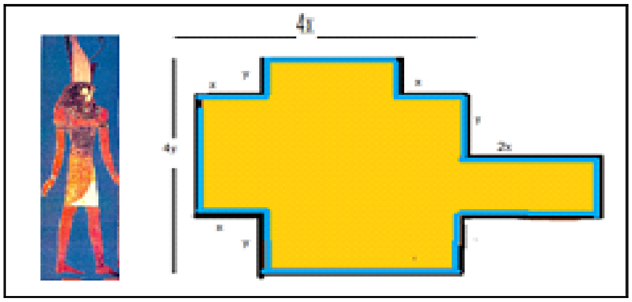
IV: ***Realiza operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios relacionando las diferentes formas de representación: FRVG, FRVL y FRS.***

V: ***Utiliza su lengua materna (LSC) para justificar la relación que existe entre los conceptos desde sus diferentes formas de representación.***

VI: ***Resuelve problemas de aplicación con polinomios algebraicos que involucran los conceptos de área y perímetro.***

En el desarrollo de la primera etapa, se realizaron situaciones de acción y formulación, se describen dos de ellas a continuación:

La situación de acción consistió en proponer una solución para el siguiente problema:



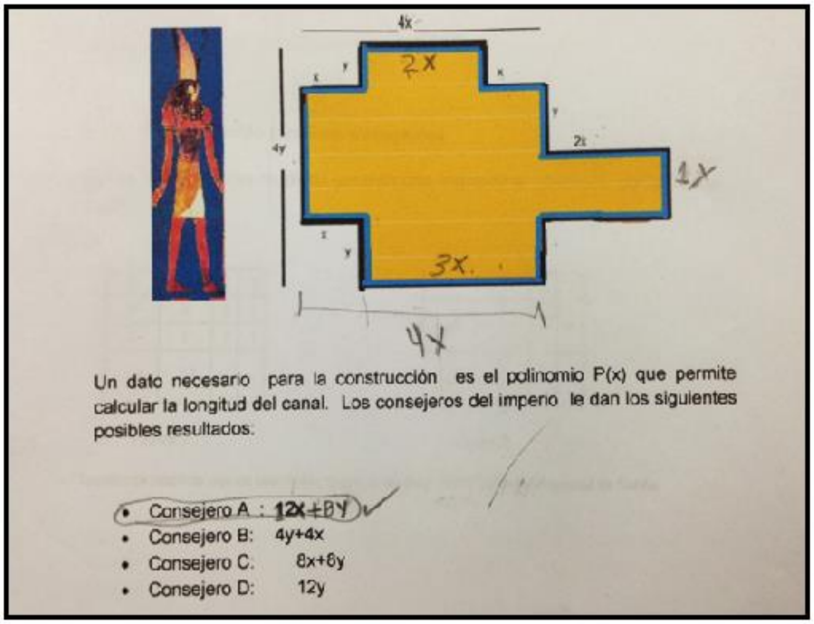
Cleopatra el último faraón que reinó en Egipto necesitaba construir un canal para la irrigación para sus cultivos, el canal debe ser construido alrededor de la región mostrada en la gráfica.

Un dato necesario para la construcción es el polinomio P(x) que permite calcular la longitud del canal. Los consejeros del imperio le dan los siguientes posibles resultados:

- *Consejero A : $12x + 8y$*
- *Consejero B : $4y+4x$*
- *Consejero C: $8x+8y$*
- *Consejero D: $12y$*

a. *¿Cuál consejero tiene la razón? y explique ¿por qué?*
b. *¿Cuál es el proceso que debe realizarse para encontrar la longitud de algunos de los lados?*
c. *¿Cuál es el proceso que debe realizarse para encontrar la longitud del canal?*

La situación de acción busca poner en desequilibrio el conocimiento, ya que para dar una solución, se hace necesario realizar procesos de ensayo y error y a partir de estos encontrar los elementos necesarios que permiten dar solución satisfactoria. Al comienzo E_1 y E_2 necesitaron que se les hiciera varias interpretaciones sobre lo que pide el problema, es decir se dificultó notablemente comprender el enunciado escrito; luego de un tiempo de discusión el E_1, decide realizar los siguientes cálculos en el gráfico:



Estudiante E1. Situación de acción: sesión dos.

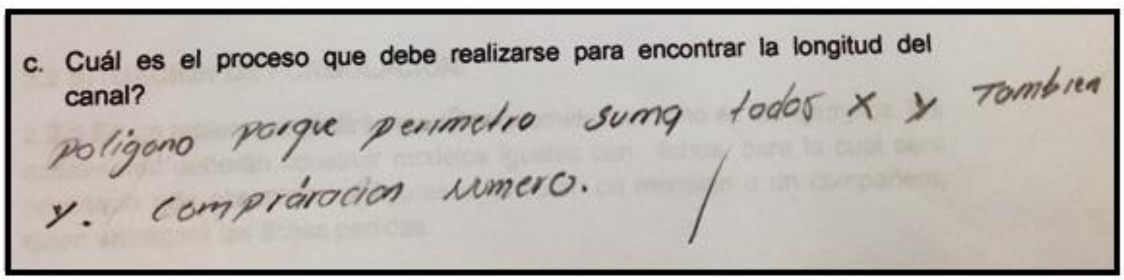
E_1 muestra en el desempeño que utiliza un proceso de abstracción para encontrar el valor de algunos lados, por ejemplo: para hallar el lado superior que mide 2x, ha realizado una sustracción, ya que todo el lado tiene una medida de 4x y se restan de las esquinas dos lados de medida x, de esta forma se empieza a notar que existe una coordinación en las relaciones que se dan entre operaciones y representaciones visuales.

Al respecto en la entrevista, ellos nos manifiestan lo siguiente:

P: ¿Cuál es el proceso que se debe utilizar para encontrar la longitud del canal?
(E_1, inicialmente no entiende la pregunta,.., el intérprete cambia la pregunta por: ¿qué hay que hacer? ¿Pasos?)
E_1: Pues ¿qué hay que hacer? Encontrar todas las x que hay y sumarlas y también las y. Las x van a parte, cuando están las x solas es porque hay un número uno ahí, y cuando hay y, también encontrarlas, y así dar el resultado que serían 12 x y 8y.
P: ¿Cuál es el proceso a utilizar para encontrar el lado que mide 2x? ¿Por qué se sabes que mide 2x?

E_2: Porque la medida total es 4 y la medida que esta por encontrar es la mitad de la total entonces son dos.
P: Y ¿cómo se yo que es la mitad?
E_2: Porque si está el total en la figura se ve que está reducida en las esquinas de a uno.

De acuerdo al registro de la entrevista, E_1 y E_2 formularon un argumento sobre los procesos utilizados para dar solución a la situación didáctica, teniendo en cuenta que duraron algún tiempo haciendo conjeturas, ensayo y error, hasta lograr una solución; en este caso la representación visual jugó un papel preponderante, pero al pedir que expresaran el proceso en lengua escrita, E_1 y E_2 se mostraron reacios (no tienen control sobre esta forma de lenguaje, lo que les crea inseguridad), luego de unos instantes, escribieron lo siguiente:

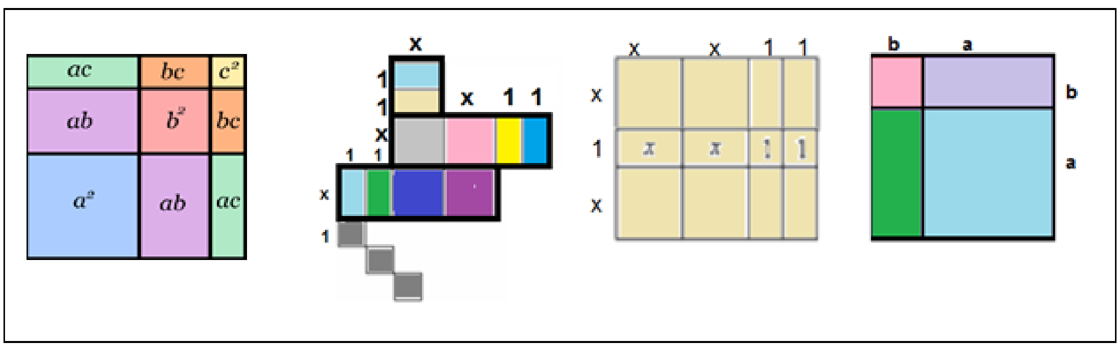

c. Cuál es el proceso que debe realizarse para encontrar la longitud del canal?
polígono porque perimetro suma todos X y También y. compráracion numero.

Argumento escrito E_1.

Los argumentos escritos no son totalmente coherentes con los expresados en la entrevista y los que fueron tratados durante la experimentación, mientras que de alguna manera se puede entender su forma de pensar cuando se expresan en su lengua materna, las ideas expresadas de forma escrita no parecen congruentes, aunque no es propósito de esta investigación el análisis del discurso escrito, se establecerán algunas observaciones al respecto: hay reconocimiento del concepto perímetro y su escritura, pero no existe coherencia en la proposición hecha, ya que la frase no expresa una idea consecuente, esto debido a la falta de dominio que tienen de la lengua escrita, sumándole a lo anterior las dificultades que puede tener la estructura de la lengua de señas colombiana que carece de elementos básicos institucionalizados para construir oraciones tales como: conectores, sinónimos, preposiciones y en algunas ocasiones vocabulario matemático esencial.

Como lo cuestionara D’Amore (2006:255) “¿El uso del sistema semiótico de una lengua es o no necesario para el funcionamiento del pensamiento lógico y para el desarrollo del conocimiento científico?”, si la respuesta es un sí, como lo demuestran teóricos como Laborde y Vigotsky (1995), Piaget (1923), Duval (1996), cuyos estudios dan cuenta de la influencia que tienen los procesos comunicativos y el dominio de la lengua en el aprendizaje de las matemáticas, esta situación no solo debe tener una solución desde el punto de vista didáctico, sino que debe ir más allá, de acuerdo al presente trabajo, en lo que corresponde a procesos de enseñanza a estudiantes sordos se deben crear en las secuencias didácticas vínculos fuertes de lenguaje entre los objetos matemáticos, su simbología formal, la representación en LSC y la representación en lengua escrita. (D’Amore, 2006:253-272).

Continuando con el análisis de la sesión dos, etapa uno, se retomará una situación de formulación que consistió en el trabajo de reconocimiento de términos semejantes por medio de modelos geométricos como los siguientes:

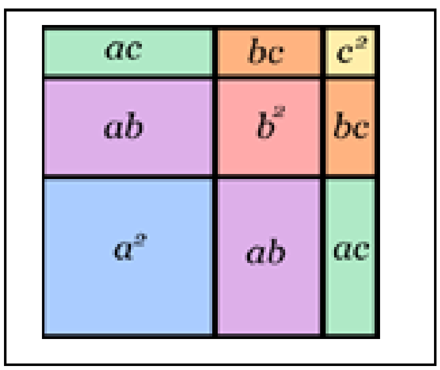


Modelos geométricos de la situación didáctica de formulación, sesión dos.

En la situación se mostró a E_1 y E_2 algunos modelos geométricos, ellos los observaron (no pudieron tomar nota), luego debían pedir las fichas necesarias para conformar el modelo visto, al finalizar se realizó la comparación de las figuras construidas por E_1 y E_2 con los modelos dados inicialmente.

