MEDIDAS Y ERRORES

2

El hombre comienza a adentrarse en el mundo de las mediciones casi en el mismo momento en el que desarrolla su uso de razón, aunque no se de cuenta que lo está haciendo, debido a que es en éste mismo instante donde comienza realizar comparaciones; compara lo que tiene con lo que tiene otros niños, compara sus características físicas con las de otros, etc. Y es que con el hecho de comparar se puede decir que esta midiendo, porque el lenguaje de la medida es el lenguaje de la comparación.

¿Quien puede hablar de que nunca a hecho una comparación? si es que en las cosas mas simples lo hacemos; pensemos en dos personas que van caminando, una de estas comienza a adelantarse, esta persona le dice a la otra que camina muy lento y la otra persona le responde es que su paso es mas largo que el mío, esta persona acaba de hacer una comparación y a si el ser humano compara muchas cosas mas; como la calidad de diferentes objetos, su estado, su durabilidad, el precio, las dimensiones y otras mas. Se concluye por lo tanto que el hombre que realiza una comparación está midiendo, aunque no implique la presencia de valores numéricos precisos.

Conociendo que el proceso de medida toma como base la comparación, es de gran importancia dar mas claridad a dicho concepto y esto lo haremos a través de conocer que tipo de comparaciones existen y sus características.

2.1 Comparaciones cualitativas

Como se dijo antes, cuando comparamos dos objetos en forma general, lo que en realidad estamos haciendo es tomar una cualidad que se encuentra presente en los dos y que además nos da una base de comparación para confrontarlas. Como por ejemplo el brillo de dos laminas de metal o el peso de dos ladrillos, etc. Por tanto una forma de realizar una comparación cualitativa, seria tomar el grado de dicha propiedad en cual quiera de los dos objetos y usarla como patrón o unidad de medida para compararla con el otro.

Como ejemplo podríamos comparar la intensidad de color de los dos ladrillos que vemos en la grafica. Tomando como patrón o base de comparación el ladrillo A, podríamos decir lo siguiente:

a) El ladrillo B es mas oscuro que al A

b) El ladrillo B no tiene un color tan claro como el ladrillo A

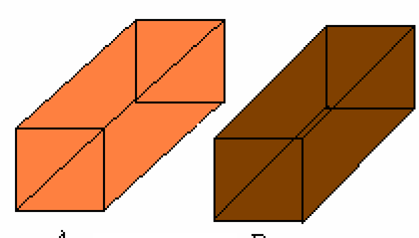


Figura 1

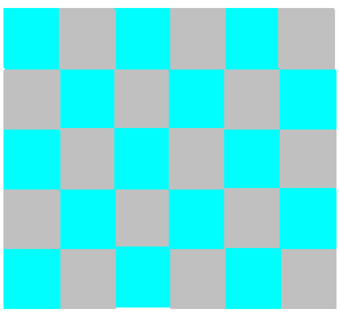
2.2 Comparaciones cuantitativas

Cuando deseamos medir una propiedad física de un objeto lo primero que debemos hacer es observar e identificar dicha propiedad, saber que vamos a medir, ya que esto trae implicaciones al momento de escoger una unidad de medida y también el con que se va a medir el grado de semejanza y de diferencia del objeto con el patrón; es en éste momento donde entran a jugar ideas como las, de cantidad, de posición, de cambio y de dirección.

El punto de origen y la dirección del cambio son ideas importantes que usamos al comparar y al medir. Una conciencia de variación o cambio en una propiedad física implica también una conciencia del estado original desde el cual a cambiado dicha propiedad. Incluyen también la conciencia del cambio en una dirección como opuesta al cambio en otra dirección. (Tomado del libro Medida de la Nacional Council of Teachers of Mathematics)

Analizando los ejemplos anteriores podemos ver la importancia o necesidad de tener un punto de origen o punto de referencia desde el cual medir, para tener mayor claridad miremos el siguiente caso.

Supongamos una habitación cuyo suelo está cubierto de baldosas, tal como se ve en la figura, tomando una baldosa como unidad, y contando el número de baldosas medimos la superficie de la habitación, 30 baldosas. En la figura inferior, la medida de la misma superficie da una cantidad diferente 15 baldosas.



