4

# ANGULOS

En topografía principalmente en el área de Planimetría, es muy importante la medición y el trabajo con ángulos, ya que es uno de los elementos que nos permite dar la posición de un punto en el espacio.

Los ángulos pueden ser clasificados como: ángulos de plano horizontal y de plano vertical

Entre los ángulos de plano horizontal:

Azimut (Az) Contra-Azimut (CAz)
Rumbo(R) Contra-Rumbo (CR)
Angulo horizontal (Ah) Angulo contrahorario (ACh)
Deflexión (D)

Ángulos de plano vertical

Cenital Nadiral Origen en el Horizonte

# Tipos de ángulos

## *4.1 Ángulos Horizontales*

### *4.1.1 Azimut (Az)*

Es el ángulo horizontal medido en sentido de las manecillas del reloj a parir de la norte
Los Azimut pueden ser Verdaderos, Magnéticos o Supuestos. La NS verdadera o geográfica es paralela al eje de rotación de la tierra. La NS magnética es dada por la aguja de la brújula, y la norte sur asumida es una dirección cualquiera tomada como referencia.

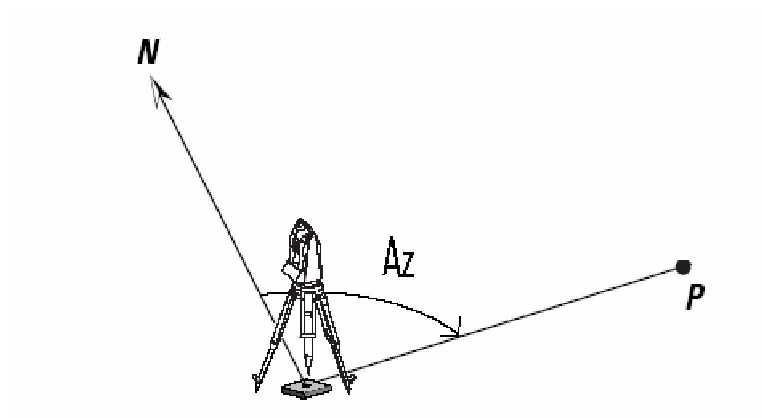



***Figura 1***

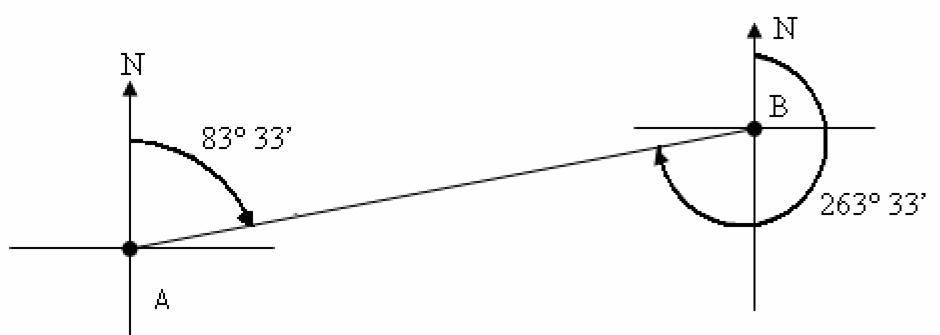



***Figura 2***

Az  (AB) = 83° 33'

El Az (BA) = Az (AB)  + 180° =  83° 33' + 180° = 263° 33'

***NOTA:*** *Ningún Azimut puede ser negativo, lo volvemos positivo sumándole 360°.*

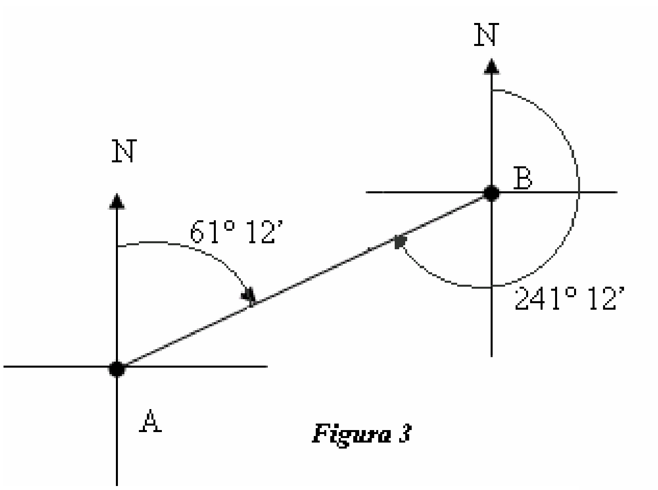



***Figura 3***

El Az (BA) = 241° 12'
El Az(AB) = Az(BA) - 180° =
El Az(AB) = 241° 12' - 180° = 61° 12'

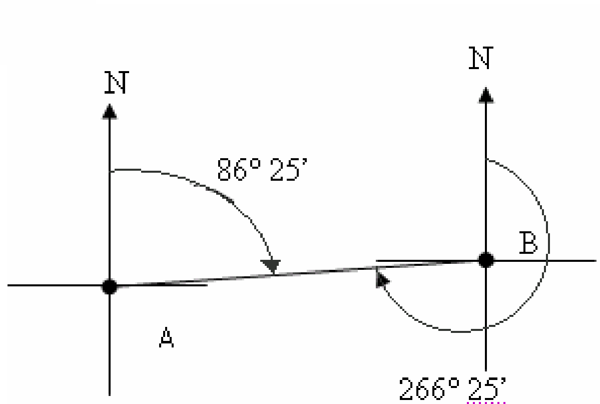



***Figura 4***

El Az(AB) = 86° 25'
El Az(BA) = Az(AB)  + 180° =
El Az(BA) = 86° 25' + 180° = 266° 25'

### *4.1.2 Rumbos (R)*

Los rumbos representan un sistema para designar las direcciones de las líneas. El rumbo de una línea es el ángulo horizontal agudo medido entre la línea Norte-Sur de referencia hacia el Este o el Oeste.

Al igual que el azimut, el rumbo puede ser geográfico, magnético o asumido. Los angulos de este tipo se notan con las letras, N o S indicando el origen desde el cual se mide, un numero que indica la magnitud del ángulo y la letra E o W que indica el sentido en que se mido el ángulo, esta es la forma convencional como se indica el cuadrante en que esta ubicado el ángulo.

Existen cuatro casos especiales para la nomenclatura de los rumbos que son:

R (AB): N 00° E = R: N 00° W = R (AB): N
R (AB): S 00° E = R: S 00° W = R (AB): S
R (AB) N 90° E = S 90° E = R (AB): E
R (AB): N 90° W = R: S 90° W = R (AB): W

Para obtener el contra rumbo de una línea, solo es necesario intercambiar las letras N por S y E por W o viceversa, sin modificar para nada la magnitud del ángulo.
El rumbo OA es N60°E, el rumbo OB es S29°E, el rumbo es S55°W, el rumbo OD es N32°W.

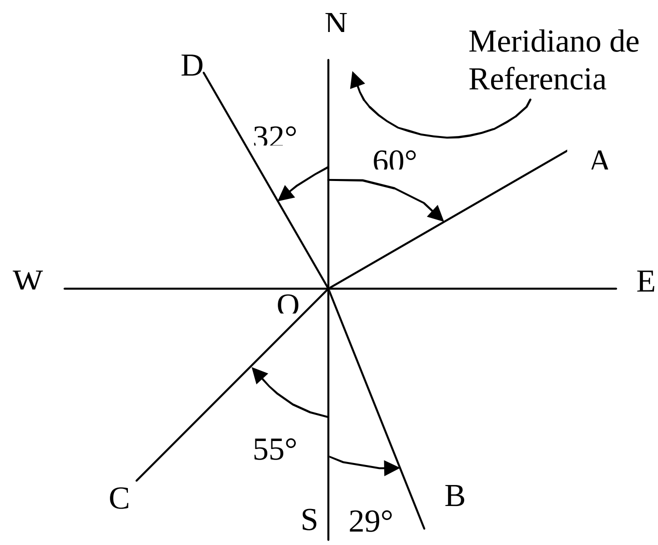



***Figura 5***

### *4.1.3 Ángulo Horario (Ah)*

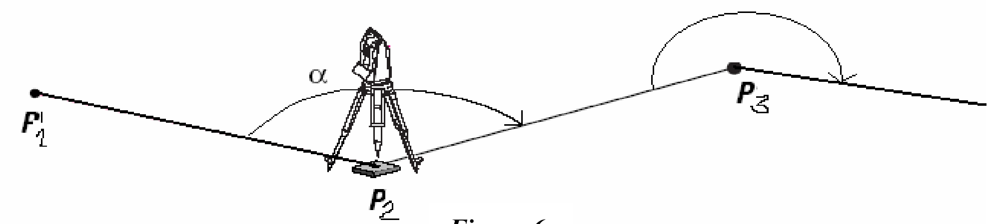



***Figura 6***

Como su nombre lo indica es el ángulo medido en la dirección a las manecillas del reloj. Varía de 0° a 360° y puede ser ángulo exterior o ángulo interior. Si se hace referencia a un polígono.