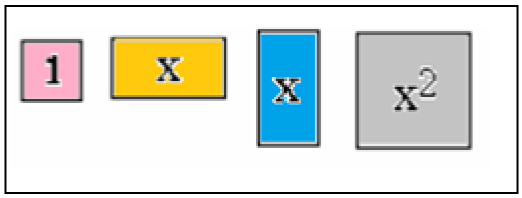
El desempeño de E_1 en esta situación se registra en videograbación, primero se le muestra por unos minutos el modelo y luego debe indicar al profesor las fichas necesarias para construirlo, la primera ficha en pedir es *ac*, el profesor lo anota en un tablero, luego hace la seña de b^2, continua con *ab*, *bc*y c^2, luego indica cuántas de cada una: 2 de *ac*, 1 de b^2, 2 de *ab*, 2 de *bc* y una de c^2, se le pide armar la figura, y en ese momento cae en cuenta que no pidió la ficha de a^2; finalmente , E_1 arma la figura en segundos y se compara con la inicial.

Este tipo de situaciones de formulación, buscan que el estudiante se vea obligado a establecer relaciones de lenguaje entre un modo de representación visual, su lengua materna y las representaciones simbólicas que dan sentido a la construcción de los objetos matemáticos, en este caso, el reconocimiento de términos semejantes.



Modelo utilizado por E_1,
situación de formulación, sesión dos.

Ahora se va a estudiar la etapa número dos de esta sesión denominada “Adicionando polinomios”, en esta parte se continúa dando sentido a las operaciones desde la forma de representación visual-geométrica, realizando situaciones con material concreto y con un software llamado “La caja de polinomios”, esta herramienta fue desarrollada por el grupo de investigación GESCAS de la Universidad de Nariño, quienes basaron su propuesta para operar polinomios en un proceso llamado homogeneización, introducido por el árabe Tabit ben Qurra el-Harani (siglo X, d.C.), concepto que permite tratar los polinomios a través del manejo de áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y la altura , estas fichas en la actualidad son utilizadas para la enseñanza del álgebra en la herramienta denominada “la cajas de polinomios”.



Fichas de la caja de polinomios, adaptadas del proyecto del grupo GESCAS, Universidad de Nariño.

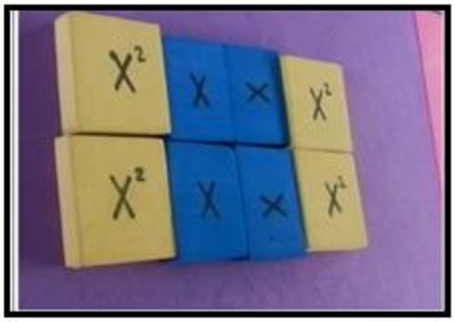
Se planearon y ejecutaron situaciones de acción, formulación y validación, que permitieran observar los procesos para la construcción del objeto matemático de adición de polinomios, buscando que los estudiantes realicen operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios, relacionando las diferentes formas de representación: FRVG, FRVL y FRS, algunas de estas situaciones se muestran a continuación:

Situación de acción: se pide a los estudiantes que den respuesta a la siguiente tarea, luego de mostrarle algunos ejemplos:

> Construye con las fichas de la caja de polinomios modelos geométricos que tengan los siguientes perimetros, luego expresa el polinomio que representa su área:
>
> a. $P = 8x+4$

Situación de acción, sesión dos- etapa II: adición de polinomios.

E_1 construyó el siguiente rompecabezas con las fichas de la caja de polinomios:

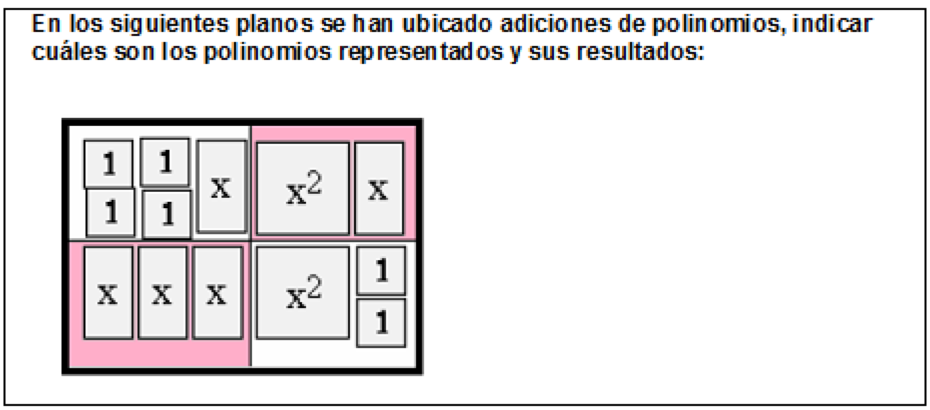


Respuesta de situación de acción; etapa dos, sesión dos.

Al observar las situaciones propuestas con el material concreto, vale la pena resaltar la facilidad que muestran los estudiantes sordos para el trabajo con el mismo, en esta tarea E_1 arma de forma rápida el compecabezas pedido, respetando las reglas de vecindad que tienen como condición los modelos geométricos, y mostrando un reconocimiento del concepto de perímetro; sin embargo, se observó que al pregutnar por el polinomio que representa el área, hubo una confusión, ya que al comienzono entendió la pregunta, y luego empezó a armar conjeturas acerca de su repuesta, buscando formar con las fichas diferentes grupos; a continuación se describe la discusión dentro de la situación didáctica:

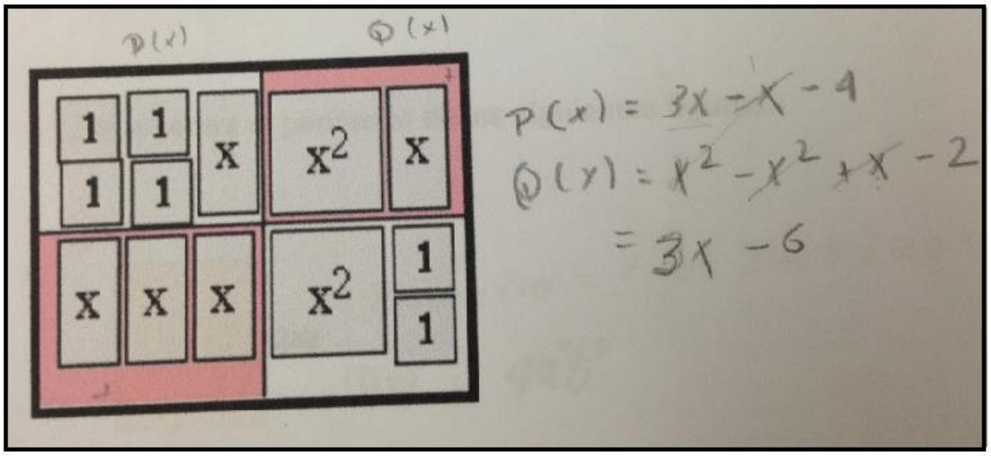
P: Esta es la figura que has construido, explicanos ¿por qué tiene perímetro 8x más 4?
E_1:porque hay figuras que tienen de lados x, (muestra las fichas de las esquinas) si coloco estas en esta forma, me va a dar 8x; y como las azules tienen este lado que es uno (muestra las fichas), las coloco de esta forma para que me den 4, y entonces ese es el perímetro que me estan pidiendo.
P:¿Cuál es el polinomio que representa el área de ese modelo geométrico?
E_1: Es un binomio
P: ¿por qué?
E_1 :Yo pienso, estas dos (muestra las x^2) significa que es un binomio, pero si las paso ahí pienso que es trinomio, …, pues depende, si las paso a este lado van a ser un binomio, porque van a estar juntas , pero si las separo, van a estar un trinomio.
P: Vamos a contar ¿cuántas de x^2 hay?
E_1: cuatro
P: osea 4 x^2, ¿cuántas de x hay?
E_1: cuatro, haa! Entonces es un binomio.
P: ¿Por qué?
E_1: Porque hay un $4x^2$ y un 4x.

Observando la forma en que van adquiriendo sentido los objetos matemáticos en los estudiantes sordos cuando se utiliza material concreto, se planean y realizan otras tareas dentro de las situaciones didácticas, buscando afianzar la relación entre la expresión simbólica de un polinomio y su forma de representación visual-geométrica, hecho que posibilita encaminarlos hacia la realización de operaciones de adición entre polinomios relacionando las diferentes formas de representación: FRVG, FRVL y FRS; para esto se utiliza *el material de la caja de polinomios* y el software; se describe a continuación una de las situaciones de acción con la caja de polinomios; luego de explicar el funcionamiento del plano cartesiano, la ubicación de los polinomios, y de mostrar los ejemplos del software en el ordenador, se pide a E_1 y E_2 que realicen la siguiente tarea:



Situación de acción, etapa dos, sesión dos.

E_1 resuelve la tarea, la videograbación se muestra su desempeño: primero escribe los polinomios p(x) y q(x) representados así: $p(x)=3x-x-4$ y $Q(x)= x^2-x^2+x-2$, luego se dirige al plano y pregunta si puede eliminar las fichas de x^2, y de x, finalmente, obtiene el resultado: $3x-6$.



Ejercicio realizado pos los estudiantes E_1 y E_2.

A modo de conclusión, el uso de la herramienta *caja de polinomios* facilitó la comprensión de los procesos aditivos, se podría deducir que utilizar modelos geométricos y físicos ayuda en la construcción de significados en estas etapas iniciales del álgebra, ya que estos elementos didácticos posibilitan ir más allá de la simple memorización de reglas y algoritmos. En los estudiantes sordos es relevante potenciar la experiencia visual como base para el desarrollo del lenguaje y la construcción de conocimiento, (Márquez, 2011).

La importancia de utilizar este tipo de herramientas radica en que se potencia el uso de representaciones externas de los significados de los conceptos, estas se pueden observar en la manipulación de los objetos y en los procesos de comunicación que utilizan los estudiantes para expresar sus ideas y justificar sus elecciones. Las representaciones externas según Rico en 1997 “como lo son los enunciados en lengua natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, ente otras, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales, haciéndolas accesibles a los demás”.(Rodríguez, 2011:11); no obstante, es necesario hacer una transición cuidadosa desde el aspecto concreto hacia uno más formal en cuanto a las operaciones algebraicas; de esta forma, se lleva a los estudiantes a realizar tareas donde utilice solamente representaciones de tipo simbólico, como la que se describe a continuación.