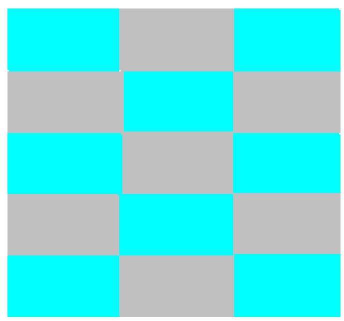


Figura 2

La medida de una misma magnitud física (una superficie) da lugar a dos cantidades distintas debido a que se han empleado distintas unidades de medida.

Este ejemplo, nos pone de manifiesto la necesidad de establecer una única unidad de medida para una magnitud dada, de modo que la información sea comprendida por todas las personas.

2.3 Concepto de medida

Por medición entendemos el proceso sistemático o técnica por la cual asignamos un número a una propiedad física de un objeto o conjunto de objetos para representar esas cantidades, con propósitos de comparación de dicha propiedad con otra similar tomada como patrón**, e**l resultado de la medida se expresa con un número y una unidad, dependiendo esta última del patrón que se haya escogido.

En planimetría se trabaja con medidas de ángulos verticales y/o horizontales y distancias verticales y horizontales. El primer paso en el proceso de la ejecución de dichas medidas, es como ya se había dado a entender con anterioridad, la definición de las unidades con que se desea trabajar, el segundo es la selección del método o procedimiento por el cual se efectuaran tales medidas, el tercero es la construcción de un modelo matemático que simplifica la realidad física de los componentes de la medida. Como resultado de los dos primeros pasos se obtienen observaciones o lecturas que se procesan de acuerdo al modelo para obtener los valores requeridos. Los datos obtenidos deben ser los necesarios y solidarios con el modelo para que éste sea aplicable.

Un ejemplo sencillo de esto se presenta cuando se desea conocer el área de una figura trigonométrica como el triángulo; en este caso una persona podría medir todos los lados del triangulo y aplicar el modelo matemático del semiperímetro para determinar el área, no le sería posible emplear un modelo como el del seno del ángulo por que la información que posee no es pertinente (no funciona para el modelo).

2.3.1 Propiedades de una medida[1]

En el campo de las matemáticas solo podemos llamar medición al proceso que cumpla las siguientes propiedades.

- La medida del conjunto debe ser igual a la suma de las medidas de todas sus partes. Por ejemplo si tuviésemos que medir la distancia entre dos puntos y para ello contáramos solo con una cinta de 10m lo que nos llevaría a medir por tramos para luego sumarlos y obtener el resultado, este debería ser igual, a si lo hiciéramos con una cinta que cubriera toda la distancia

- La medida de nada debe ser cero

- La medida de una parte de algo no debe ser mayor que la medida del todo. Por ejemplo la medida de medio ángulo es menor que la medida de todo el ángulo. A esta propiedad la llamamos “monotonía” teniendo en cuenta las propiedades anteriores, se puede decir que la propiedad tres es lo mismo que decir que las medidas expresadas por números no negativos

- Al repetir una medida debemos obtener los mismos resultados, En cualquier trabajo de medición, si la medida se hace de cierto modo bajo determinadas condiciones físicas, la teoría dice que el resultado debe cumplir con esta propiedad. Claro que en la realidad no se cumple llevándonos a pensar en la incertidumbre de las medidas cosa que estudiaremos mas adelante.

2.3.2 Formas de medir

Son una gran cantidad de cosas o de propiedades físicas las que el hombre puede medir, pero todas estas no permiten ser medidas de la misma forma debido a las condiciones de medida y a la precisión que se requiere. Las formas o procesos de medida se clasifican de la siguiente manera:

- Contar

- Medición directa

- Medición indirecta

2.3.2.1 Contar

Esta forma de medir se basa en los números cardinales que nos permiten decir la cantidad de elementos presentes en un conjunto, así por ejemplo se podría expresar el número de mesas que hay en un restaurante luego de contarlas. También se pueden conocer otras cosas a través de contar como conocer las dimensiones de un cuadrado como el que vemos en el dibujo solo conociendo las dimensiones de uno de los rectángulos internos y contando cuantas veces este se repite dentro de dicho cuadro