Ángulo Interno

Ángulo Externo

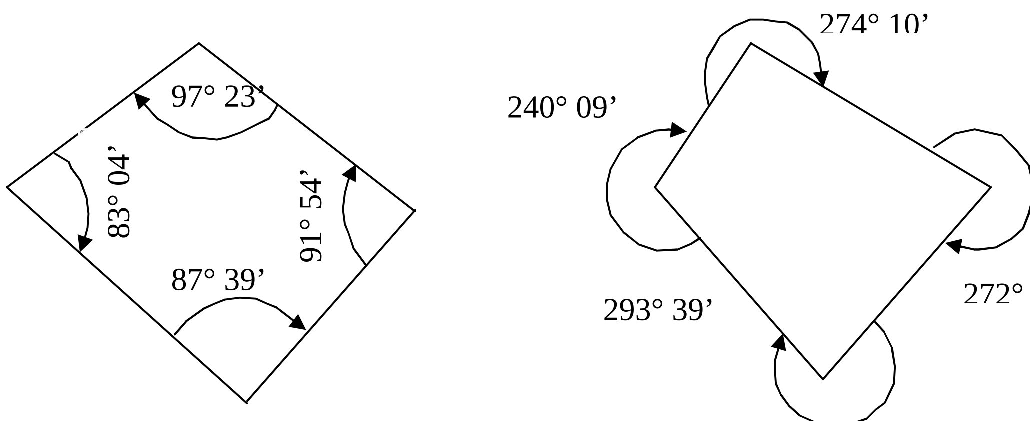



***Figura 7***

Un ángulo interior son los ángulos que quedan dentro de un polígono cerrado. Puede efectuarse una verificación de los valores obtenidos, (revisar capitulo del preámbulo parte de polígonos)

Un ángulo exterior son los ángulos que quedan por fuera de un polígono cerrado, son los explementarios de los ángulos interiores. Este ángulo también tiene verificación, (revisar capitulo del preámbulo tema polígonos)

### *4.1.4 Ángulo Contra-Horario (ACh)*

Como su nombre lo indica es el ángulo medido en la dirección opuesta a las manecillas del reloj. Varía de 0° a 360° y puede ser ángulo exterior o ángulo interior.

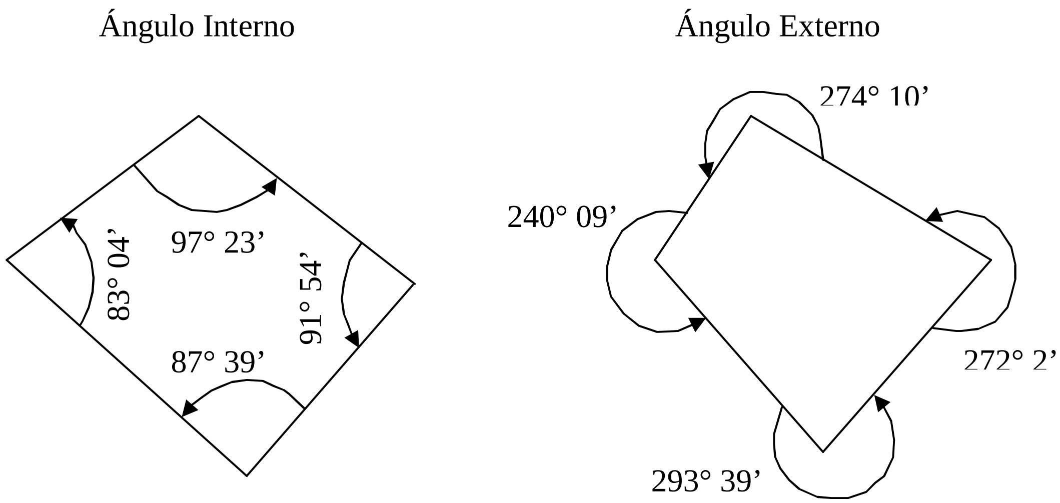



***Figura 8***

### *4.1.5 Deflexiones*

Es el ángulo que forman en un vértice la prolongación del lado anterior y el lado siguiente. Se miden ya sea hacia la derecha (el sentido de las manecillas y se considera positivo) o hacia la izquierda (sentido opuesto de las manecillas, considerado como negativo). Los ángulos de deflexión son siempre menores de un ángulo llano y el sentido del giro se define anexando una D o una I al valor numérico.

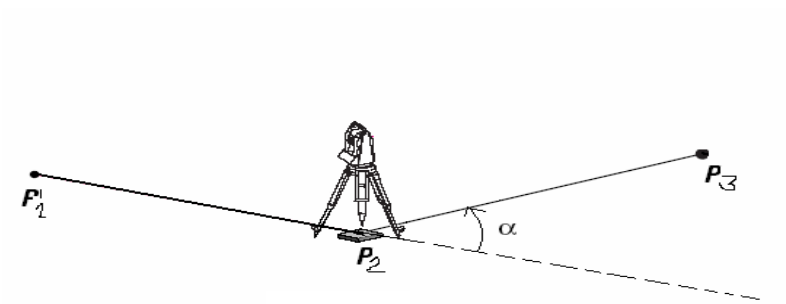



***Figura 9***

Este sistema es especialmente adecuado para polígonos abiertos como los que se emplean en estudios de vías de comunicación.

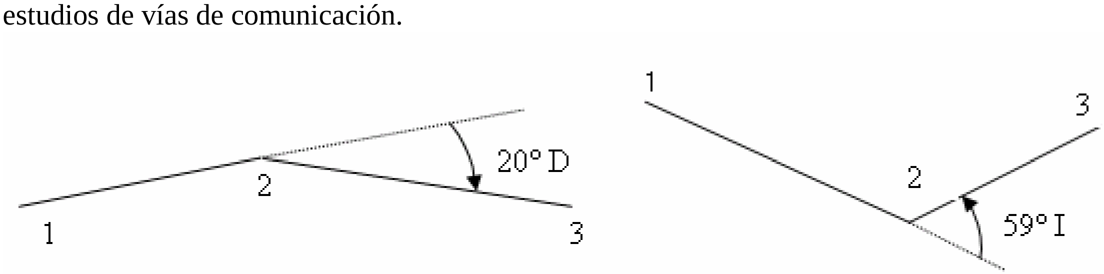



***Figura 10***

Las deflexiones también tienen comprobación angular, la sumatoria algebraica (Σ) de las deflexiones debe ser igual a 360°. Para realizar operaciones con ángulo de deflexión se recomienda que todas se consideren derechas, así por ejemplo, una deflexión izquierda de 60° corresponde a una derecha de 300°.

## *4.2 Relaciones entre ángulos*

### *Introducción*

En los trabajos que realiza un topógrafo en el campo casi siempre se trabaja determinado Azimutes o rumbos, pero a la hora del trabajo de oficina puede ser necesario otro tipo de ángulos para presentar la información que se obtuvo en el campo, por esta razón es de vital importancia conocer las relaciones que existen entre los diversos tipos de ángulos empleados en topografía.

### *4.2.1 Azimut y contra-azimut*

El contra –azimut de una línea es igual al azimut de la misma línea tomada en el sentido contrario o tomada desde el otro extremo.

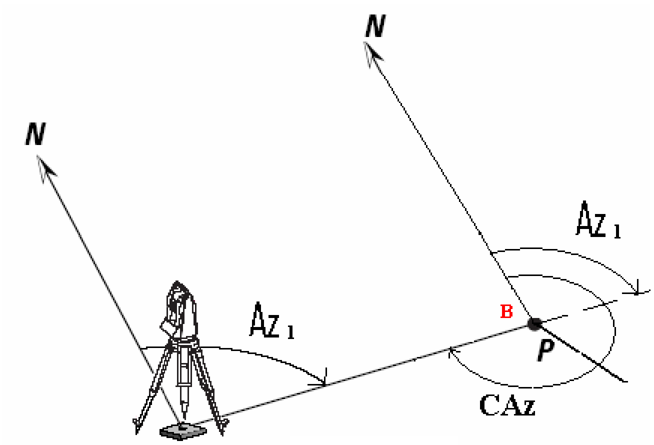



*Figura 11*

El contra- azimut de una línea obedece a la siguiente ecuación.
CAz (AB) = Az (BA) + 180°, si pasa de 360º se le resta 360°

Ejemplo:

Teniendo el Az de la línea (1,2) igual a 140º, hallar su respectivo CAz.

CAz (AB) = Az (BA) + 180°

$CAz = 140° + 180° = 220°$

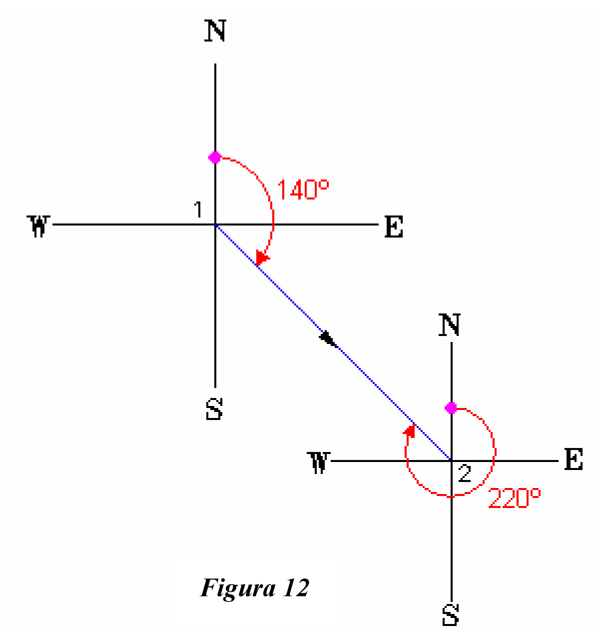



*Figura 12*

### *4.2.2 Relación Azimut - Rumbo*

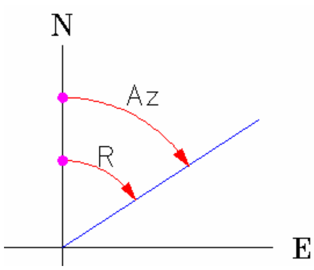



***Figura 13. Extraído Apuntes Planimetría. Julián Garzón***

En el primer cuadrante el Az es igual al rumbo, así pues que si tenemos un Az de 70º, el rumbo de dicha línea es igual a N 70° E.