3.3.4 Realiza las adiciones entre polinomios:

a. $(x^2-4x+2) + (6x+5)=$

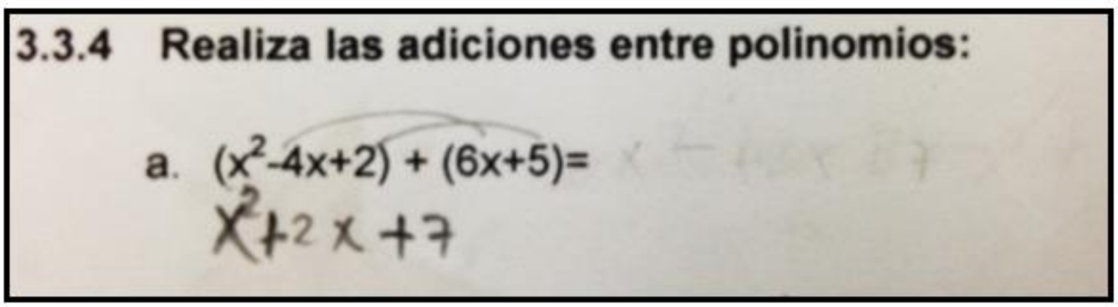
b. $(2y^2+3y+25) + (2y-10)=$

c. $(-y^2+2x^2-3y)+ (y+5x-x^2)=$

d. $(4x^2-3xy+10)+(3xy-2)=$

Situación de acción, sesión dos, etapa dos:
"Adicionando polinomios"

Respuesta que da E_2 en el literal a:


3.3.4 Realiza las adiciones entre polinomios:

a. $(x^2-4x+2) + (6x+5)=$

x^2+2x+7

En entrevista a E_2sobre este proceso, argumenta de la siguiente manera:

P: ¿Por qué dices que ese es el resultado?
E_2: Porque si están los dos paréntesis y dice que es una suma, entonces bajamos los términos que están solos, los que son semejantes, y si son números contrarios se restan, en este caso dos, (muestra a 2x), menos dos x y 7.

Ante el mismo ejercicio, numeral D, E_1 se desempeña como se describe a continuación (registro de videograbación):

E_1 desarrolla el ejercicio en el tablero, en los siguientes pasos:

Ejercicio a desarrollar $(4x^2$-$3xy+10)+(3xy$-$2)$

Paso uno $4x^2$

Pregunta que sien -3xy y 3xy se coloca el cero

Finalmente escribe el resultado: $4x^2$-8.

Al desarrollar ejercicios de adición de polinomios en forma simbólica, E_1 y E_2 realizaron operaciones de cálculo mental, igualmente, cancelaron los términos opuestos y juntaron los semejantes, mostrando hasta esta parte estabilidad en los objetos matemáticos previos que juegan un papel relevante para consolidar el concepto de adición, como por ejemplo: área, perímetro, suma y resta de enteros, uso de paréntesis y números opuestos.

Para finalizar con el proceso de experimentación de la sesión dos, se detallará brevemente sobre algunas tareas que se llevaron a cabo en la etapa III, denominada "sustracción de polinomios", en la que se ejecutaron situaciones de acción, formulación y validación.

Situación de acción: se mostró a E_1 y E_2 el software con ejemplos de sustracciones en la caja de polinomios, luego se pidió que realizaran algunas operaciones, entre ellas la siguiente:

4.1.2 Realiza las sustracciones:

a. $3x^2-3x+2 - (x^2+3x-1)=$

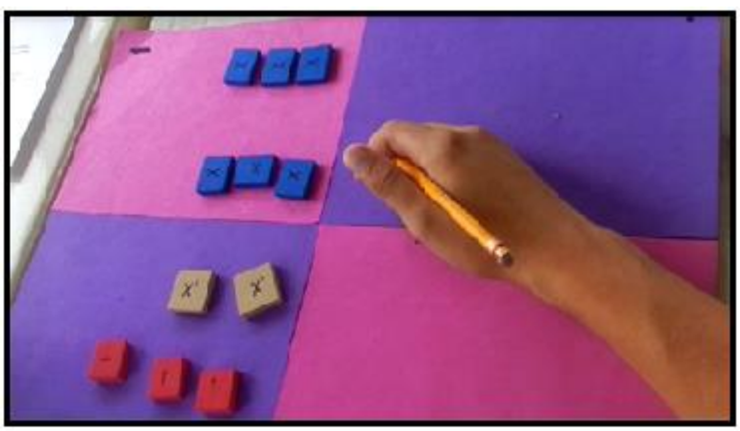
Tarea de situación didáctica de acción,
sesión dos, etapa III.

El desempeño de E_1 y E_2, quedó registrado en la videograbación, y se describe a continuación:

P: deben realizar la sustracción pedida, utilizando la caja de polinomios. ¿Qué es lo primero que van a hacer?

(E_1 y E_2 *ubican los polinomios en la caja, como se observa en la imagen inferior).*

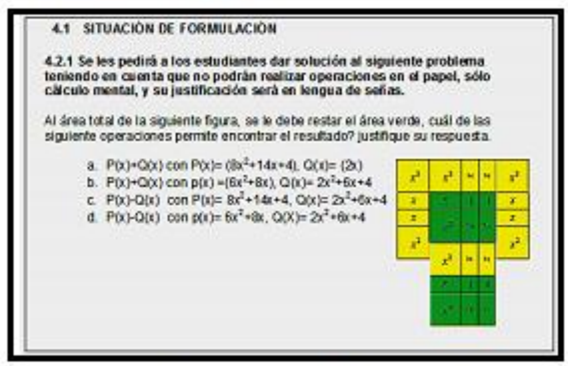
P: ¿el segundo paso?
(E_1 y E_2 *realizan el proceso del polinomio opuesto, cambiándolo de lugar en el plano como lo pide la estrategia de la caja de polinomios, y luego anulan las fichas con términos opuestos).*



Finalmente escriben el resultado que está representado en la gráfica: $2x^2-6x+3$

Se observó que las representaciones visuales de la caja de polinomios potencializan la comprensión del concepto de opuesto de un polinomio, y más adelante en otras tareas de tipo simbólico, E_1 y E_2 realizaron la mayoría de las sustracciones de forma correcta, obteniendo el opuesto y realizando cálculos de forma mental, logrando establecer relaciones entre dos formas de representación la FRS y la FRVG.

Además, dentro de las situaciones de formulación, cuyo objetivo fue analizar cómo utilizan su lengua materna (LSC) para justificar la relación que existe entre los conceptos desde sus diferentes formas de representación, se plantea a E_1 y E_2 la siguiente tarea:


4.1 SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

4.2.1 Se les pedirá a los estudiantes dar solución al siguiente problema teniendo en cuenta que no podrán realizar operaciones en el papel, sólo cálculo mental, y su justificación será en lengua de señas.

Al área total de la siguiente figura, se le debe restar el área verde, cuál de las siguiente operaciones permite encontrar el resultado? justifique su respuesta.

a. $P(x)+Q(x)$ con $P(x)=(8x^2+14x+4)$, $Q(x)=(2x)$
b. $P(x)+Q(x)$ con $p(x)=(6x^2+8x)$, $Q(x)=2x^2+6x+4$
c. $P(x)-Q(x)$ con $P(x)=8x^2+14x+4$, $Q(x)=2x^2+6x+4$
d. $P(x)-Q(x)$ con $p(x)=6x^2+8x$, $Q(X)=2x^2+6x+4$

Situación de formulación, sesión dos, etapa III

El registro de videograbación, describe lo siguiente:

La opción correcta es la opción c, ya que representa el minuendo como $8x^2+14x+4$, que representa el área total y el sustraendo $2x^2+6x+4$, sin embargo, E_1 y E_2 eligen la opción d, que muestra como minuendo el polinomio que representa el área amarilla y el sustraendo el área verde, justifican su elección en su lengua materna como se registra en la videograbación:

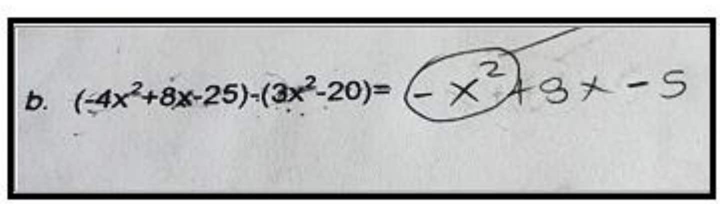
P: ¿Cómo desarrollaron el ejercicio?
E_1: Miramos el área amarilla y cuántas tenía y después cogimos la verde, ya después de esto se restó.
P: El ejercicio pide que al área total, ¿la amarilla es el área total?
E_2: es la verde con la amarilla.
E_1: Pensamos que había que restar la verde
E_2: Interpretamos mal, sacamos la amarilla y después la verde, pero es completo y luego se quita la verde.

P: ¿Piensan que si se les diera esta pregunta sin intérprete entenderían que deben hacer?
E_1: En el texto hay muchas palabras conocidas, pero también debemos tener una guía que sea un dibujo para entenderlo más fácil.

De otra parte, en tareas donde intervienenen factores de tipo lingüístico, por ejemplo en la resolución de problemas se observa un desempeño más bajo que en las demás; de igual forma, Gaona y Montañez (2006) hacen énfasis en que las dificultades son mayores cuando el alumnado sordo se enfrenta a estas tareas, tanto en procesos aritméticos como algebraicos, y se deben a su bajo conocimiento del léxico y del significado que este toma contextos matemáticos.

Se hace necesario dentro de las situaciones didácticas el uso de gráficas, esquemas, mapas conceptuales y en general recursos de tipo gráfico que sirvan de apoyo a los textos ya que facilitan la comprensión de los enunciados, como lo indica E_1, y, en este caso usar dos registros diferentes para representar las tareas.

Por último, se debe tener en cuenta que E_1 y E_2 lograron desarrollar tareas de adición y sustracción de forma correcta, incluso cuando se utilizó solo el registro simbólico, sin embargo en el siguiente caso de analizará el error cometido por un estudiante durante la validación de la sesión dos:



Ejercicio resuelto por E_1

Como se observa hay un error en el primer término del trinomio, o sea, se realizó incorrectamente la adición de los monomios $-4x^2$ y el opuesto de $3x^2$, que es $-3x^2$;el resultado debió ser $-7x^2$, el estudiante, puso $-x^2$.

Basados en las investigaciones de Matz (1980), Booth (1984), entre otros, lograron un organización de los errores más comunes que se cometen en álgebra, entre ellos, errores del álgebra que están en la aritmética, en el caso presente debido al mal uso de las operaciones con números enteros. (Palarea, 1999:25).

Sesión Tres: Multiplicación de Polinomios

El papel que juega la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido recalcado en los últimos años,sin embargo su uso se remonta a antiguos matemáticos: los griegos como se contempla en el análisis histórico-epistemólogico del presente trabajo, ya incluían diagramas, figuras e imágenes para explicar resultados en el campo de la geometría, y los árabes, a su vez, utilizaron los sistemas de representación geométrica para el trabajo con el ágebra. El uso de los tres modos de representación de los objetos matemáticos FRVG, FRVL y FRS, han ofrecido una gran riqueza a la hora de poner en práctica las situaciones didácticas, se encontró en la herramienta *Caja de polinomios*, un recurso que posibilitó la construcción de significados en las operaciones de adición, sustracción y multiplicación entre polinomios.