[1] Tomado del libro Medida de la Nacional Council of Teachers of Mathematics

Figura 3

Dimensiones de un cuadro interno 2 cm de largo por 1.2 cm, para determinar las dimensiones contaríamos que por un lado tiene tres rectángulos y estos tiene por ese lado una dimensión de 2 cm por lo tanto el cuadro tiene 6 cm de lado

2.3.2.2 Medición directa

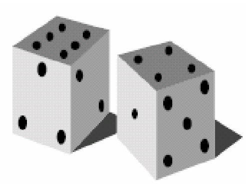
Esta forma de medida consiste en realizar una comparación directa entre una unidad que se asume como patrón de medida y lo que se piensa medir, por ejemplo si queremos conocer la estatura de una persona, ésta persona se coloca al lado de una cinta métrica que se encuentra en posición vertical y se realiza la comparación.

Este proceso es una medida relativa porque los números de la magnitud dependen de la unidad seleccionada y esta selección es un tanto arbitraria.

2.3.2.3 Medición indirecta

Es aquella medida en la cual no es posible efectuar en forma sencilla la medición directa, esto se presenta en algunas situaciones como por ejemplo cuando se desea medir la altura a la cual vuela un avión o la altura de un edificio bastante elevado, por lo tanto para llegar al resultado es necesario la aplicación de un modelo matemático y instrumentos ingeniosos que faciliten la obtención de otra informaciones que después de ser procesadas con el modelo, dando el resultado esperado. Otra situación donde se aplica la medición indirecta es cuando se quieren medir las propiedades de algunos objetos que no son obtenibles por medición directa: temperatura, velocidad, peso, densidad, etc. En dichas situaciones se hace la medida con instrumentos en los cuales el resultado se logra por la lectura en una pantalla o la posición de una aguja índice la cual nos permiten registrar la cantidad de dichas fuerzas físicas sobre una escala numérica.

2.4 Distribución normal



Atendiendo a las necesidades de las profesiones en las cuales se trabaja con medidas u observaciones, de determinar el comportamiento de estas y las precisión con que se obtienen los resultados de medidas, se estable que los datos que son producto de lecturas o medidas, como las que se efectúan en topografía, tienen la característica de ser variables aleatorias continuas, ya que pueden tomar cualquier valor fraccionario en un rango determinado de valores, desde que sean posibles y probables dentro de dicho rango, en el cual existen un numero infinito de posibilidades; claro está que no se pueden señalar todos los valores posibles con su probabilidad, pudiendo solo tomar los valores que permita la precisión con que se están realizando las observaciones. Un ejemplo que nos permite entender con mayor facilidad este concepto, es el siguiente:
Pensemos en un dado de juegos de azar; este tiene los números del uno al seis, si le preguntamos a una persona que elija un número para ver si al lanzar el dado, el numero escogido cae, y esta persona nos contesta que piensa que caerá el número siete, lo primero que podemos pensar es que

no es posible que éste caiga; por la sencilla razón de que se encuentra fuera del rango del dado, no cumpliendo así con las características para considerarse como un valor acertado para el intervalo o rango que se esta manejando.
Al lazar un dado en repetidas ocasiones los valores obtenidos siempre serán números diferentes, pero que están presentes en el dado, esto es debido a cambios en las condiciones de cada lanzamiento, que no pueden ser controladas; de forma similar se presentan cuando realizamos mediciones con distintos instrumentos y distintos medidores, en las cuales se encuentran resultados distintos; a estos cambios es a lo que denominamos errores aleatorios.

El comportamiento de estos resultados se ha logrado caracterizar estableciendo ciertas leyes de distribución, llamadas distribuciones normales.

La distribución normal es una distribución de probabilidad continua que agrupa los datos igualmente alrededor de la media o valor más probable, esta se representa por la grafica de una función, que es una curva en forma de campana denominada, curva de probabilidad, campana de Gauss o curva de error, ésta curva nos ilustra en forma sencilla la manera en que se presentan los resultados de las observaciones o en otras palabras la dispersión de dichos datos (área bajo la curva de la grafica que tiene como limite en las abscisas los puntos de inflexión), en ella podemos encontrar como abscisas los valores del error y como ordenadas la frecuencia de ocurrencia de los errores.