En el segundo cuadrante o en el cuadrante SE , el azimut arranca desde la norte quedando entre 90° y 180° a diferencia de el rumbo que es medido a partir del sur por lo tanto el rumbo en este cuadrante queda definido por la siguiente formula:

$$R = 180° - Az$$

En el tercer cuadrante el azimut arranca desde la norte quedando entre 180° y 270°, el rumbo queda definido por ***R=AZ-180°***, debido a que el rumbo arranca desde el Sur al oeste.

Para el cuarto cuadrante se emplea la siguiente formula: ***R=360°-AZ***

*Ejemplo:*

*Determinar el rumbo de la línea (A,B) si el azimut de estas es de 240°

R/ Como el azimut esta en el tercer cuadrante debemos aplicar

***R=AZ-180° => R (A,B) = 240°-180° = 60° =>R= S 60° W***

* Determine el rumbo de una línea que posee un azimut de 50°

R/ como el azimut esta ubicado entre 0º y 90º, entonces R= AZ

$Az = 50° \quad \Rightarrow \quad R = N\ 50º\ E$

* Determine el rumbo de una línea que posee un azimut de 320°

R/ como el azimut esta ubicado entre 270º y 360º, entonces R= 360º - Az

$R = 360º - Az \quad \Rightarrow \quad R = 360º - 320º = 40º \quad \Rightarrow \quad R = N\ 40º\ W$

### *4.2.3 Relación rumbo- azimut*

Como la relación rumbo – azimut es basada en el mismo principio anterior, tenemos que:

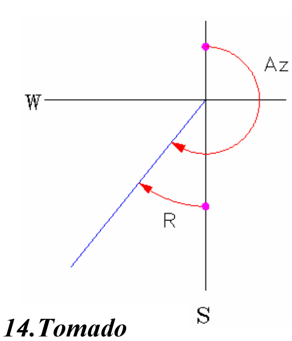



***Figura 14.Tomado Apuntes Planimetría. Julián Garzón***

*Calcule el azimut de una línea que tiene un rumbo de N 40° W

***R= 360°-AZ => AZ= 360° - R => AZ = 360° - 40° = 320°***

*Calcule el azimut de una línea que tiene un rumbo de S 05° E

***R= 180º - Az => AZ=180° - R => AZ = 180° - 05° = 175° ⇒ Az = 175º***

Con éste mismo fin podemos emplear la siguiente formula que tiene las característica de ser mucho mas practica.

$$Az = \frac{entQ}{2} \times \cos R + (Q \times 180)$$ [1]

*Q =Cuadrante*

*R = Rumbo*

## *4.2.4 Relación Azimut – Deflexiones*

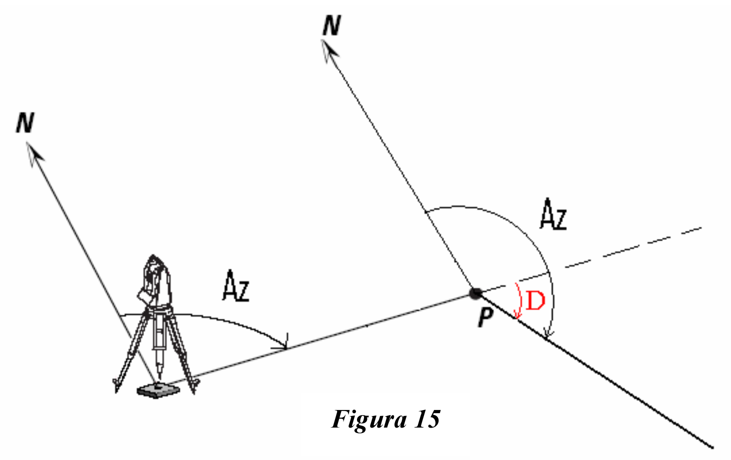



*Figura 15*

Para el cálculo de las deflexiones podemos colocar los azimutes en un orden secuencial y aplicar la siguiente formula:

D = Azs –Aza

DONDE:

Azs = Azimut siguiente
Aza =Azimut anterior
DD =Deflexión derecha

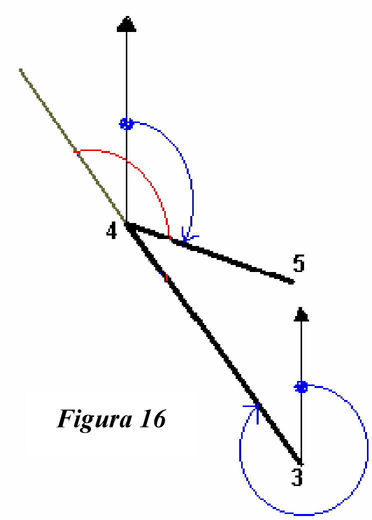



*Figura 16*

Ejemplo:

Halle la deflexión correspondiente para: Az(3, 4) = 330°, Az(4, 5) = 120°

D = 120° - 330° => D = 210º I como las deflexiones no son mayores a 180º, entonces a 360º le restamos D.

$D_4$ = 360º - 210º = 150º D

[1] Tomado. Topografía Analítica.1ª Edición. Gonzalo Jiménez Cleves, Gilberto Gómez Gómez.

*Ejercicios Propuestos*

- Hallar la Deflexión en el punto 8, si el Az (7,8) es de 50° y el Az (8,9) es de 100°. ***Respuesta : 50° D***
- Hallar la Deflexión en el punto 7, si el Az (6,7) es de 20° y el Az (7,8) es de 350°. ***Respuesta : 30° I***
- Hallar la Deflexión en el punto 24, si el Azimut 22,23 es de 30° y el Az (23,24) es de 350°. ***Respuesta : No se puede realizar***

## *4.2.5 Relación Deflexión – Azimut*

Cuando a diferencia se requiere calcular el azimut siguiente, teniendo los datos de azimut anterior y la deflexión del punto común a las dos líneas, basta con sumarle dicha deflexión al azimut anterior y tendremos el azimut siguiente.

***Azs = Aza + D***

1. Ejemplo

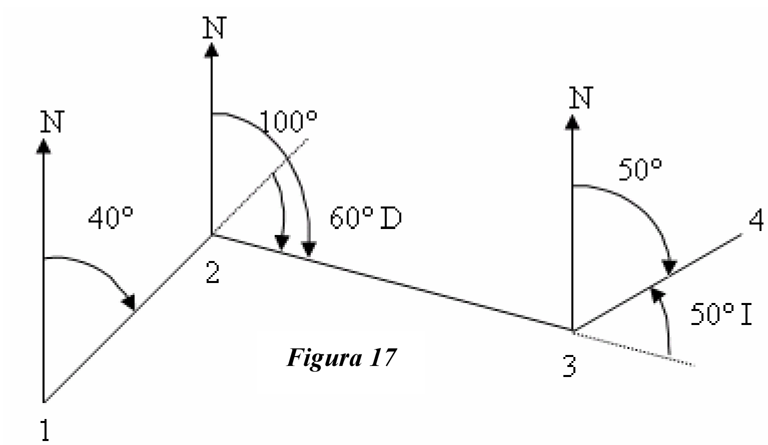



***Figura 17***

Az1,2 = 40°
Deflexión en 2 = 60° D
Az (2,3) = ?
Deflexión en 3 = 50° I
Az (3,4) = ?

**Az sig = ( Az Ant $\pm$ Deflexión )**

- Cuando la Deflexión es derecha utilizamos ( + ).
- Cuando la Deflexión es izquierda utilizamos ( - ).

Az Sig (2,3) = 40° + 60° $\Rightarrow$ Az (2,3) = 100°
Az Sig (3,4) = 100° - 50° $\Rightarrow$ Az (3,4) = 50°

2. Ejemplo

Az (7,8) = 30°
Deflexión en 8 = 140° I
Az 8,9 = ?
Az Sig (8,9) = 30° - 140° = -110° $\Rightarrow$ -110° + 360° $\Rightarrow$ Az 8,9 = 250°

Como se observa en el ejemplo anterior la deflexión es mayor que el azimut anterior, por lo tanto en la ecuación, fue necesario sumarle un giro completo (360°) al azimut siguiente, esto para volverlo positivo.

*Ejercicios Propuestos*

- Hallar el Az (8,9); sabiendo que el Az (7,8) es 200° y la Deflexión en 8 es de 50° D. ***Respuesta : 250°***
- Hallar el Az (19,20); Sabiendo que el Azimut (18,19) es de 70° y la Deflexión en 19 es 50° I. ***Respuesta : 20°***
- Hallar el Az de la línea (1,2); sabiendo que la Deflexión en 2 es de 73° 18' y el Az (2,3) es 238° 43'. ***Respuesta : 165° 25'***

## *4.2.6 Ángulo horario – deflexión*

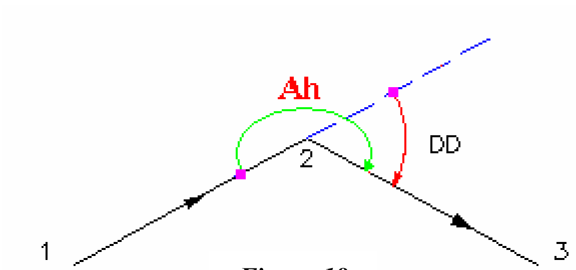



***Figura 18***

La relación entre el ángulo horario y la deflexión está dada por la siguiente formula:

$$\mathbf{D = Ah - 180^o}$$

Ejemplo:

Basados en el grafico anterior se tiene que el Ah es igual a 250º calcular la deflexión en dicho punto.