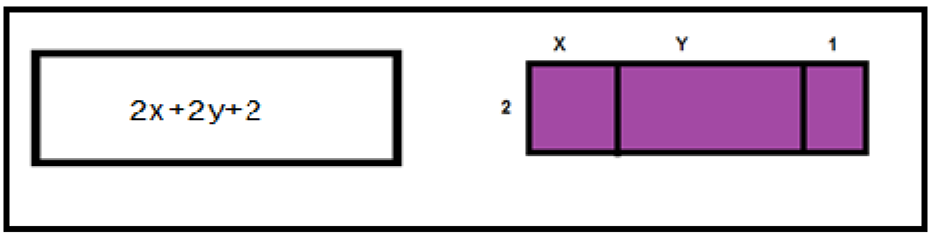
En el análisis de la sesión tres, se realizará una breve descripción del desempeño E_1 y E_2 en situaciones de acción, formulación y validación en los procesos de :

1. Aplicar las propiedades de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos con polinomios algebraicos: en este nivel categorial se describirá la situación de formulación en cuanto a la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, se propuso la siguiente actividad con tarjetas (material manipulativo):

2.2.1 Actividad con tarjetas: Cada estudiante recibe 3 tarjetas con una representación simbólica de multiplicaciones de monomio por polinomio, deberá buscar la representación gráfica de cada una de estas en otro juego de tarjetas, luego encontrar la respuesta desde la descomposición de áreas; finalmente explicar a su compañero de forma lingüística (lengua de señas), la justificación de su elección.

Situación de formulación, sesión tres:
Propiedad distributiva.

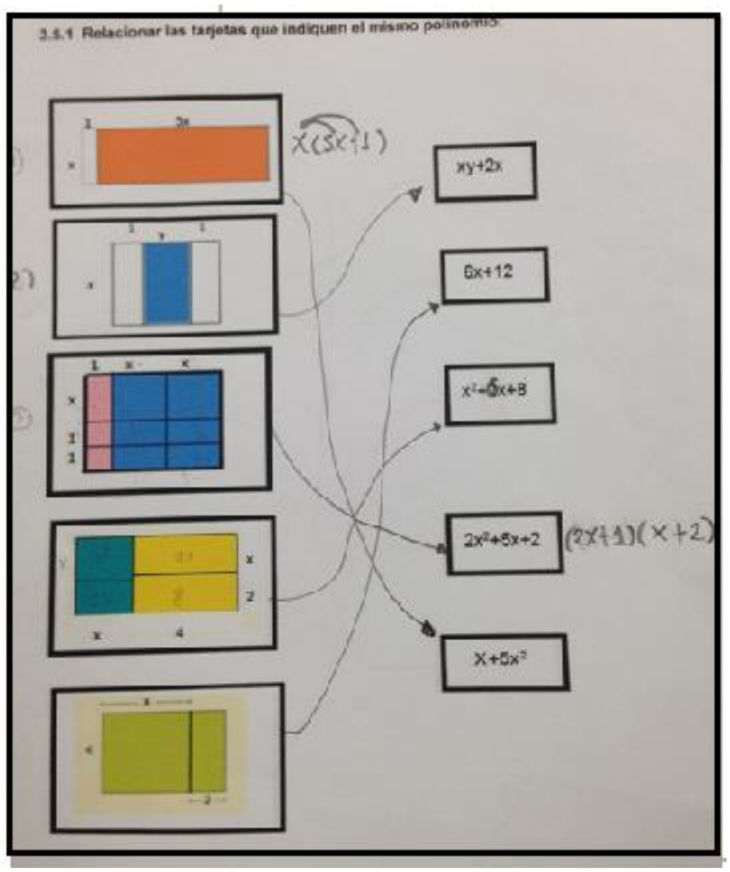
Se notó durante la situación que E_1 y E_2 relacionaron de forma correcta las representaciones gráficas con las formas simbólicas, expresando en lengua materna justificaciones coherentes para esta relación, que se registran en la videograbación; E_1, realiza la siguiente relación y la justifica de la siguiente forma:



Entrevista sobre situación de formulación a E_1:

P: ¿por qué relacionas estas dos formas de representación?
E_1: Bueno,…, listo, hay 2 y x, entonces sería 2x; y, 2 y y, sería 2y, hay 2 por 1, se multiplica y da: 2 por uno dos.
P: ¿Cómo se llama el proceso que acabas de realizar?
E_1: Hace la seña de propiedad distributiva.
P: Y, ¿en qué consiste?
E_1: Hay una letra que va a estar multiplicando un resto de polinomio que está en un paréntesis.

El uso de las formas geométricas para comprender la propiedad distributiva permitió un acercamiento entre lo gráfico y lo simbólico, además E_1 y E_2 justificaron sus procesos, utilizando un poco de léxico propio del lenguaje de las matemáticas, lo que ayuda a enriquecer sus estructuras en cuanto al conocimiento de la segunda lengua. En otras situaciones de validación, además lograron realizar cálculos de multiplicación de monomios desde la FRS, relacionándolos con la FRVG.



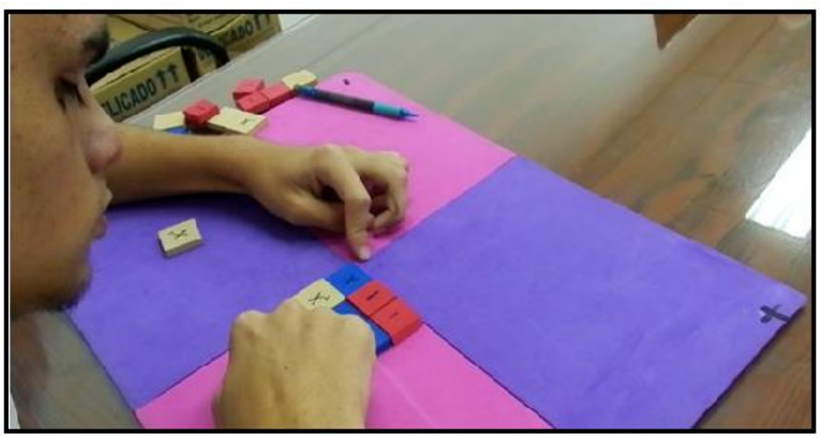
Situación de validación de E_1

E_1 relacionó las formas gráficas con las simbólicas y representó los productos, realizando la propiedad distributiva, incluyendo productos de tipo *(2x+1)(x+2);* que más adelante adquirieron más sentido, mediante el uso de la *Caja de polinomios*, donde se realizaron construcciones que permitieron obtener rectángulos de base y altura dadas, para determinar multiplicaciones de la forma *(ax+b)(cx+d).*

A continuación se describe una situación de formulación, donde se pide a E_2 construir un modelo rectangular, pero la base y altura son mostradas a E_1, quien debe comunicar la siguiente información:

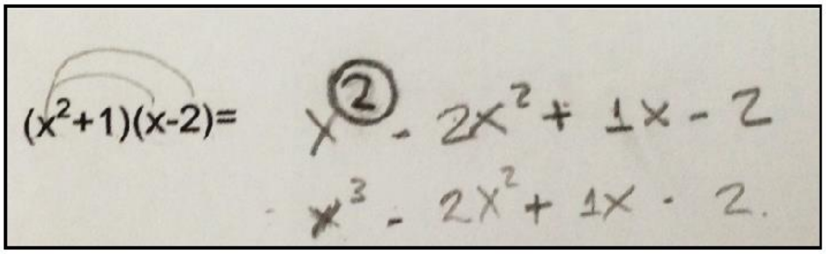
Base: x+2 y Altura: x+1.

E_1 comunica en FRL (lengua de señas), la información de la base y la altura de forma correcta, por su parte E_2, empieza a formar la base en la caja de polinomios, y luego la altura, se le dificulta comprender la ubicación de estas en el plano cartesiano, pues se deben respetar las reglas de vecindad entre los lados de las fichas para conformarlo, finalmente con algo de ayuda se arma la figura; como se puede observar el mensaje dentro de la situación de formulación llegó bien al receptor, pero esto no garantizó que se realizara correctamente la actividad, fue necesario un trabajo minucioso para que E_1 y E_2 aprendieran a conformar los polinomios pedidos en los ejercicios, finalmente con la ayuda de los ejemplos del software y el material manipulable, se logró que armaran la mayoría de los productos pedidos.



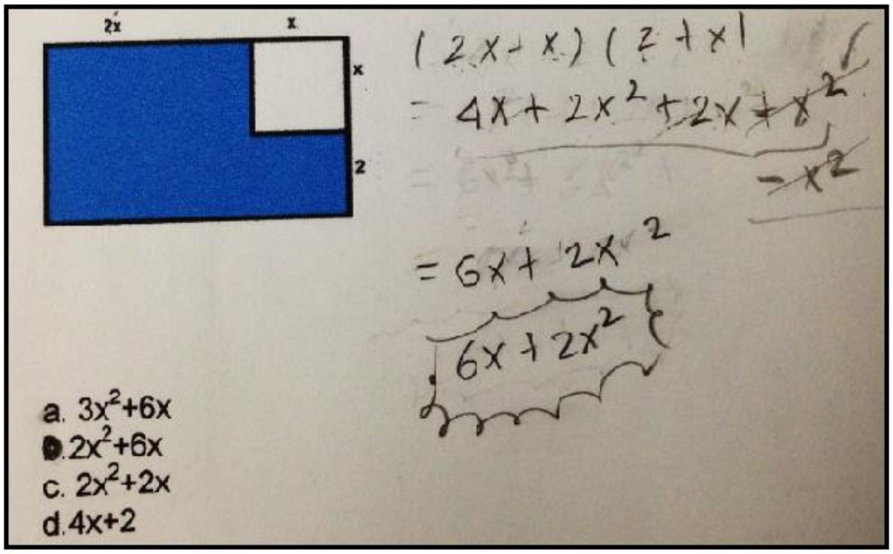
Situación de formulación: sesión tres.

2. ***realizar operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios relacionando las diferentes formas de representación: FRVG, FRVL y FRS:*** En esta categoría se desarrollaron situaciones de acción, formulación y validación durante todas las sesiones, se mostrará el desempeño de E_1 y E_2 en la tarea 3.5.2 de validación, donde se pidió realizar operaciones desde la forma simbólica, buscando indagar acerca de si se realizó la transición de los procesos concretos a otros más formales, teniendo como resultados los siguientes.



El estudiante E_1 realiza correctamente los numerales a, c, y, d; se puede deducir que ha construido cognitivamente el objeto matemático requerido, y que el uso de las tres formas de representación han sido útiles. En este proceso, cuando se logra una transición desde las formas de representación visuales a simbólicas, estas últimas se convierten en opciones más rápidas y económicas; sin embargo, en la opción b, escribe el resultado del producto como: $(x^2+1)(x-2)= x^2-2x+x-2$, cometiendo un error en la operación, ya que el producto de los monomios x^2 *y* x, es x^3; posteriormente, en la entrevista, el estudiante cae en cuenta del error y lo corrige; se debe tener en cuenta que algunos errores en los conceptos previos al álgebra, son provenientes de la aritmética, como en este caso (propiedades de la potenciación), en las que se ven reflejados posteriormente en las operaciones del álgebra, sin que sean errores propios de la misma; sin embargo, estos conceptos prerrequisitos, mal establecidos, constituyen obstáculos que deben ser tenidos en cuenta dentro de las secuencias didácticas y atendidos oportunamente por el docente; para Abrate *et al.* (2006) se debe estimular una comprensión más profunda de las operaciones y propiedades que ya son conocidas en el campo de la aritmética y que son de uso permanente en el trabajo algebraico.