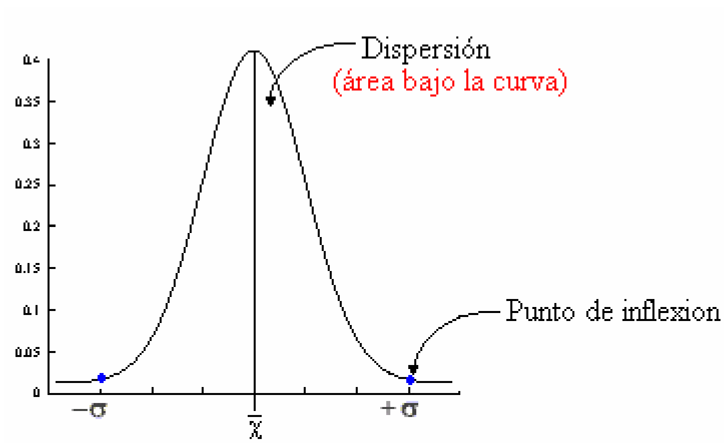


Figura 4

Una grafica de distribución normal nos proporciona la siguiente información:

- ✓ La forma simétrica en se encuentran distribuidos los valores respecto a un valor central o más probable.
- ✓ La forma en que se propagan o dispersan los valores obtenidos.
- ✓ Se puede inferir la precisión de los resultados de la medidas (una curva alta y estrecha representa una buena precisión, una curva baja y ancha nos indica una pobre precisión).

Veamos los gráficos que ilustran el tercer punto.

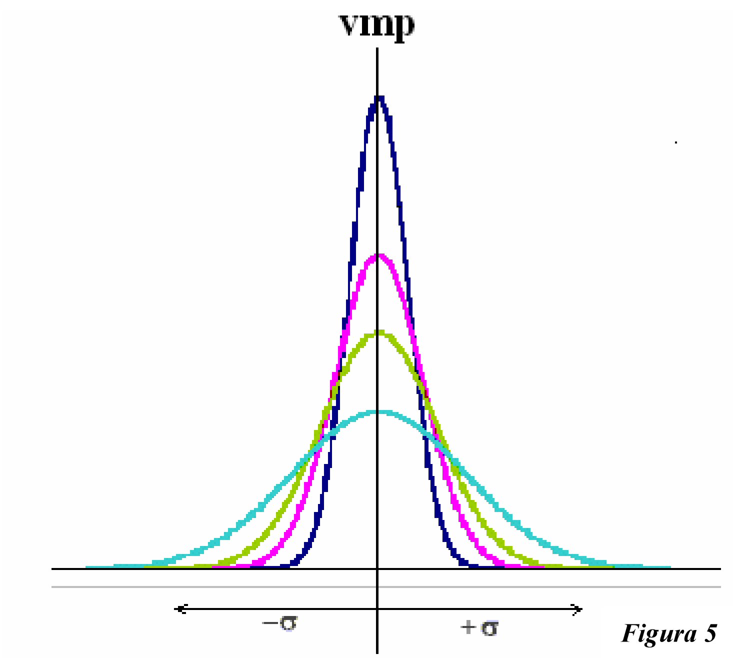


Figura 5

En este grafico podemos observar varias distribuciones, que tienen el mismo valor central pero diferente dispersión.

La curva de color morado nos muestra una distribución para una serie de medidas con una muy buena precisión y una curva de color magenta, baja y ancha que nos indica que tienen una pobre precisión.

Las distribuciones de color violeta y verde son funciones de dispersión intermedia por tanto no son de precisión intermedia.

NOTA: Las curvas de distribución que observamos anteriormente tiene la característica de tener un mismo valor central, pero presentan dispersiones diferentes, que nos pueden indicar como están los resultados de las medidas efectuadas (ver concepto de desviación normal).