$\mathbf{D_2 = 250^o - 180^o = 70^o}$

### *4.2.7 Ángulo Horario – Deflexión – Azimut*

1. Ejemplo

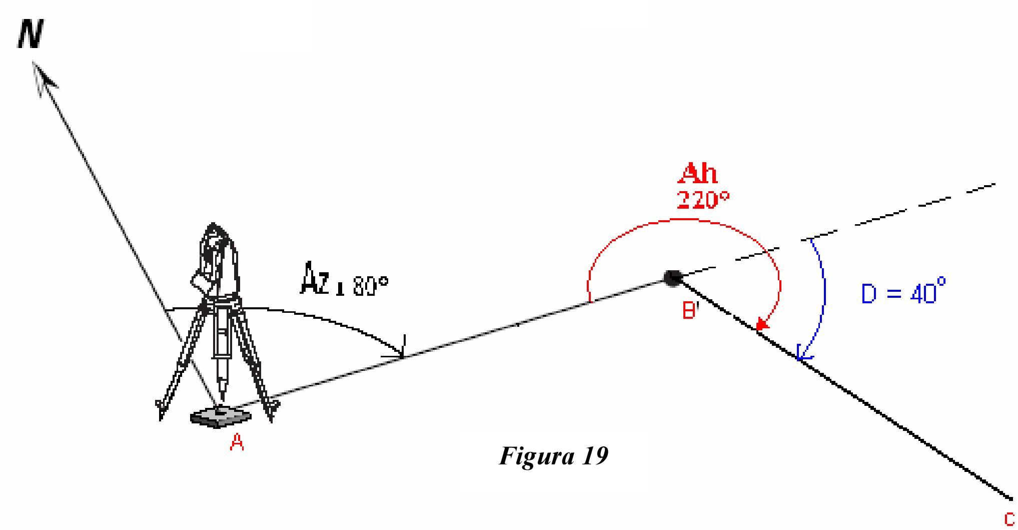



*Figura 19*

Az (A,B) = 80°
Ah en B = 220°
Az (B,C) = ?

- ❖ Cuando el ángulo horario es mayor de 180°, hallamos la diferencia entre los dos ángulos y obtenemos la deflexión.
- ❖ Cuando el ángulo horario es menor de 180°, hallamos la deflexión sumando ambos ángulos.

**Deflexión = Ah $\pm$ 180°**

D = (220°-180º) = 40° ⇒ Az2 = 80° + 40º = 120º ⇒ *Az2 = 120º*

2. Ejemplo

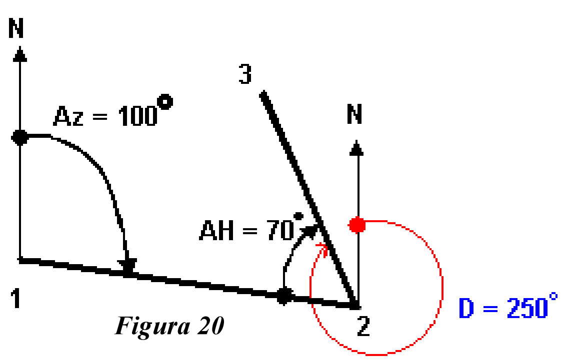



*Figura 20*

Az (1,2) =100°
AH (2) = 70°
Az (2-3) = ?

D = (70º + 180º) = 250°

**Az (2,3) =Az (1,2) + D(2) =** 100º + 250º =350º
⇒ *Az (2,3) = 350º*

*Ejercicios Propuestos*

- Hallar el Azimut 5,6; sabiendo que el Azimut 4,5 es 70° y el Ang. Horario en 5 es de 200°. ***Respuesta : 90°***
- Hallar el Azimut 21,22; Sabiendo que el Azimut 20,21 es de 200° y el Ang. Horario en 21 es 220°. ***Respuesta : 240°***
- Hallar el Azimut de la línea 1,2; sabiendo que el Ang. Contra-Horario en 2 es de 93° y el Azimut 2,3 es 237°. ***Respuesta : 150°***
- Hallar el Ang. Horario en el punto 3, si el Azimut 2,3 es de 125° 32' y el Azimut 3,4 es de 327° 15'. ***Respuesta : 21° 43'***

Ejemplo
Completar el Siguiente cuadro utilizando los conocimientos obtenidos en el presente capitulo:

| Línea | Az | R | C R | C Az | Pto | AH | ACH | Defl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 – 2 | **60°** | N60°E | S60°W | 240° | 2 | 260° | 100° | 80° D |
| 2 – 3 | 140° | S 40° E | **N40°W** | 320° | 3 | 270° | 90° | 90° D |
| 3 – 4 | 230° | S 50° W | N50E | 50° | 4 | **300°** | 60° | 120° D |
| 4 – 1 | 350° | N10° W | S10°E | 170° | 1 | 250° | 110° | **70° D** |
| 1 – 2 | 60° | Comprobación | | | | (n+2)x180 | (n-2)x180 | Σ |
| | | | | | | 1080 | 360° | 360° |

**NOTA:** Cuando trabajamos con ángulos horarios o contrahorarios es muy importante especificar el origen, debido a que si no tenemos esto en cuenta, pueden presentarse inconvenientes con el sentido de los mismos e incurrir en errores que dañen todo el trabajo realizado.
Es conveniente también recordar que el azimut, contra-azimut, rumbo son para líneas y las deflexiones, ángulos horarios y ángulos contra-horarios son para puntos o estaciones.

*Ejercicios Propuestos*
Completar los siguientes cuadros:

| Línea | Az | Rbo | C. Rbo | C. Az | Punto | AH | ACH | Defl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 – 2 | **340°** | | | | 2 | | | |
| 2 – 3 | | **W** | | | 3 | | | |
| 3 – 4 | | | | | 4 | **70°** | | |
| 4 – 1 | | | | | 1 | | | **100° I** |
| 1 – 2 | | Comprobación | | | | | | |

| Línea | Az | Rbo | C. Rbo | C. Az | Punto | AH | ACH | Defl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 – 2 | | | **S62°W** | | 2 | | | |
| 2 – 3 | **268°** | | | | 3 | | | |
| 3 – 4 | | | | | 4 | | | **112° I** |
| 4 – 1 | | | | | 1 | **82°** | | |
| 1 – 2 | | Comprobación | | | | | | |
| | | | | | | | | |

| Línea | Az | Rbo | C. Rbo | C. Az | Pto | AH | ACH | Defl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 – 2 | | | | **300°** | 2 | | | |
| 2 – 3 | | | | | 3 | | | **154° D** |
| 3 – 4 | | | | | 4 | | **65°** | |
| 4 – 1 | **315°** | | | | 1 | | | |
| 1 – 2 | | Comprobación | | | | | | |
| | | | | | | | | |

Graficar y calcular la siguiente poligonal cerrada:

Azimut 1,2 = 38° 25’; Deflexión en el punto 2= 75° 22’ D; Deflexión en el punto 3= 85° 10’ D; Deflexión en el punto 4= 93° 15’ D; Deflexión en el punto 5= 67° 48’ D.

- ❖ El R de la línea (3,4) y (4,5)
- ❖ El Az de la línea (2,3) y (5,1)
- ❖ El Ah en el punto 1 y 4
- ❖ El CR de la línea (2,1) y (4,3)
- ❖ El CAz de la línea (1,2) y (3,4)
- ❖ El ACh en el punto 3 y 5

**Problemas**

Convertir los Az’s (a partir de la Norte) a Rumbos.

- 32° 05’
- 129° 17’ 25”
- 237° 48’; 295°.
- 123° 48’
- 243° 12’
- 346° 23’ 40”.
- 73° 50’ 27”
- 28° 17’ 32”
- 168° 22’ 05”.

Convertir los Rumbos (a partir de la Norte) a Azimut y calcular el ángulo, menor de 180°, entre rumbos sucesivos.

- N37° 15’E
- S51° 32’E
- S24° 31’W
- N56° 14’W.
- N63° 50’E
- S45° 28’E
- S9° 54’W
- N90° 00’W.
- N00° 00’E
- N57° 28’ 16”E
- S2° 17’ 46”W
- S 88° 29’W.

Calcular el Az de la línea (CD).

- Az (AB) = 86° 20’; Ah ABC = 76° 53’, Ah . BCD = 257° 10’.
- R (AB) = S41° 22’W; Ah ABC = 138° 47’, Ah. BCD = 185° 50’.

Para el Az (DE) = 197° 28’ 42”, y los ángulos a la derecha DEF y EFG son de 39°28’50” y de 275°10’08”, respectivamente. Calcular el rumbo de FG.

Dados los ángulos de deflexión de la siguiente poligonal cerrada, calcule los Azimutes. El rumbo AB es N75°21’W. Los ángulos de deflexión son B = 83°12’I; C = 96°48’I; D = 49°59’I; E = 45°33’I; F = 38°22’D; y A = 122°50’I.