3. ***Utilizar su lengua materna (LSC) para justificar la relación que existe entre los conceptos desde sus diferentes formas de representación:*** para evaluar el nivel de comprensión en este nivel se propusieron situaciones de formulación; una de ellas, en la sesión III, se describe a continuación:



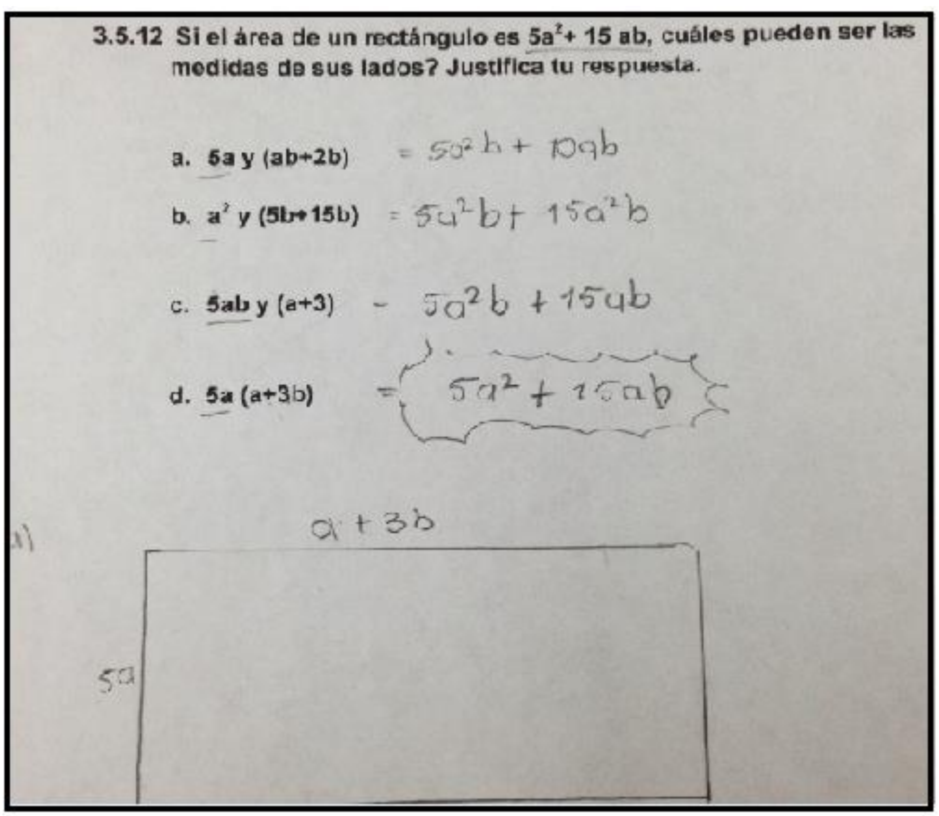
Se indaga a cerca del proceso utilizado por E_1, mediante la siguiente entrevista:

P: ¿Podrías contarnos el plan de trabajo que utilizaste para encontrar el área azul?
E_1: Bueno, primero saco el área total de la figura, multiplico, aplico la propiedad distributiva y después saco el área blanca y me da la respuesta que hay abajo. (Señala a $6x+2x^2$).
P: vamos a confrontarlo: (2x+x) por (2+x), 2x por 2: 4x; 2x por x $2x^2$; x por 2: 2x y x por x: x^2. Está el área de todo, pero la resta que dijiste que había que hacer ¿Dónde está?
E_1: ¡Ahí está!
P: Dentro del área azul, pero está incluida dentro del todo, ahora hay que restar. ¿Qué paso con la resta?
E_1: Pues, entonces es – x^2 cuadrado, y ya. (Hace la seña de cancelar).
P: ¿Cancela? ¿Ya la hiciste mentalmente?
E_1: Si claro, yo lo hice así, y me dio esto: $6x+2x^2$.

En el proceso cognitivo, E_1 relacionó las representaciones gráficas desde el concepto de área, luego las representó como binomios y realizó las operaciones de multiplicación y sustracción, esta última de forma mental, mostrando alto dominio de los conceptos, en su argumentación en LSC utilizó algunas expresiones propias del lenguaje matemático, lo que evidencia un buen desempeño en este nivel categorial.

4. Resolver problemas de aplicación con polinomios algebraicos que involucran los conceptos de área y perímetro: la comprensión de enunciados, como se ha expresado anteriormente, constituye un conflicto cognitivo para la comunidad sorda, no obstante, este problema de comprensión de lengua escrita no es ajena a los oyentes, lo que sucede es que para estos últimos la solución puede resultar más sencilla; en el caso de los sordos, el mensaje debe pasar primero de un sistema semiótico de representación a otro (de castellano a lengua de señas) y luego ser asimilado para su comprensión. Para Orton (2003:174) la importancia del lenguaje radica no solo en la comunicación, sino porque facilita el pensamiento, afirma que“[…] Siempre es probable que la lengua utilizada en el pensamiento sea la primera, así que puede que las matemáticas comunicadas en un lenguaje tengan que ser traducidas a otro para permitir el pensamiento, […]”.

En situaciones de validación, se pidió a E_1 y E_2 que realizaran la siguiente tarea, sin mediación del intérprete de LSC, y lo desarrollaron como se muestra:



3.5.12 Si el área de un rectángulo es $5a^2 + 15\,ab$, cuáles pueden ser las medidas de sus lados? Justifica tu respuesta.

a. $5a$ y $(ab+2b)$ $= 5a^2b + 10ab$

b. a^2 y $(5b+15b)$ $= 5a^2b + 15a^2b$

c. $5ab$ y $(a+3)$ $- 5a^2b + 15ab$

d. $5a$ $(a+3b)$ $= 5a^2 + 15ab$

$a + 3b$

$5a$

E_1 y E_2 realizaron en equipo la tarea, lo primero que hicieron fue multiplicar las expresiones de cada numeral, hasta encontrar la respuesta correcta en el D, en el momento de la justificación, E_1 y E_2 manifiestan lo siguiente:

P: ¿Qué dice ese enunciado?
E_1: Que encuentre la medida de sus lados.
P: Y, […], ¿tuvieron algún problema con el enunciado?
E_1: Pues las frases en español son complicadas porque tienen cierto orden, entonces sí encontramos problemas ahí.
P: ¿Les llevó mucho tiempo entender?
E_1: Cuando son palabras conocidas sí las relaciono más, pero cuando es un español más aplicado es más difícil para mí.
P:-E2: ¿Por qué hicieron todas esas operaciones?
E2: Pensamos que se estaba pidiendo aplicar una ley.
P: Y ¿qué significan estos valores? Realicen un dibujo donde me expliquen.
E_2: Yo pensé que tenía que escoger cuál era.
P: ¿Pensaste que era una opción?; hazme el gráfico, ahora Mayra (intérprete) interpreta.
E_1: (Duda), yo creo que adentro se va a dividir. (Pensó en formar un rompecabezas de la caja de polinomios)
P: Si uno mide 5a, ¿cuánto el otro?
E_1: 5a es la altura y la base es 3 a+b, pero se debe dividir. Estas son. (Realizan el dibujo).
P: Y ¿al multiplicarlas?
E_1: Me da la parte de arriba

En esta tarea se observó en E_1 y E_2 la intuición de lo que debían hacer (valga resaltar que el enunciado no tiene muchos requerimientos), realizaron todas las operaciones indicadas en los numerales y encontraron una que diera el área suministrada en el problema, cuando hay conocimiento de algunas palabras clave en un enunciado es más fácil para ellos lograr descifrar el mensaje, sin embargo, para una comprensión profunda de un párrafo es necesario conocer el sentido que le dan algunos elementos como por ejemplo los conectores, ya que estos permiten dar sentido a un texto. En la LSC no existen este tipo de contenidos gramaticales, lo que dificulta al sordo la comprensión de los objetos matemáticos puestos en contexto.

De esta manera se finaliza este capítulo que pretendió una breve descripción de algunas situaciones de acción, formulación, y validación aplicadas en E_1 y E_2, y de la forma como se fueron dando los procesos cognitivos de los niveles categoriales; este proceso de experimentación permitió realizar una confrontación de los análisis a priori y a posteriori por medio de las validaciones, en los que interviene la *devolución,* elemento de la teoría de situaciones didácticas allí se establece un contacto profesor-estudiante en el cual el docente reconoce el alcance de los saberes adquiridos.

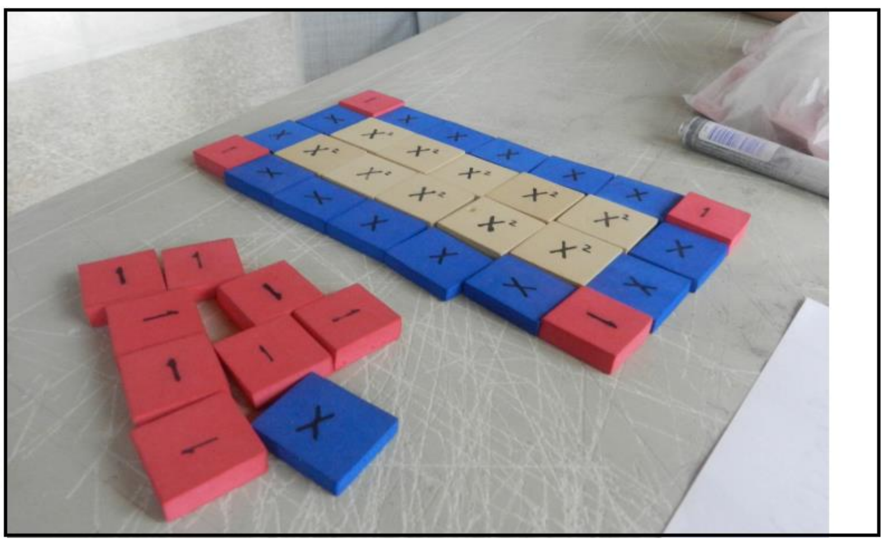
Confrontación: Análisis A Priori y Análisis A Posteriori

El estudio de la comprensión de los objetos matemáticos implica una comparación entre los procesos cognitivos usados por los estudiantes en situaciones a-didácticas, y los que más adelante se consolidaron en las situaciones didácticas, que se pueden identificar en el capítulo anterior. La reflexión acerca de un conjunto de objetos matemáticos emergentes en la construcción de los significados de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios constituye un paso obligado en los procesos de enseñanza y aprendizaje, permitiendo la identificación de los preconceptos que son necesarios, los errores y obstáculos que se pueden presentar, los procesos cognitivos y las relaciones establecidas por los estudiantes, además del papel que juega el uso de diferentes formas de representación.