Por lo tanto para complementar se puede decir que un conjunto de observaciones se encuentran normalmente distribuidas cuando cumplen con las siguientes condiciones:

- En el intervalo de $\bar{x} \pm \sigma$ (este valor es la abscisa del punto de inflexión) se encuentran concentrados el 68.26% de los datos, esto quiere decir que si tomamos el valor mas probable y le sumamos o le restamos la desviación estándar se crea un intervalo en el que se deben encontrar el 68.26% de los datos que se obtuvieron en el proceso de medición.

- En el intervalo de $\bar{x} \pm 2\sigma$ se encuentran concentrados el 95.4% de los datos, significa que si se toman

- En el intervalo $\bar{x} \pm 3\sigma$ se deben concentrar el 99.7% de los datos o resultado de la observaciones realizadas.

Se puede decir que la probabilidad de que un resultado se desvié de la media en más de tres veces la desviación estándar (siendo esta el alejamiento que existe entre el valor medio y los límites de los intervalos descritos anteriormente) es de casi 1 entre 400, y en más de cuatro veces, del alrededor de 1 entre 10000. Así, cuando el resultado se desvía en una cantidad grande de la media es posible que se halla operado en circunstancias poco usuales y que el resultado no pertenezca a la misma distribución normal. En este caso es razonable rechazar la observación dudosa, practica usual si la desviación de la media es mayor que tres veces la desviación estándar.

2.5 Precisión y exactitud

En la mayoría de las ocasiones las personas creen que precisión y exactitud son sinónimos, técnicamente en la realidad esto no es cierto, estos dos términos expresan cosas muy diferentes cuando estamos hablando en un lenguaje como en el de topografía, donde ya dejan de ser sinónimos para convertirse en conceptos que nos permitan calificar la calida de las medidas.

2.5.1 Precisión

La precisión la podemos definir como el grado de refinamiento y uniformidad de los resultados cuando se realiza una medida. Esta nos da una indicación de la dispersión de los valores en una cantidad medida, varios valores agrupados entre si constituyen un conjunto de medidas mas preciso, que otro con valores mas dispersos. En otras palabras la precisión está relacionada con la calidad de los procesos de medida.

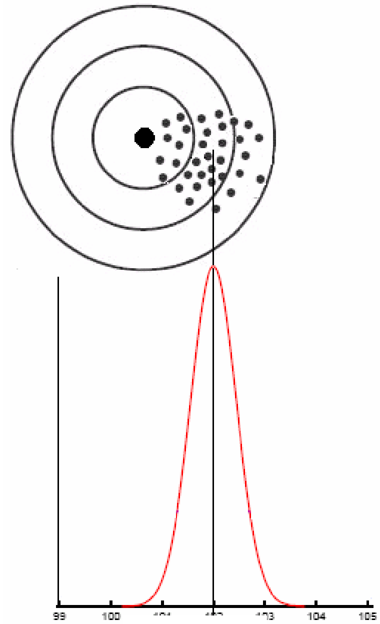


Figura 6

La precisión se encuentra muy relacionada con la mínima división de la escala del instrumento de medida y con el estado del instrumento mismo. Para entender mejor lo que es la precisión analicemos el siguiente ejemplo:

En la (*fig 6)* se muestran los impactos de los disparos de un tirador, que a pesar de no atinarle al blanco, muestra una uniformidad en sus resultados ya que estos se agrupan alrededor de un centro de gravedad, todos han quedado en la misma zona repartidos en tal forma que hay la misma cantidad a izquierda y a derecha, arriba y abajo, que además existe mayor cantidad de impactos cerca al centro y menos hacia los extremos (periferia). De lo anteriormente dicho se puede inferir que la precisión nos da una idea de la calidad del manejo de un instrumento para la obtención de un resultado.

2.5.2 Exactitud

De la exactitud podemos decir que es el grado de acercamiento a la verdad o sea que es la cercanía entre el valor medido (Vm) de una magnitud y el valor verdadero (Vv) de esta. Por lo tanto la exactitud de una medida se refiere a la cercanía entre Vm y Vv, una diferencia pequeña significa gran exactitud y viceversa. El verdadero valor de una cantidad rara vez se conoce por lo tanto la diferencia o error y la exactitud son también desconocidos.