## *4.3 Ángulos verticales*

Un ángulo vertical es la diferencia de dirección entre dos líneas que se cortan, situadas en un plano vertical. Como se le usa comúnmente en topografía, es el ángulo hacia arriba o hacia abajo del plano horizontal que pasa por el punto de observación. A los ángulos que se miden hacia arriba del plano horizontal se les llama *alturas* o *ángulos de elevación* y son positivos. A los medidos hacia abajo se les llama *ángulos de depresión* y son negativos.
Algunos teodolitos están diseñados para que las lecturas en el círculo vertical sean ángulos cenitales. Un ángulo cenital se mide en un plano vertical del cenit a otro punto. La relación entre ángulos con origen en el horizonte y cenitales esta dada por la ecuación:

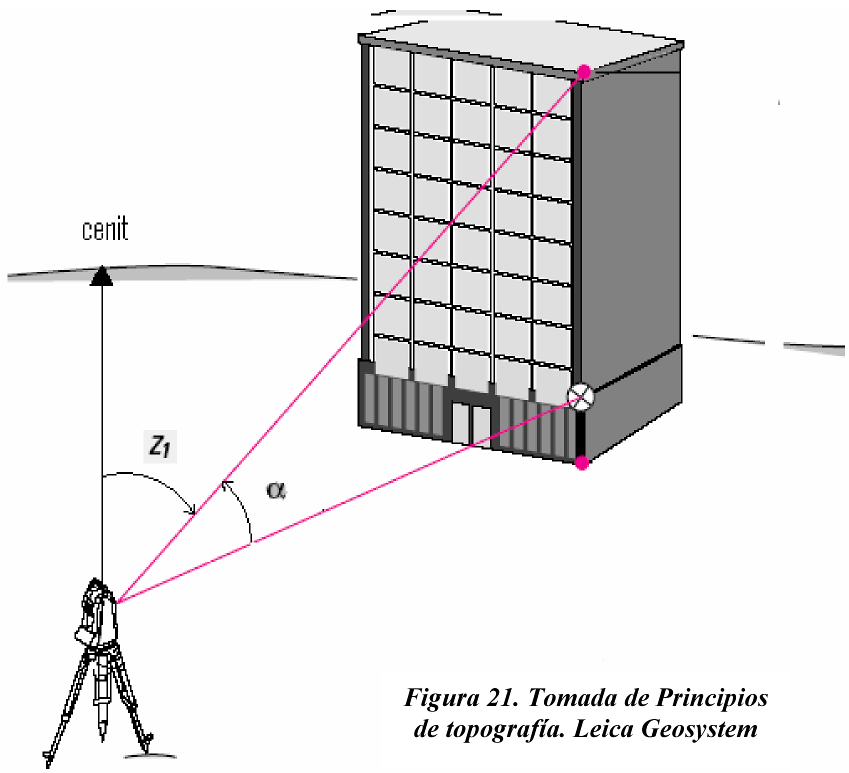



***Figura 21. Tomada de Principios de topografía. Leica Geosystem***

$$Z = 90° - \alpha$$

En donde z y α son ángulos cenitales y verticales, respectivamente.

Otro tipo de ángulo es el Nadiral, que queda directamente abajo del observador, o sea, exactamente opuesto al cenit. Y su valor también varía entre 0° y 360°.

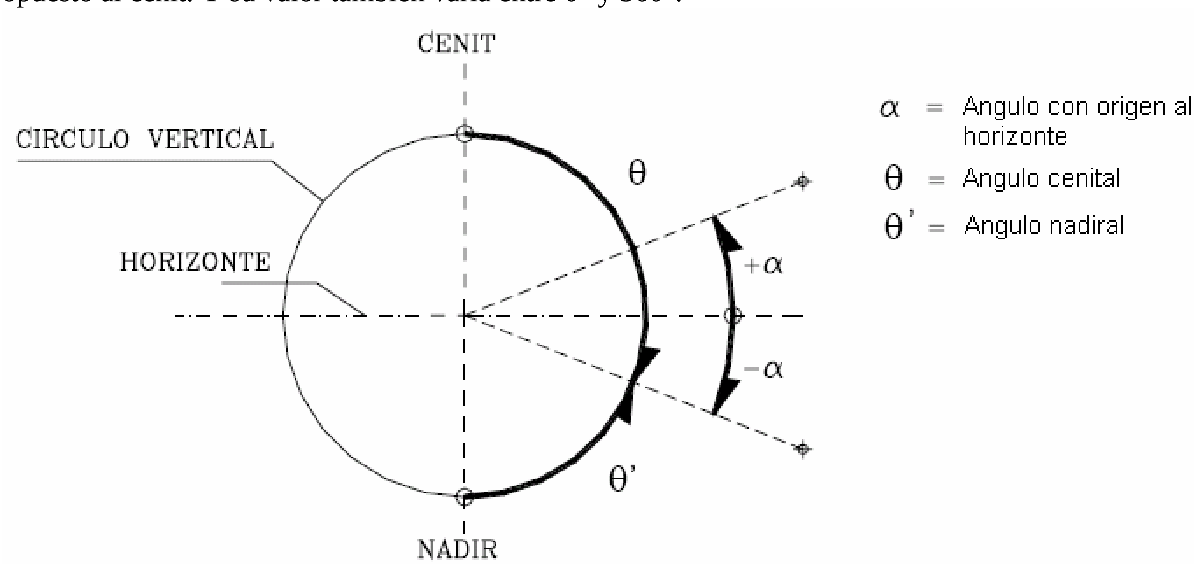



***Figura 22. Tomada del Libro topografia plana. Leonardo Casanova M.***

Ejemplo:
Se tiene un ángulo cenital de 282°15'42". Hallar el vertical ($\alpha$) correspondiente.

$Z = 90° - \alpha \Rightarrow$ se debe tener en cuenta que el ángulo cenital se obtuvo con el transito en posición inversa.

$\alpha = 282°15'42'' - 270° \Rightarrow \alpha = 12°15'42''$

*Ejercicios Propuestos*

Un asta de bandera tiene 90´ alto, se ata con sogas, cada una a la cima del asta y a una clavija en la tierra con una inclinación de 30° a la vertical. Encuentre las longitudes de las sogas y las distancias de las clavijas hasta el pie del asta. ***Respuesta: 103.9 ft, 52,0 ft.***

Desde la cima de un mástil de una nave con 75 pies de alto, el ángulo de depresión de un objeto es 20°. Encuentre la distancia del objeto a la nave. ***Respuesta: 206.1 ft.***

Una torre tiene una elevación de 60° desde un punto al norte y tiene 45° desde un punto al sur. Si los dos puntos están 200 metros separados entre sí, encuentre la altura de la torre y la distancia de cada punto de observación a la torre. ***Respuesta: 126.8 m, 73.2 m, 126.8 m.***

Un barco esta a 1.500' de la pata de talud de un precipicio vertical. A la cima del precipicio y a la cima de un edificio que está en el borde del precipicio, se observaron los siguientes ángulos de elevación 30° y 33° respectivamente. Encuentre la altura del edificio. ***Respuesta:108.1 ft***

Un palo vertical de 3 m se utiliza para los lanzamientos largos, enterrado en el piso produce una sombra del sol de 1.75 m. ¿Cuál es el ángulo elevación al sol? ***Respuesta: 59° 45'.***

X y Y empiezan caminando en las direcciones N17°W y N73°E; encuentre su distancia entre si después de tres horas y la dirección de la línea que los une. Sí X camina a 3 Km por hora y Y a 4 Km por hora. ***Respuesta: 15 km, S70°08'E.***

## *4.4 Medición de ángulos*

Para medir un ángulo existen tres formas de hacerlo las cuales son:

Gráficamente
Analógicamente (indirecta)
Directamente

Estas se ven limitadas de acuerdo con la precisión requerida y con el instrumental que se tenga a la mano. Para medir un ángulo podemos utilizar un transportador sobre un dibujo o gráfico de dicho ángulo, una cinta, con la cual medimos algunos elementos de un triángulo y empleando conocimientos básicos de geometría y trigonometría para calcular el ángulo correspondiente, también podemos medir ángulos empleando una brújula, la cual nos da los rumbos o azimutes de las líneas y realizando una diferencia de estos podemos obtener el ángulo formado por ellas, y por supuesto el transito no se podía quedar fuera de este capitulo ya que el transito como se habló en capítulos anteriores fue creado con el fin de medir ángulos de manera mas precisa y de una forma mas ágil.

### *4.4.1 Medición de ángulos utilizando el transito*

Como ya se había hablado antes en un capítulo anterior el tránsito o teodolito es un instrumento que nos permite medir ángulos con muy buena precisión y de una manera fácil y rápida. Ahora veremos como trabajar con tal instrumento para obtener un mejor desempeño en las labores de campo.

#### 4.4.1.1 *Medición sencilla*

Para medir un ángulo empleando un tránsito, colocamos este en el vértice del ángulo, por ejemplo: si vamos a medir el ángulo COE, estacionamos el transito en O y dependiendo del tránsito si es repetidor o reiterador, buscamos colocar los círculos graduados en 0° para luego visar al punto C en una forma aproximada, de manera que el retículo vertical quede un poco a la izquierda de la señal, se bloquea el movimiento horizontal y con el tornillo de movimiento lento horizontal se hace el punteo definitivo del jalón, plomada o señal colocada en ese punto, siguiendo este procedimiento se "ataca" desde el mismo lado la aproximación y se minimiza el "juego" entre los engranajes del sistema,. En ese momento se suelta el movimiento horizontal del tránsito y se gira o se barre con el telescopio hasta hacer que el retículo vertical del teodolito coincida con la señal en punto E, repitiendo el proceso de puntería que anteriormente fue descrito. Por último se lee el limbo que antes se encontraba en 0° y se anota la lectura.