De modo general, los procesos que se observaron en la construcción de los conceptos de las operaciones en los estudiantes sordos tuvieron que ver con los siguientes pasos:

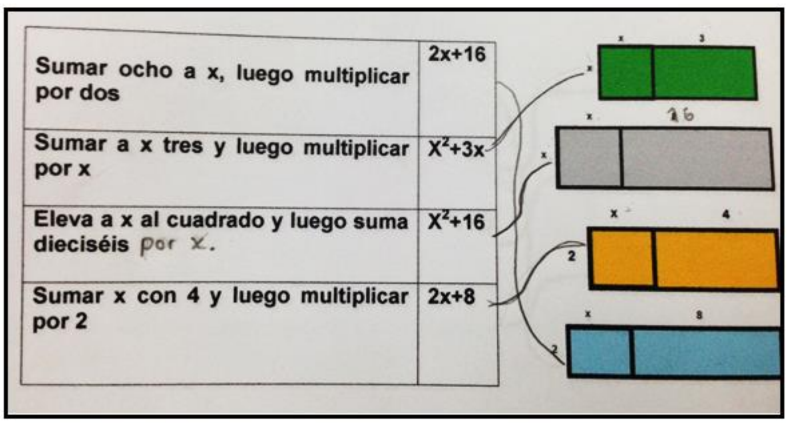
- Consolidar los conceptos previos necesarios para comprender las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios y que pueden constituir obstáculos de tipo epistemológico, como por ejemplo, los errores del álgebra que provienen de la aritmética, en este caso, se ejecutan situaciones didácticas para reforzar algunos preconceptos (operaciones con enteros, uso de propiedades, área y perímetro).

- Dar significado a los objetos matemáticos emergentes (polinomio, monomio, binomio, trinomio, suma, opuesto, minuendo, sustraendo, factor), para esto se necesitaron situaciones de acción en las que los medios (juegos, materiales, contextos) fueran visualmente significativos y con condiciones que los obligara a entrar en conflicto cognitivo y proporcionar hipótesis y conjeturas, hasta hacer la elección de los elementos que dieran solución a la situación; mediante este proceso se logró el reconocimiento de los conceptos y su relación con la forma de representación visual geométrica (FRVG) en contextos de área y perímetro.



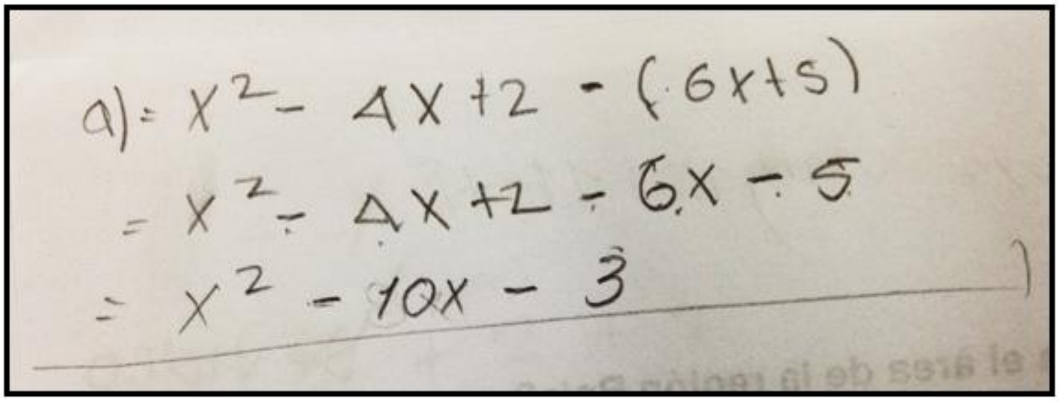
Situación didáctica de acción, caja de polinomios:
conformación del polinomio $10x^2+14x+4$.

- Involucrar tres sistemas semióticos de representación para los objetos matemáticos: forma de representación visual-geométrica (FRVG), Formas de representación verbal-lingüística (FRVL), y formas de representación simbólica (FRS), mediante situaciones de formulación en las que se construye el sentido de las operaciones y se establecen relaciones entre ellas; la posibilidad de acudir a diversas formas de representación de un objeto matemático no puede ser solo conceptual o simbólica como en el caso de las operaciones de álgebra, pues gracias a esa diversidad de registros adquieren mayor significado los conceptos. E_1 y E_2 establecieron relaciones entre los tres sistemas de representación: lograron identificar los polinomios representados en contextos de área y las operaciones implicadas, luego realizaron de forma simbólica los ejercicios.



Situación de validación: sesión tres.

- Finalmente, lograr la transición de operaciones visuales y concretas a otras más formales y abstractas, este proceso se fue dando al interior de las sesiones, y se evidencia en las operaciones de validación realizadas por E_1 y E_2, en las cuales se repiten algunas de las tareas con representaciones simbólicas propuestas en el cuestionario a-didáctico, y allí son asimiladas sin mayor dificultad.



Situación de validación, sesión tres.

Ante el desarrollo de la tarea anterior se realiza una entrevista y E_1 da los siguientes argumentos, usando su lengua materna (LSC):

> *P: ¿Cómo te diste cuenta que había que restar?*
> *$E_{1:}$ Cuando hay un menos antes del segundo paréntesis se aplica una ley distributiva y se van a cambiar lo signos, esto lleva a hacer una resta, juntando términos semejantes; depende, y cuando es una suma se bajan normales, y se juntan términos semejantes y ya.*
> *P: ¿Identificas a P(x) y Q(x)?*
> *$E_{1:}$ Si, ahora sí, son polinomios.*

Para Calderón *et al.* (2012) el corazón de la ingeniería didáctica como metodología de investigación en el aula, lo constituye *el análisis de las tareas*, en últimas, estas son propuestas como un sistema para el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes. En los apartados 7 y 8 de esta investigación ya se han realizado dichos análisis y a continuación se muestra, en resumen, la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori de algunos de los procesos observados en la secuencia didáctica

Categoría	Análisis a priori	Análisis a posteriori
Identificación y relación entre formas de representación. Identifica los polinomios y hace relaciones entre las diferentes formas de representarlos: visual-geométrica, simbólica y verbal-lingüística.	No se reconocen algunas notaciones para polinomios algebraicos. Falta establecer relaciones entre la representación de polinomios en forma simbólica y visual-geométrica. Idea intuitiva de área y perímetro.	Realizan procesos de visualización para relacionar los polinomios con representaciones gráficas en contextos de área y perímetro. Interactúan con tres formas de lenguaje (FRVG, FRS, FRVL) para identificar los polinomios.
Reconocimiento y relación de los conceptos con objetos geométricos de área y perímetro. Reconoce e identifica los polinomios y los relaciona con objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.	Dificultad para relacionar representaciones simbólicas con el área de regiones rectangulares y su perímetro.	Representa, generaliza, y relaciona formas de representación gráficas con polinomios y sus operaciones mediante el uso de material manipulativo y concreto.
Aplicar las propiedades de las operaciones de adición, sustracción y	Hay desconocimiento de algunas de las propiedades básicas para las	Reconocen las reglas o propiedades entre las operaciones como

multiplicación de polinomios. Aplica las propiedades de las operaciones en contextos aditivos y multiplicativos con polinomios algebraicos.	operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios. (Conmutativa, asociativa, distributiva).	actividad cognoscitiva fundamental.
Realizar operaciones, relacionando las formas de representación. Realiza operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios relacionando las diferentes formas de representación: FRVG, FRVL y FRS.	Dificultad para realizar operaciones básicas entre polinomios: confusión en procesos de simplificación de términos semejantes y en multiplicación de monomios y polinomios. Hay mayor facilidad para identificar operaciones en FRVG que en otras formas de representación.	Se supera la simple manipulación de expresiones, hay énfasis en los procesos simbólicos y razonamiento sobre las operaciones. La visualización está presente en los procesos de transición entre diferentes formas de representación de los objetos matemáticos y juega un papel preponderante en situaciones de acción.
Argumentación y relación entre la FRVL y las demás formas de representación. Utiliza su lengua materna (LSC) para justificar la	Desconocimiento o inexistencia de algunas señas en LSC para representar conceptos básicos de la teoría de polinomios.	Reconocimiento de señas de la LSC, necesarias para el trabajo con polinomios, creación de las señas inexistentes.

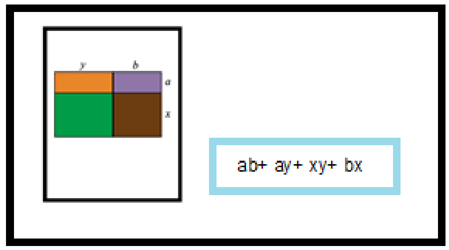
relación que existe entre los conceptos desde sus diferentes formas de representación.	Ausencia de argumentos escritos. Existe poca argumentación lingüística (LSC) frente a las justificaciones de los procesos matemáticos realizados en las situaciones.	Capacidades para validar algunas proposiciones, elecciones y planes de acción, haciendo uso de LSC y de lenguaje matemático.
Contextualizar el lenguaje algebraico en situaciones de área y perímetro. Resuelve problemas de aplicación con polinomios algebraicos que involucran los conceptos de área y perímetro.	Desconocimiento parcial de enunciados en algunas tareas. Dificultad para resolver problemas que se encuentran en sistemas de representación lingüística (lengua escrita).	Dificultad para comprender situaciones matemáticas aplicadas en contextos y expresadas en lengua escrita. Comprensión de algunas situaciones problema en contextos de área y perímetro que contienen representaciones gráficas.

Importancia del LSC en el desarrollo de la secuencia

Para D'Amore (2006:259) "La enseñanza es comunicación y uno de sus objetivos es favorecer el aprendizaje de los estudiantes, entonces, en primer lugar, quien comunica debe hacer que el lenguaje utilizado no sea una fuente de obstáculos para la comprensión…"; a partir de este planteamiento se puede decir que para lograr procesos de aprendizaje se deben generar en el aula ambientes de comunicación completos y diversos, donde es evidente la necesidad de códigos lingüísticos compartidos (estudiantes-docentes); en este caso, para los procesos de interacción comunicativa en el aula fue fundamental la mediación del Intérprete de Lengua de Señas Colombiana, quien sirvió de intermediario en las traducciones de las instrucciones al interior de las situaciones y de las entrevistas hechas a los estudiantes. Calderón *et al.* (2009) proponen como una de las condiciones pedagógicas que debe darse para que las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes sordos sean significativas es que los docentes responsables de su orientación académica sean proficientes en el uso de la LSC, sin embargo, en el municipio de Armenia hasta ahora está surgiendo conciencia en algunos docentes al respecto.

> En el proceso de construcción de los objetos matemáticos al interior de la secuencia didáctica, la LSC tuvo un papel preponderante, sin embargo, para llevar a cabo algunas situaciones, surgió la necesidad de crear e institucionalizar algunas señas que no se encontraron en los diccionarios pedagógicos (esta información es detallada en los análisis a priori de las sesiones). En cuanto a las situaciones, fue un elemento clave, especialmente en las de formulación, que buscan poner en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario) donde el medio debe exigir al sujeto que use una formulación para comunicar a otro sujeto. Brousseau (2007).

A continuación se describe una situación de formulación de la sesión uno, que consistió en dar un juego de tarjetas a cada estudiante, uno con representaciones simbólicas de polinomios y el otro con representaciones gráficas de los mismos. El estudiante E_1 debía elegir una tarjeta con representaciones gráficas hacer la transcripción a LSC y expresar a su compañero la expresión simbólica correspondiente; por su parte el E_2, con el mensaje recibido debía elegir la tarjeta que consideraba era la representación dada en el mensaje.



Tarjetas asociadas por E_1 y E_2 en situación de formulación, sesión uno

De otra parte, en el registro de video-grabación se pudo observar la función que tuvo la LSC como facilitador de la comunicación, y además cabe recalcar que también actuó como registro semiótico de representación, siendo mediador entre las formas de representación visual-geométrica y simbólica.