Debido a que la exactitud como ya dijimos es indeterminada en la practica necesitamos de otros conceptos que nos permitan determinar la calidad de una medida, es decidir entre varias cual es la mejor. La precisión nos permite hacer este juicio.

Para comprender mejor lo que es exactitud recordemos el ejemplo anterior: *(fig. 6)*

En éste se ve que el centro de gravedad de de los impactos está desplazado del centro de la diana, abajo y a la derecha, lo que equivale a la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero; la discrepancia que existe en el ejemplo se debe a unos errores que se denominan sistemáticos.

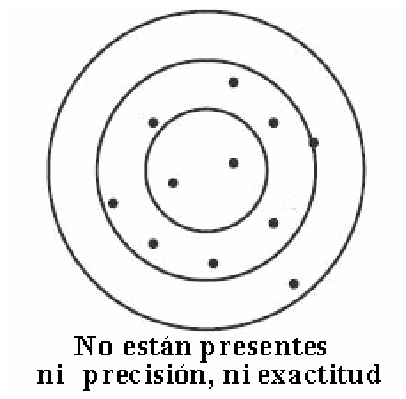


Figura 7 (a)

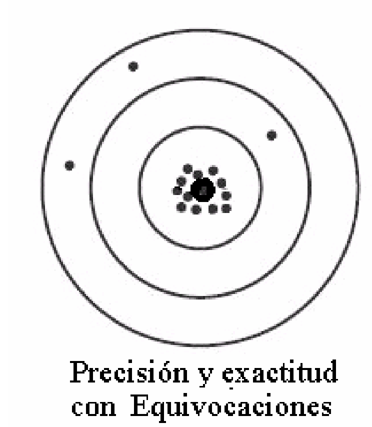


Figura 7 (b)

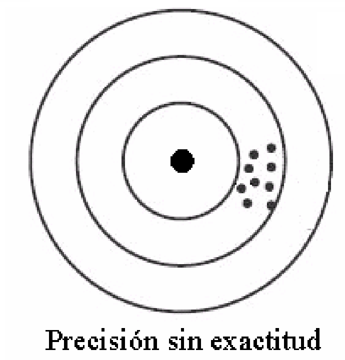


Figura 7 (c)

De los ejemplos anteriores (*Ver fig. 7(a), (b), (c));* se puede concluir que una medida es mas precisa en cuanto menores son los errores accidentales, y más exacta cuando más reducidos son los errores sistemáticos y además que:

1. Los errores positivos y negativos de la misma magnitud, tienen aproximadamente la misma frecuencia, de manera que su suma tiende a cero.
2. Los pequeños errores son mas frecuentes que los grandes.
3. Los grandes errores como (impactos del grafico *7c*) son escasos.

2.6 Incertidumbre de las medidas

Todas las ciencias experimentales se fundamentan en la experiencia, y ésta a su vez en la determinación cuantitativa de las magnitudes pertinentes. En definitiva, todas las ciencias precisan de la medida, ya sea directa o indirecta de magnitudes físicas.

Las medidas nunca permiten obtener el "verdadero valor" de la magnitud que se mide. Esto es debido a multitud de razones. Las más evidentes son las imperfecciones, inevitables en un cierto grado, de los aparatos y de nuestros sentidos. El "verdadero valor" de una magnitud no es accesible en la realidad y por ello resulta más adecuado hablar en algunas de un valor teórico (Vt) o de estimaciones, medidas o aproximaciones del valor de una magnitud. Independientemente de estas consideraciones, en el ámbito de la topografía se sabe que no tiene sentido hablar del *verdadero valor de una magnitud*, sino sólo de la *probabilidad* de obtener uno u otro valor en una determinada medida.

La consecuencia de las consideraciones anteriores, es que toda medida es incierta o está dotada de un cierto grado de incertidumbre. Es esencial estimar ésta incertidumbre, primero porque el conocimiento de la incertidumbre aumenta la información que proporciona la medida, y segundo, porque este conocimiento permite manejar las medidas con la prudencia que dicta el conocimiento de la confianza que nos merecen.