**Consejos importantes a la hora de medir un ángulo**:

1. Se debe visar cerca de los objetos que se visan con la intención de que el recorrido con el movimiento lento sea menor.
2. Los últimos giros de los tornillos de movimiento fino (tornillos tangenciales) debe buscarse que sean en el sentido de las manecillas del reloj, comprimiendo así los resortes que se oponen al movimiento.
3. Cuando se esté leyendo un limbo y/o nonio debe procurarse colocar el ojo directamente sobre la graduación de la coincidencia para evitar de esta manera la ***paralaje.***
4. Los niveles de la base del transito deben estar centrados antes de medir cualquier ángulo, pero no debe moverse entre una observación final y una inicial cuando medimos un ángulo por repeticiones si podemos nivelar la base cuando vamos a visar de nuevo el primer punto.
5. Cuando se van a visar varios ángulos desde un punto sin mover el círculo horizontal, el topógrafo deberá visar a un punto que él tome como referencia y debe leer el ángulo a ese punto. Si se vuelve a leer al mismo punto que fue tomado como referencia, de esta manera podemos constatar si existe cualquier movimiento accidental del círculo horizontal.
6. Siempre que se doble o se lea un ángulo más de una vez, si el tránsito está corregido, las lecturas no deben discrepar en más de lo que sea la aproximación del nivel; si se ratifica esta diferencia es un signo que nos indica la descorrección o desajuste del instrumento.

En topografía existen unos métodos que le permiten al topógrafo obtener mejores resultados durante la medida de un ángulo o que le permiten mejorar su precisión. Estos métodos de observación son empleados dependiendo del instrumento y de la precisión establecida.

## 4.4.1.2 *Método de Repeticiones*

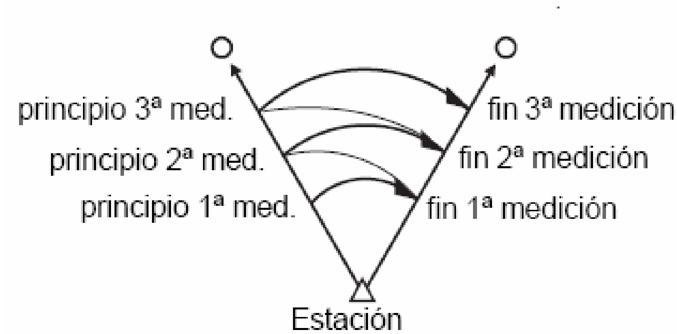



***Figura 23***

El método de repeticiones es empleado cuando se trabaja con tránsitos que están provistos de un sistema de fijación del círculo o limbo horizontal, este consiste en que el ángulo que se va a medir es repetido un número de veces en forma acumulativa, sin anotar lecturas intermedias solo anotando una lectura inicial, una lectura de control y una lectura final. En la aplicación de este método existen varias formas de operar las cuales denominamos de la siguiente forma:

- Acumulando en posición directa
- Acumulando en posición inversa
- Acumulando y borrando en posición directa
- Acumulando en directa y borrando en inversa

### *Acumulando en Directa*

El procedimiento de campo es el siguiente:

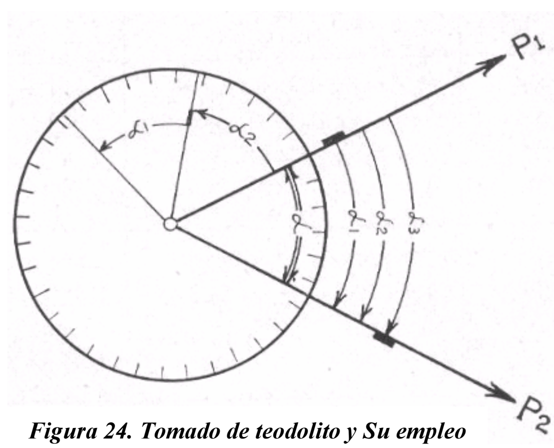



***Figura 24. Tomado de teodolito y Su empleo***

Estacionados en un vértice *(Fig. 24)* se hace puntería a la señal ubicada en el punto (P1) y se efectúa la primera lectura (LI), luego aflojamos el tornillo de movimiento horizontal del tránsito y el sistema de fijación del limbo, se barre en el sentido de las manecillas del reloj a la señal en el punto (P2) y se hace la lectura sobre este punto, siendo esta una lectura intermedia (L’), que solo nos sirve como una lectura para conocer aproximadamente las magnitud del ángulo. A continuación se fija el círculo con la lectura (L’) y se sigue girando en el sentido horario para realizar una nueva observación a la señal inicial, aflojamos el tornillo de movimiento horizontal y el limbo y se barre para hacer una nueva puntería a la segunda señal. En esta forma se sigue trabajando hasta completar el número de repeticiones establecido y hacer la lectura final sobre el segundo punto (LF). A esto es a lo que se le conoce como una serie.

Cuando se esta trabajando con el método de repeticiones lo que se busca para mejorar la precisión de la medida es realizar un numero de series determinado, pero teniendo en cuenta que se debe

repartir las lecturas iniciales de cada serie en todo el limbo horizontal del transito, objetivo que se logra tomando 180° del limbo y dividiéndolo entre el numero de series que se quieren ejecutar. Como por ejemplo:
Si se quieren realizar tres series de repeticiones dividimos 180° / 3 series, lo que nos da un valor de 60°, el cual se le sumara a la lectura inicial de la primera serie para conocer la lectura inicial de la segunda serie y luego volver a sumarle 60° para conocer la lectura inicial de la tercera serie; supongamos que la lectura inicial de la primera serie es igual a 10° 20’ 00”, por lo tanto la lectura inicial de la segunda serie es igual a 10°20’00” + 60°= 70°20’00” y la lectura inicial de la tercera serie será de 130°20’00”.

Para obtener el ángulo después de haber hecho todo el proceso basta con aplicar la siguiente fórmula $\alpha = (L2 - L1) / n$. Siendo muy importante conocer el número de grados que nos proporciona la lectura de control (L’) para saber si es necesario adicionarle 360° un múltiplo de 360° antes de dividir en n (número de repeticiones), esto depende si se dio un giro completo o más de un giro al momento de efectuar la repetición.

NOTA: el método de repetición nos permite elevar la precisión de una medida con el instrumento en más o menos cinco veces, debido a que el error en lectura queda subdividido y se minimiza el efecto de los errores en graduación en el círculo horizontal.

### Cálculo para Repeticiones

1. Se va a medir un ángulo entre dos líneas que están abiertas 20°11’17”, con un aparato de aproximación al 01’. Los 17” no se podrán apreciar con una medida simple, pero cada vez que se gira el transito, quedan incluidos y se van acumulando hasta sumar un minuto, o excederlo.

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | D | 0 | 00° 00’ | Lect. Inicial |
| | 3 | D | 1 | 20° 11’ (17”) | Primera lect. |
| | 3 | D | 2 | 40° 22’ (34”) | Segunda lect. |
| | 3 | D | 3 | 60° 33’ (51”) | Tercera lect. |
| | 3 | D | 4 | 80° 44’ (68”) | Cuarta lect. |

La cuarta lectura medida: 80° 44’ (68”), se leerá 80° 45’.

Así, el ángulo repetido 4 veces, la última lectura arrojó un minuto más, y su valor obtenido será:

$$\frac{80° 45’}{4} : 20° 11’ 15”$$

Que se aproxima más al valor verdadero, y se obtuvieron segundos con el mismo aparato.
Se entiende que al valor verdadero que desconocemos, no se llega salvo en casos especiales de múltiplos de segundos que acumulen minutos cerrados, pero si se logra un valor más aproximado a la realidad.

$$AD = \frac{Ul - Li}{n}$$

Donde $Ul$ es la última lectura, $Li$ es la lectura inicial y $n$ es el número de repeticiones.

Con este procedimiento la aproximación del aparato se divide entre el número de repeticiones, es decir, aumenta la aproximación.
Pero como al girar el aparato varias veces en el mismo sentido, por la fracción del limbo se puede arrastrar algo la graduación, esto hace que se pierda la aproximación después de varios giros, por lo que se recomienda que el número de repeticiones sea de: 5 a 7.

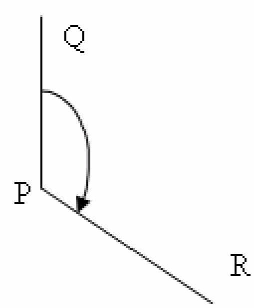
2.

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | D | 0 | 00° 00’ | Lect. Inicial |
| | 3 | D | 1 | 50° 10’ | Primera lect. |
| | 3 | D | 5 | 250° 51’ | Lect. Final |

Angulo Definitivo = $\frac{250° 51’}{5}$ = **50° 10’ 12”**

3.

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| P | Q | D | 0 | 50° 30’ | Lect. Inicial |
| | R | D | 1 | 200° 10’ | Primera lect. |
| | R | D | 5 | 78° 51’ | Lect. Final |




- **Angulo de Control: Primera lect. – lect. Inicial**

  El ángulo de control nos define el ángulo definitivo.

  Angulo de Control: 200° 10’ - 50° 30’ = 149° 40’

❖ **N° de Vueltas: Angulo de Control x Número de repeticiones**

N° de Vueltas: número de veces que pasa el aparato por 360°.

N° de Vueltas: $149°40' \times 5 = \dfrac{748°20'}{360°} = 2.078 \approx 2\ vueltas = 720°$

$$AD = \frac{(Ul + nv) - Li}{n}$$

$$AD = \frac{(78°51' + 720°) - 50°30'}{5} = 149°40'12''$$

4.