En ese juego donde se ponen en práctica los lenguajes para favorecer el aprendizaje, la construcción de los objetos matemáticos en los estudiantes sordos puede verse limitada por la falta de idoneidad en los procesos comunicativos, pues las interacciones sociales al interior del aula surgen a partir de experiencias de este tipo y facilitan los aprendizajes; al respecto D'Amore *et al.* (2013: 155) afirman que "Aprender, parece ser, por tanto una construcción sometida a la necesidad de "socializar", lo que sucede gracias obviamente a un medio comunicativo (que puede ser el lenguaje) […]".

Conclusiones

La educación para personas sordas en nuestro país se ha ido consolidando a través de la incorporación de leyes que garantizan su inclusión en las aulas regulares y del reconocimiento de esta comunidad como grupo lingüístico minoritario; bajo estas condiciones se espera que en el proceso educativo se les valore como individuos, que a pesar de las limitaciones propias de su condición, poseen grandes capacidades y potencialidades, lo que debe conllevar a la existencia de propuestas pedagógicas que atiendan esta diversidad presente en las aulas, que procuren ofrecer condiciones didácticas con igualdad de oportunidades para el aprendizaje, para garantizar la calidad del servicio educativo. En este contexto escolar inmediato el papel del docente es fundamental, debe tener sensibilización y disposición al cambio frente a estas barreras de tipo comunicativo, y reflexionar constantemente sobre sus prácticas pedagógicas, para que se cumplan las metas de aprendizaje y los estudiantes sordos puedan llevar a cabo su proyecto educativo.

Desde el punto de vista anterior, la enseñanza de las matemáticas debe tener una visión de construcción, tanto de conocimientos como de aspectos sociales y humanos que incluyan procesos de comunicación entre pares, de autorregulación, de motivación, e interacción. La actividad matemática propuesta por el docente en sus secuencias didácticas debe dejar analizar lo que el estudiante comprende y hacia dónde se le quiere llevar, evaluando constantemente estos procesos y planeando otros nuevos; de esta forma el docente diseñará un plan de trabajo basado en las capacidades y potencialidades individuales, y en las diferentes formas de acceder al conocimiento: con una ingeniería didáctica.

Los aportes de este trabajo de investigación radican en el diseño y análisis de una ingeniería didáctica para el aprendizaje de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios en estudiantes con limitación auditiva, para lo cual en la fase inicial se realizó un estudio de tres dimensiones: histórico epistemológica, didáctica y cognitiva; algunos aspectos importantes en estos tres frentes se muestran a continuación:

Dimensión Histórico-Epistemológica

Los elementos epistemológicos (aritméticos y geométricos) requeridos para la comprensión de los objetos matemáticos (adición, sustracción y multiplicación de polinomios) constituyen pre-saberes imprescindibles, ya que se relacionan entre ellos y constituyen la base de las estructuras algebraicas; de allí la definición del álgebra como generalización de la aritmética. En el recorrido histórico de los conceptos, el proceso de transición de la aritmética al álgebra demoró varios siglos en consolidarse y se muestra como una de las primeras rupturas epistemológicas que se presenta en esta evolución del pensamiento algebraico; los aportes anteriores deben generar reflexiones acerca del aprendizaje del álgebra en su etapa inicial, pues es determinante un dominio de la estructura aritmética antes de las estructuras algebraicas, para evitar que esta transición se convierta en un obstáculo de tipo epistemológico.

Por otro lado, en la evolución de los conceptos a través de la historia fue necesario el paso por diferentes registros o modos de representación, en las primeras etapas, se dejan ver formas de representación verbales y geométricas para los objetos y se observa cómo van haciendo transferencia a las representaciones más simbólicas y abstractas propias del lenguaje algebraico; de forma similar, para el aprendizaje del álgebra se requiere del uso de diferentes registros semióticos.

Dimensión Didáctica

En esta dimensión se realizó el análisis de aspectos importantes en la enseñanza del álgebra a nivel local; para ello se llevaron a cabo algunas actividades como: la revisión de los textos escolares más utilizados en las instituciones de Armenia en los últimos diez años para la enseñanza del álgebra, encuestas a docentes, revisión de tesis sobre enseñanza del álgebra, recomendaciones para la didáctica del álgebra, y la revisión de los Lineamientos Curriculares y los Estándares de Matemáticas. Los aspectos importantes a resaltar tienen que ver con el uso de textos donde se establecen procesos tradicionales de enseñanza de los conceptos, puesto que en algunos de ellos no se tiene en cuenta el uso y la transición entre diferentes registros semióticos, y mucho menos el de la LSC (lengua de señas colombiana); toda vez que las editoriales no están interesadas en realizar textos para grupos minoritarios, por lo que se convierte en papel del maestro interesarse por diseñar sus propias secuencias didácticas para que respondan a las necesidades de estos estudiantes. ”La primera acción que requiere una buena didáctica por parte del profesor es el conocimiento de los alumnos, en la medida que este conozca a cada uno de ellos podrá intervenir mejor en su aprendizaje”. (Palarea et al. 1994: 97).

De otro lado, en la didáctica utilizada en las clases por los docentes para la enseñanza del álgebra, se encontró que las formas de representación más usadas son la FRVG (Forma de representación visual geométrica) y FRS (forma de representación simbólica), pero falta aún generar más procesos cognitivos donde se establezcan relaciones entre ellas, e involucrar registros de tipo verbal y lingüístico en el caso de los estudiantes sordos.

Finalmente, es de resaltar la importancia del tipo de entrada al álgebra que se debe implementar en las secuencias didácticas, pues el estudiante aprendiz debe enfrentarse a situaciones que le permitan construir los significados de las letras y símbolos con los que se encontrará más adelante; en esa etapa inicial deben tener lugar los procesos de generalización de la aritmética y una de las formas que podría ser significativa para los sordos tiene que ver con los contextos geométricos, ya que estos representan recursos donde se privilegian las experiencias de tipo visual.

Dimensión Cognitiva

En cuanto a la limitación auditiva y el aprendizaje de las matemáticas se revisaron algunos aportes de investigaciones a nivel nacional e internacional, se realizó un análisis de situaciones a-didácticas aplicadas a estudiantes sordos, y se revisaron los referentes legales donde se establecen las recomendaciones para el trabajo pedagógico con esta comunidad, encontrando relevancia en diferentes aspectos.

Algunos de estos aspectos indican que el estudiante sordo (que no presenta otros factores patológicos) posee la inteligencia básica normal en comparación con sus pares oyentes, la diferencia radica en que la adquisición de los conceptos se va haciendo más lenta a medida que el contenido lingüístico se va haciendo más exigente, puesto que generalmente la comprensión de los objetos está mediada por el dominio de una lengua oral o escrita (que no es su lengua natural); de este modo el aprendizaje del niño sordo está determinado por una serie de interacciones comunicativas cotidianas con el entorno, estas deben contener experiencias significativas, que potencien los recursos visuales y formas diversas de lenguaje, para que estos estudiantes puedan empezar a adquirir estructuras y esquemas mentales que le permitan adquirir y asimilar mejor el conocimiento.

Los análisis anteriores permitieron establecer algunas categorías para la comprensión de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios en estudiantes sordos; al respecto, se planearon y colocaron en práctica situaciones a-didácticas y didácticas de acción, formulación y validación, y también se analizaron desde cada nivel categorial. Los estudiantes que hicieron parte de este trabajo de investigación mostraron cambios en sus desempeños en cuanto a la realización de tareas (a-didácticas y didácticas) dentro del marco de estas categorías; el carácter de la ingeniería permite que surjan validaciones al interior de la secuencia didáctica, algunas de estas se resumen a continuación:

- Se logró el reconocimiento del concepto de polinomio desde diferentes formas de representación, empezando por las de tipo visual- geométrico hasta llegar a las de tipo formal.

- Los estudiantes interactuaron con las diversas formas de representación de las operaciones entre polinomios (FRVG, FRVL y FRS), de tal forma que las operaciones de adición, sustracción y multiplicación fueron adquiriendo mayor significado.

- El reconocimiento de la propiedad distributiva desde su representación geométrica, constituyó un paso fundamental para consolidar procesos de multiplicación entre polinomios.

- Involucrar la LSC como forma de representación verbal-lingüística, fue fundamental en el momento de interactuar con las situaciones, los estudiantes mostraron avances en las formas de argumentación para justificar sus procedimientos.

- En las tareas donde los enunciados en lengua escrita eran densos, o tenían palabras desconocidas, los estudiantes necesitaron de un trabajo detenido con la docente y el intérprete de LSC, para lograr su comprensión, esto se debe a falta de dominio de estos de la lengua escrita; por otro lado, en tareas con enunciados en contextos geométricos (mediados o no por gráficas), que contenían conceptos matemáticos conocidos, se facilitó la realización de las mismas.

- El uso y articulación de tres sistemas de registro: gráfico, simbólico y lingüístico-verbal en las secuencias de enseñanza, teniendo como base las situaciones de acción, donde los estudiantes debían actuar sobre un medio (formas de representación visual: material concreto), y posteriormente en situaciones de formulación donde debían relacionarlas las formas de representación verbal-lingüística y simbólica, facilitaron las conversiones entre el lenguaje natural y el algebraico.

- Es posible lograr el aprendizaje de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación en estudiantes con limitación auditiva, por medio de secuencias didácticas planeadas de acuerdo a sus necesidades y particularidades, donde se haga uso de recursos visuales y materiales manipulables, los cuales juegan un papel fundamental porque permiten realizar procesos que potencian la construcción de representaciones mentales.

- Entre los errores más comunes que presentaron los estudiantes sordos al realizar las operaciones están: los derivados de la incorrecta interpretación de la aritmética (mal uso de paréntesis, operaciones con enteros, mal uso de las propiedades de las operaciones); cabe anotar que ya otros autores han caracterizado estos errores en estudiantes oyentes, por lo que no se puede decir que corresponden a obstáculos debidos a su condición; al respecto, es importante recalcar que los estudiantes presentaron dificultades en tareas de tipo aplicación, que requerían de dominio o comprensión de la lengua escrita.

Finalmente, se hace referencia a aspectos cognitivos y didácticos que surgieron a partir del análisis de datos y que fueron puntos de reflexión en la presente investigación, los que constituyen aportes para futuras intervenciones en el campo, o recomendaciones para tener en cuenta en el trabajo algebraico con estudiantes sordos:

- La influencia de los recursos manipulables y visuales como *bloques de Diénes, la caja de polinomios, juegos con tarjetas y fichas;* permitieron la construcción de imágenes mentales adecuadas de los objetos matemáticos, y por lo tanto se pudo lograr un mayor significado para los mismos. Hernàndez *et al.* (2008) afirman al respecto que los materiales didácticos cuando son utilizados como representaciones semióticas de los objetos matemáticos, juegan un papel importante en la enseñanza del álgebra y facilitan la comprensión del objeto matemático.

- El uso de tres sistemas de representación (FRS; FRVG y FRVL), constituyó gran riqueza en la construcción de los conceptos algebraicos en estudio, en el caso de los sordos, se empezó por dar a conocer el significado del concepto, primero desde su forma de representación visual-geométrica y desde allí, se realizaron procesos de transición hacia las otras dos.

- La lengua materna tiene gran relevancia en los procesos cognitivos, las secuencias de enseñanza para estudiantes con limitación auditiva deben contener un amplio vocabulario de señas previendo los objetos matemáticos emergentes o variables que se puedan presentar.

- Incluir entre las formas de representación (FRVL), la lengua escrita y la lengua de señas, contribuyó notablemente a generar un ambiente más comunicativo y a que los estudiantes mejoraran su discurso en lo que tiene que ver con procesos.

- Es necesario que el docente analice a priori las tareas que va a proponer en sus secuencias didácticas, para determinar su pertinencia o no de acuerdo a las necesidades y potencialidades de la población sorda, se debe tener en cuenta que en algunos sordos, la adquisición tardía de la lengua materna tiene como consecuencia que presenten dificultades para la comprensión de los conceptos, lo que hace más lento el proceso de aprendizaje.

- La teoría de situaciones didácticas como marco de referencia de la investigación, fue preponderante, gracias a que permitió por medio de las sesiones promover la acción sobre los medios (problema, contexto o material), y asumir retos creando la posibilidad de generar desarrollos cognitivos en los que el uso de diversas formas de representación de los conceptos (entre ellas su lengua materna) tuvo gran influencia en la construcción de los significados de los conceptos.

- La motivación que mostraron los estudiantes durante el desarrollo de este proyecto de investigación fue muy gratificante, ellos vieron en él la posibilidad de mejorar las condiciones didácticas de las futuras generaciones de su institución.

Referencias Bibliográficas

Abrate, R.; Pochulu, J. Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Argentina: Universidad de Villa María.

Alagia, H.; Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Teoría para la educación matemática.* Argentina: Libros del Zorzal.

Alba M.; Giraldo, V.; Gutiérrez H.; Hoyos, E. y Wagner, G. (2012). *El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables.* Universidad del Quindío.

Ardila, V. (2003). *Inteligencia lógico matemática 8*. Bogotá: Ed. Voluntad.

Artigue, M.; Douady, R.; Gómez, P. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Ávila, P. y García, M. (1996). *La adquisición de los conceptos lógico-matemáticos en el niño sordo.* Fundación: Dialnet. ISSN 0212.3096. Recuperado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2345498

Baldor, A. (1983). *Algebra de Baldor.* España: Ed. Mediterráneo.

Ballén, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de* segundo grado. [Tesis, Universidad Nacional de Colombia]. Recuperado en: http://www.bdigital.unal.edu.co/8063/

Barnet, R. y Kearns, T. (1993). *Matemáticas octavo grado.* Bogotá: Ed. McGraw-Hill.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. España: Editorial la muralla.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoria de las situaciones didácticas.* (Diilma Fregona, trad.). Argentina: Libros del Zorzal.

Calderón, D.; León, O. y Orjuela, M. (2009). *La relación lenguaje-matemáticas en la didáctica de los sistemas de numeración: aplicaciones en población sorda.* Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Calderón, D. y León, O. (2012*). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso del aula.* Lenguaje y Educación: perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio. Libros de los énfasis del doctorado interinstitucional en educación. [Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá].

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica.* AIQUE. Grupo editor.

D'Amore, B.; Fandiño, M. y Lori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Ed. Magisterio.

D'Amore, B. ; Fandiño, M. y Godino, J. (2008). *Competencias matemáticas*. Bogotá: Ed. Magisterio.

D`Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro.* Madrid: Santillana. Ediciones UNESCO.

Dimaté, M. (2000). *Matemáticas 8.* Bogotá: Ed. Prentice Hall.

Escobar, H. y Valdive, C. (2011). Estudio de los polinomios en contexto. Paradigma *(32)-2:* 85-106. (ISSN 1011-2251). Recuperado en: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512011000200007&lng=es&nrm=iso

Esquinas, A. (2008). "*Dificultades en el aprendizaje del lenguaje algebraico: Del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente".* [Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España].

Filloy, Y. y Kieran, C. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Investigación y experiencias didácticas*. [University of London, Institute of Education, Inglaterra.] Traducción de Luis Puig.

Font, V. y Godino, J. (2003*). Razonamiento Algebraico y su didáctica para Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática*. [Tesis, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada, España].

Fernández, E. y Mejía, M. (2010). *Análisis de Textos Escolares para el Diseño de Situaciones de Enseñanza.* Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño. [Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa 2010].

Gaona, M. y Montañez, S. (2006). *Diseño de investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas en niños sordos*. [Tesis, Universidad Francisco José de Caldas, Colombia].

González, M. (2005). *La Generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje.* [Tesis Doctoral. Universidad de la laguna. España].

González, J. y Larrubia, J. (2006). *Aprendizaje matemático en alumnado sordo integrado en aulas ordinarias de E.S.O y bachillerato*. [Departamento de didáctica de las matemáticas en la Universidad de Málaga, España].

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y Actividades para enseñar Algebra.* [Alonso, F.; Barbero, C.; Fuentes, I.; Azcárate, A. G.; Dozagarat, J. M. G.; Gutiérrez, S.; Ortiz, M. A.; Rivière, V. y Da Veiga, C.]. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Guilombo, D. y Hernández, L. (2011*). La relevancia del lenguaje en el desarrollo de nociones matemáticas en la educación de los niños sordos*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2289/957

Hernández, J.; Muñoz, M.; Palarea, M.; Ruano, R. y Socas, M. (2008). *Materiales manipulativos para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación obligatoria*. Universidad de la Laguna, España.

Lozano, J.; Naranjo, C. y Soto, F. (2009). *Aprendizaje del álgebra en grupos con discapacidad auditiva utilizando la caja de polinomios. Sigma. IX*: 38-60. Pasto: Departamento de matemáticas de la Universidad de Nariño.

Malisani, E. (1999). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica.* Revista IRICE. Argentina: Instituto Rosario de investigaciones en Ciencias de la Educación. ISSN. 0327-392X.

Márquez, H. (2011). *Orientaciones para el diseño de situaciones didácticas en matemáticas a estudiantes sordos.* Ministerio de Educación Nacional- Instituto Nacional para sordos. INSOR.

Ministerio de Educación Nacional- MEN. *Decreto N. 366 de 9 de febrero de 2009*.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, ciencias y Ciudadanas. MEN.*

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Orientaciones pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con limitación auditiva. MEN.*

Ministerio de Educación Nacional- MEN. (2005). *Lineamientos de política para la atención educativa a poblaciones vulnerables.* Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares para el área de Matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio.

Moreno, C. y Nunes, T. (2002). *An intervention program for promoting deaf pupils` Achievement in Mathematics. Oxford Brookes University. Royal Holloway, University of London.* Oxford Journals. Vol. 7.

Neira, G. (2010). *Algunas dificultades en la transición del álgebra escolar al cálculo diferencial.* IX Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística-ENEMES.

Oviedo, A. (2001). *Apuntes para una gramática de lengua de señas colombiana*. Colombia: Universidad del Valle- INSOR.

Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas, cuestiones, teoría y práctica en el aula.* España: Editorial Ediciones Morata, S.L.

Padilla, L. (1999). *Aventura matemática 8.* Bogotá: Ed. Norma.

Palarea, M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. Didáctica de las Matemáticas.* NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas. *(40):*3-28. Recuperado en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/40/Articulo01.pdf

Palarea, M. y Socas M. (1994). *Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico*. Revista SUMA. [Universidad de la Laguna, España]. Recuperado de: http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf

Panizza, M. (2011). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.* Recuperado en: http://uruguayeduca.edu.uy/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=211522

Rincón, M. (2010). *Hipertexto 8.*Bogotá: Ed. Santillana.

Rodríguez, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Universidad de Granada, España.

Rojas, P. (2010). Memorias 11 Encuentro Colombiano de Matemática educativa. *Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el trabajo en el aula*. Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ruíz, J. Santacruz, M. (2010). *Una secuencia didáctica desde la orquestación instrumental: la función cuadrática en grado Noveno de Educación Básica.*

Instituto de Educación y pedagogía. Universidad del Valle. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/1133/1/582_Una_Secuencia_Didctica_desde_la_Orquestacin_Asocolme2010.pdf

Serrano, C. (1995). *Estudio de la resolución de problemas aritméticos de combinación en alumnos sordos.* España. Departamento de psicología de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Skliar, C. (2008). *¿Incluir las diferencias? Sobre un problema mal planteado y una realidad insoportable.* Orientación y sociedad, la Plata, *(8).*

Stewart , J. Lothar, R. y Saleem, W. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* (5 Ed.). (s.d.). International thomsom editores.

Tovar, L. (2001). *La importancia del estudio de las lenguas de señas*. Revista Lenguaje Nº 28. Colombia: Universidad del valle.

Trujillo, P. (2008). *Proceso de generalización que realizan futuros maestros.* [Tesis de maestria, Universidad de Granada]. España.

Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of school Algebra ando uses of variables,* en Coxfors A.F. The ideas of Algebra K-12 Yearbook. Reston. Virginia.

Anexo 1

Secuencia didáctica para el aprendizaje de los conceptos de adición, sustracción y multiplicación de polinomios en estudiantes con limitación auditiva, bajo el marco de la TSD (Procesos)

ETAPA UNO
Establecimiento de conceptos previos.

Situaciones de Acción
Actuar sobre un medio concreto que posibilite reconocer y establecer conceptos previos para la consolidación de los objetos algebraicos.

Situaciones de formulación
Lograr la consolidación de los conceptos previos haciendo uso de representaciones en lengua escrita, lenguaje matemático y LSC.

(OBJETOS MATEMÁTICOS PREVIOS)
Noción de área y perímetro
Dominio de operaciones y propiedades básicas en el conjunto de los enteros.

Situaciones de validación
El estudiante debe poner en práctica el conocimiento previo adquirido y necesario para la consolidación de los conceptos.

ETAPA DOS
Reconocimiento e interpretación de los objetos Matemáticos emergentes.

Situaciones de Acción
Construcción de los significados de los objetos matemáticos emergentes, haciendo uso de la manipulación y visualización de sus representaciones geométricas.

Situaciones de formulación
Comunicación y contextualización del lenguaje algebraico como objeto geométrico en contextos de área y perímetro.
Relación entre las tres formas de representación FRS; FRVG Y FRVG para un mismo objeto matemático.

OME (OBJETOS MATEMÁTICOS EMERGENTES)
Variable, constante
Polinomio, clasificación, orden, grado, opuesto de un polinomio,
Términos semejantes.

Situaciones de validación
Uso de la LSC y del lenguaje simbólico para hacer conjeturas que permitan justificar la elección de los procesos matemáticos.

ETAPA TRES
Interiorización de los procesos necesarios para realizar las operaciones entre polinomios en contextos aditivos y multiplicativos.

Situaciones de Acción
Interpretación del significado de las operaciones haciendo uso de las tres formas de representación FRVL; FRS y FRVG, partiendo de las representaciones de tipo visual.

Situaciones de formulación
Relación entre las diferentes formas de representación para realizar las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

(OBJETOS MATEMÁTICOS EMERGENTES)
Uso de propiedades.
Operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

Situaciones de validación
Formulación y validación de proposiciones (en forma simbólica, gráfica o de lenguaje natural) para justificar el uso de un procedimiento.