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | D | 0 | 200° 20’ | Lect. Inicial |
| | C | D | 1 | 330° 14’ | Primera lect. |
| | C | D | 5 | 129° 51’ | Lect. Final |

❖ **Angulo de Control: Primera lect. – lect. Inicial**

Angulo de Control: 330° 14’ - 200° 20’ = 129° 54’

❖ **N° de Vueltas: Angulo de Control x Número de repeticiones**

N° de Vueltas: 129° 54’ x 5 = 649° 30’+ 200° 20’ = $\dfrac{849°\ 50'}{360°}$ = 2.36 ≈ 2 vueltas

$$AD = \frac{(Ul + nv) - Li}{n}$$

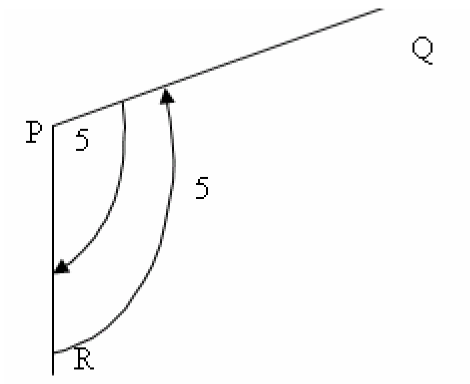
$$AD = \frac{(129°51' + 720°) - 200°20'}{5} = 129°54'12''$$

*Ejercicio propuesto*

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| M | N | D | 0 | 300° 00’ | Lect. Inicial |
| | O | D | 1 | 100° 50’ | Primera lect. |
| | O | D | 6 | 185° 01’ | Lect. Final |

***Respuesta: 160° 50’ 10”***

### *Acumulando y Borrando*




| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| P | Q | D | 0 | 100° 51’ | Lect. Inicial |
| | R | D | 1 | 200° 20’ | Primera lect. |
| | R | D | 5 | 238° 17’ | Lect. Final 1 set |
| | Q | D | 10 | 100° 52’ | Lect. Final 2 set |

- **Angulo de Control: Primera lect. – lect. Inicial**

  Angulo de Control: 200° 20’ - 100° 51’ = 99° 29’

- **N° de Vueltas: Angulo de Control x Número de repeticiones**

  N° de Vueltas: 99° 29’ x 5 = 497° 25’+ 100° 51’ = $\frac{598°\ 16'}{360°}$ = 1.66 ≈ 1 vuelta

$$AD = \frac{(Ul + nv) - Li}{n}$$

$$AD1set = \frac{(238°17' + 360°) - 100°51'}{5} = 99°29'12''$$

$$AD2set = \frac{(238°17' + 360°) - 100°52'}{5} = 99°29'$$

Promedio Ángulo Definitivo: **99° 29’ 06”**

*Ejercicios propuestos*

1. Az MN : 257° 38’ 02”
   Ang. CH. N-M–O :   149° 31’ 30”

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| M | N | D | 0 | 210° 28’ 30” | Lect. Inicial |
| | O | D | 1 | 138° 45’ 00” | Primera lect. |
| | O | D | 5 | 211° 51’ 30” | Lect. Final 1 set |
| | N | D | 10 | 210° 29’ 00” | Lect. Final 2 set |

***Respuesta: 288° 16’ 33”***

2.

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | D | 0 | 210° 34’ | Lect. Inicial |
| | 3 | D | 1 | 300° 47’ | Primera lect. |
| | 3 | D | 4 | 211° 26’ | Lect. Final 1 set |
| | 2 | D | 8 | 210° 35’ | Lect. Final 2 set |

***Respuesta: 90° 12’ 52.5”***

## *Replanteo*

Ejemplo:
1. El ángulo BAC es de 50° 12’ 56”, y la distancia A-C es de 980 m. Realizar el replanteo del ángulo con un transito T-16 de aproximación al minuto.

| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | D | 0 | 00° 00’ | Lect. Inicial |
| | C | D | 1 | 50° 12’ | Primera lect. |
| | C | D | 5 | 251° 01’ | Lect. Final |

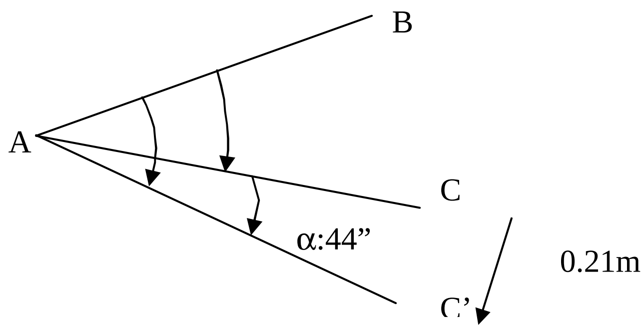
❖ $AD = \frac{Ul - Li}{n}$

$$AD = \frac{251^{o}51' - 00^{o}00'}{5} = 50^{o}12'12'$$

La corrección angular (α ): 50° 12’ 56”
- 50° 12’ 12”
00° 00’ 44”

Corrección lineal: CC'= d x tan α

CC'= 980m x (tan 00° 00' 44") = 0.21 m




Ejemplo:

2. Realizar el replanteo del ángulo de 70° 40' 02" medido con un transito T-16 de aproximación al minuto, y una distancia de 1100 m.

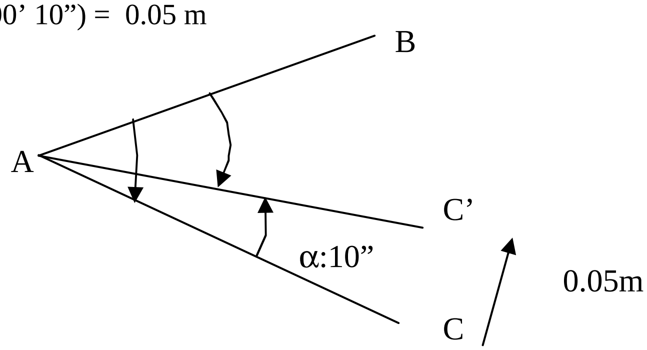
| Est. (Δ) | ⊙ | Telescopio | Repetición | Lectura | Observación |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | D | 0 | 00° 00' | Lect. Inicial |
| | C | D | 1 | 70° 40' | Primera lect. |
| | C | D | 5 | 353° 21' | Lect. Final |

$$AD = \frac{353^{o}21' - 00^{o}00'}{5} = 70^{o}40'12''$$

La corrección angular (α ): 70° 40' 02"
- 70° 40' 12"
- 00° 00' 10"

Corrección lineal: CC'= d x tan α

CC'= 1100m x (tan 00° 00' 10") = 0.05 m



*Ejercicios propuestos*

- Replantear el ángulo de 220° 05’ 33” a una distancia de 990m. Las repeticiones con un origen de 300° 20’ y 6 veces acumulado. ***Respuesta: 220° 05’ 10”, CC’=0.033m.***

- Un ángulo A,B,C de 52° 36’ 12” tiene que trazarse con un transito de aproximación a los 30”, después de tomar una vista atrás al punto A se marco el punto C a 500 m con un ángulo de 52° 36’, el ángulo A,B,C fue medido 6 veces por repetición. **LF:Ang. Control x N° vueltas + LI ± Aprox. Equipo.** ***Respuesta: 52° 36’ 5” , CC’=0.017m.***

- Se desea replantear un tramo de vía entre el PC N° 15, el PI 16 y el PT 17, la deflexión en el PI 16 es de 68° 17’ 46” I; si se mira para el punto 15 con un ángulo de 115° 28’ 30” y se hacen 5 repeticiones con un transito K0S. ¿Cuál será la distancia a medir en el PT 17 para replantear dicho ángulo, si la tangencia es de 928m? ***Respuesta: 111° 42’ 36”, CC’= 0.099 m.***

## 4.4.1.3 *Método de Reiteraciones*

En general el método de reiteraciones tiene el mismo fin que el de repeticiones, se diferencia en que el método de reiteraciones se utiliza en tránsitos de tipo reiterador y asegura que se distribuya la medida sobre todo el circulo graduado, ya que cada ángulo es medido en posición directa e inversa, los ángulos de origen se calculan dividiendo 180º por n numero de reiteraciones, sumándole este resultado al origen anterior.

Orígenes según el número de reiteraciones:

Cuando se esta trabajando con el método de reiteraciones lo que se busca para mejorar la precisión de la medida es realizar un numero de series determinado, pero teniendo en cuenta que se deben repartir las lecturas iniciales de cada serie en todo el limbo horizontal del transito, objetivo que se logra tomando 180° y dividiéndolo entre el numero de series que se quieren realizar. Como por ejemplo: para tres reiteraciones ➔ 180º / 3 = 60º entonces los orígenes son 00º, 60º y 120º

| **Tel** | **D** | **I** | **D** | **I** | **D** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 00° | 90º → 270° | | | | |
| 3 | 00° | 60º → 240° | 120° | | | |
| 4 | 00° | 45º → 225° | 90° | 135º → 315° | | |
| 5 | 00° | 36º → 216° | 72° | 108º → 288° | 144° | |
| 6 | 00° | 30º → 210° | 60° | 90º → 270° | 120° | 150º → 330° |

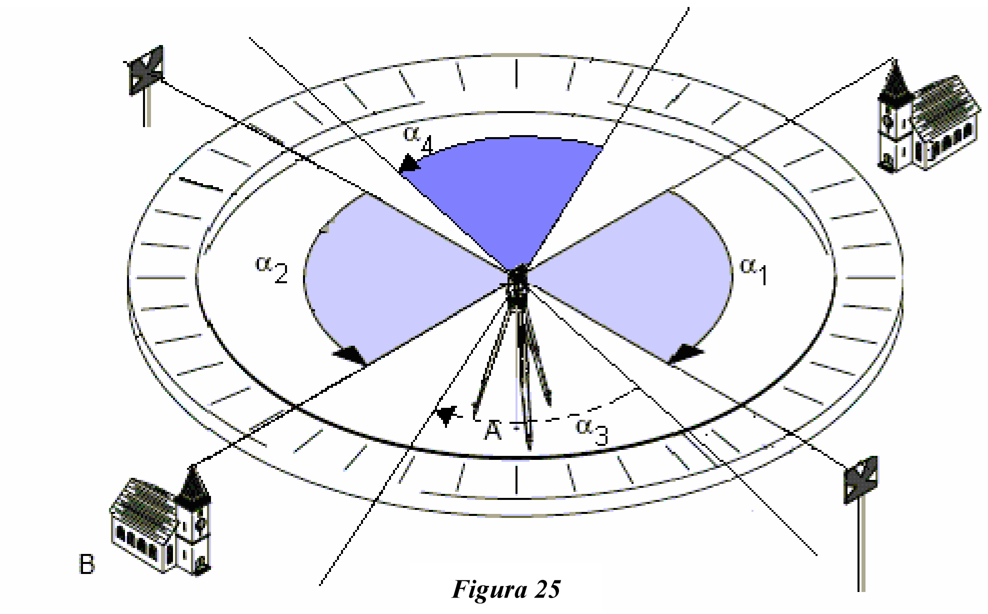



***Figura 25***

Veamos el protocolo que se emplea para medir entre dos señales.

1. Para comenzar con el trabajo se visa y se hace puntería a la primera señal, colocando un ángulo de partida de 00º00'+ una lectura en segundos mayor a cero, lo cual se hace empleando el botón de desplazamiento del circulo que nos da la posibilidad de tener cualquier lectura de partida.

2. Se suelta el tornillo del movimiento horizontal del transito y se barre para hacer puntería en la segunda señal donde se efectúa la lectura después de realizar la coincidencia para comprobar la lectura se hace una nueva coincidencia y se lee otra vez y registrar en la cartera los valores.

3. Se transita y se la da un giro de 180° al transito para visar de nuevo a la segunda señal, donde ya en posición II se realizan de nuevo las dos lecturas registrándolas en la cartera.

4. Barrer en esta posición para hacer la observación a la primera señal y efectuar las lecturas sobre esta y anotar los valores obtenidos.

5. Teniendo el transito en posición inversa y punteando a la primera señal, se coloca éste en el segundo origen (en inversa).

6. Barrer a la segunda señal puntear y registra las lecturas

7. Se transita y se da un giro de 180º para quedar de nuevo en posición directa se puntea y se anota los resultados.

8. Barrer a la primera señal, para realizar el punteo y el registro de las lecturas correspondientes

Este método anteriormente descrito, minimiza el efecto de los errores de graduación que puedan existir en el instrumento.

Cuando se está trabajando en la medida de ángulos por reiteraciones se debe realizar la operación con sumo cuidado para evitar errores como:

- equivocarse de tornillo tangencial dándole vueltas al que no corresponde.
- olvidarse fijar el tornillo del movimiento horizontal del tránsito.
- leer equivocadamente el vernier o escala horizontal.
- equivocarse de vernier en el momento de realizar la lectura.

## Cálculo para Reiteraciones

Intervalos: $\frac{180°}{N° \text{ set}}$

| | |
|---|---|
| **INTERVALOS (I)** | G°= $\frac{180°}{N°\text{set}}$ |
| | M'= $\frac{600''}{N°\text{set}}$ |

Trabajo de 5 set: para Topografía Normal

1: Directa: 05° 28' 30"
2: Directa: 41° 28' 30"
3: Directa: 77° 28' 30"
4: Directa: 113° 28' 30"
5: Directa: 149° 28' 30"

Intervalos: $\frac{180°}{N° \text{ set}} \Rightarrow I = \frac{180°}{5} \Rightarrow$ I= 36° 00' 00"

Trabajo de 5 set: para Topografía Mayor Precisión

1: Directa: 05° 28' 30"
2: Directa: 41° 30' 30"
3: Directa: 77° 32' 30"
4: Directa: 113° 34' 30"
5: Directa: 149° 36' 30"

Intervalos: $\frac{180°}{N° \text{ set}} \Rightarrow I = \frac{180°}{5} \Rightarrow$ I= 36° 00' 00"

Intervalos: $\frac{600°}{5}$ $\Rightarrow I = \frac{600''}{5} \Rightarrow$ I= 00° 02' 00"
N° set

I= G + M= 36° 02' 00"

Ejemplo:

Replantear el ángulo de 78° 25’ 16”, para controlar la base de una torre de conducción eléctrica; utilizar:

- 4 set
- Equipo THEO 10A con precisión a los 10”
- Índice de confiabilidad = 75%
- LI= 25° 10’ 15”
- Longitud 1-3: 45m

Intervalos: $\frac{180°}{N° \text{ set}}$ ⇒ I = $\frac{180°}{4}$ ⇒ I= 45° 00’ 00”

Intervalos: $\frac{600°}{N° \text{ set}}$ ⇒ I = $\frac{600”}{4}$ ⇒ I= 00° 02’ 30”

I= G + M= 45° 02’ 30”
Vmp: 78° 25’ 16”
Aprox. = 78° 25’ 20”

| Est. (Δ) | ⊙ | Telesc. | Lectura | Promedio | Prom. D/I | Diferen. | Ángulo Parcial | Ángulo Definitivo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | D | 25° 10’ 10-20” | 15 | 15 | | | |
| | 2 | I | 205° 10’ 10-20” | 15 | | 15 | 78° 25’ 15” | |
| | 3 | D | 103° 35’ 30-40” | 35 | 30 | | | |
| | 3 | I | 283° 35’ 20-30” | 25 | | | | |
| | | | | | | | | |
| 1 | 2 | I | 250° 12’ 30-40” | 35 | 35 | | | |
| | 2 | D | 70° 12’ 30-40” | 35 | | 27 | 78° 25’ 27” | |
| | 3 | I | 328° 38’ 00-10” | 5 | 5 | | | |
| | 3 | D | 148° 38’ 00-10” | 5 | | | | |
| | | | | | | | | **78° 25’ 25.7”** |
| 1 | 2 | D | 115° 15’ 00-10” | 5 | 10 | | | |
| | 2 | I | 295° 15’ 10-20” | 15 | | 35 | 78° 25’ 35” | |
| | 3 | D | 193° 40’ 40-50” | 45 | 45 | | | |
| | 3 | I | 13° 40’ 40-50” | 45 | | | | |
| | | | | | | | | |
| 1 | 2 | I | 340° 17’ 40-50” | 45 | 40 | | | |
| | 2 | D | 160° 17’ 30-40” | 35 | | 35 | 78° 20’ 35” | |
| | 3 | I | 58° 43’ 00-10” | 5 | 15 | | No se tiene en cuenta | |
| | 3 | D | 238° 33’ 20-30” | 25 | | | | |

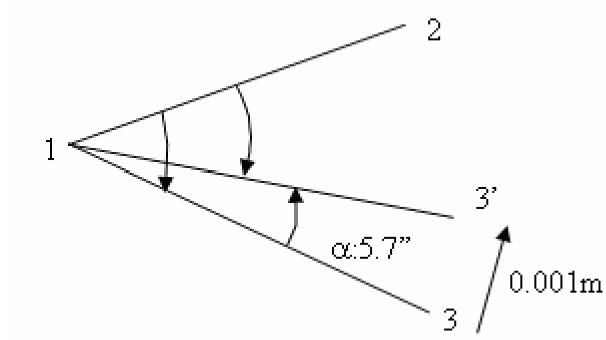
Índice de Confiabilidad = 3 set = 75%

La corrección angular (α ):

  78° 25’ 20.0”
- 78° 25’ 25.7”
- 00° 00’ 5.7”

Corrección lineal: CC' = d x tan $\alpha$

CC'= 45m x (tan 00° 00' 5.7") = 0.001m




*Ejercicio Propuesto*

Replantear el ángulo de 01° 06' 10", utilizar:

- 4 set
- Equipo KM-1 con precisión a los 10"
- Índice de confiabilidad = 75%
- LI= 00° 00' 10"
- Longitud A-C: 300m

***Respuesta = 01° 05' 52.5", CC'= 0.025m***

| Est. (Δ) | ⊙ | Telesc. | Lectura | Promedio | Prom. D/I | Diferen. | Ángulo Parcial | Ángulo Definitivo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | D | 00° 00' 10-10" | | | | | |
| | B | I | 180° 00' 40-50" | | | | | |
| | C | D | 01° 06' 10-20" | | | | | |
| | C | I | 181° 06' 10-20" | | | | | |
| | | | | | | | | |
| A | B | I | 225° 04' 40-50" | | | | | |
| | B | D | 45° 02' 30-40" | | | | | |
| | C | I | 226° 08' 20-30" | | | | | |
| | C | D | 46° 08' 30-40" | | | | | |
| | | | | | | | | |
| A | B | D | 90° 05' 00-10" | | | | | |
| | B | I | 270° 05' 20-30" | | | | | |
| | C | D | 91° 11' 10-20" | | | | | |
| | C | I | 271° 11' 40-50" | | | | | |
| | | | | | | | | |
| A | B | I | 315° 07' 40-50" | | | | | |
| | B | D | 135° 07' 30-40" | | | | | |
| | C | I | 316° 13' 00-10" | | | | | |
| | C | D | 136° 13' 20-30" | | | | | |