Cuando se exprese el resultado de una medida es pues necesario especificar *tres* elementos: número, unidad e incertidumbre. La ausencia de alguna de ellas elimina o limita la información que proporciona.

2.7 Errores

El significado de la palabra "error" no es muy preciso, puesto que con frecuencia autores diferentes lo emplean con sentidos diferentes. En un sentido amplio puede considerarse el error como una estimación o cuantificación de la incertidumbre de una medida o sea de la diferencia entre un Vm y un Vv o Vt. Cuanto más incierta sea una medida, tanto mayor será el error que posee la misma.

Suelen distinguirse dos tipos de errores: errores sistemáticos y accidentales.

2.7.1 Errores sistemáticos

Es una discrepancia que surge al momento de medir por el empleo de un método inadecuado, un instrumento defectuoso (falta de calibración) o bien por usarlo en condiciones (ambientales) para las que no estaba diseñado, éste no tiene que ver con la calidad del trabajo. Es aquel que, en iguales condiciones, afectan el resultado con la misma magnitud y con el mismo signo (positivo o negativo). Por ejemplo, emplear una regla metálica a una temperatura muy alta, puede introducir un error sistemático si la dilatación del material hace que su longitud sea mayor que la estándar. En este caso, todas las medidas pecarán (sistemáticamente) por defecto. Medir una magnitud con un instrumento graduado a una escala, suponiendo por equivocación que está graduado en otra, introduce también un error sistemático en la medida que en este caso se debe a fallas de observador.

Los errores sistemáticos deben ser eliminados, en lo posible, ya sea teniéndolos en cuenta en el momento de realizar los caculos o empleando métodos de medición apropiados y instrumentos que se encuentren calibrados o empleándolos para las condiciones que fueron fabricados

NOTA: Una medida tiene mayor cercanía al resultado real, cuando en el proceso de medición no se presentan errores sistemáticos. Realmente en algunas ocasiones los errores sistemáticos se toman como equivocaciones que se consideran como evitables. Estos no tienen que ver con la calidad del trabajo

Ejemplos[2]*:*

- Error de calibración del instrumento de medida.
- Posición incorrecta de la aguja (Error de índice).
- Colocar el índice donde no corresponde.
- Mala calibración de aparatos electrónicos (Distanciómetro).
- Errores de construcción del instrumento (excentricidad de círculos graduados).

[2] Tomado de las notas de clase. Errores. Profesor Gilberto Gómez Gómez.

- ☞ Condiciones ambientales inadecuadas (humedad, temperatura, luminosidad, etc.).
- ☞ Técnicas imperfectas (procedimientos no adecuados, como asumir siempre que el hilo medio del retículo va a ser siempre igual ala altura instrumental.
- ☞ Modelo matemático incorrecto (se aplica la formula no adecuada).
- ☞ Teorías incorrectas.

2.7.2 Errores accidentales

Estos son los que llamaremos simplemente errores en el sentido técnico de la palabra. Son incertidumbres debidas a numerosas causas incontrolables e imprevisibles que hacen que los resultados obtenidos no cumplan con la cuarta propiedad de las medidas.

Los errores accidentales, parecen fruto del azar, y por ello reciben el nombre de aleatorios. Pueden ser debidos a la acumulación de muchas irregularidades sistemáticas o bien pueden provenir de variaciones incontrolables a un nivel muy pequeño de las condiciones de observación. Esto quiere decir que estos errores son provocados por irregularidades de la atmósfera al medir, fallas pequeñas de nuestros sentidos, o por problemas inevitables en la construcción de los instrumentos. Aunque la presencia de los errores accidentales no pueda evitarse, estos se pueden considerar como compensables.

NOTA: En una medida cuando los errores aleatorios son pocos es por que ésta presenta la medida presenta una buena precisión.

Ejemplos:

- ☞ Errores de apreciación (lectura en las escalas).
- ☞ Errores por cambio de temperatura en el sitio de trabajo.
- ☞ Errores inducidos por el viento.
- ☞ Asentamiento del trípode (terrenos blandos).
- ☞ Falta de definición (al dar línea con la plomada).
- ☞ Errores de manipulación de la cinta.

2.8 Causas de errores

Existen tres causas debido a las cuales se presentan los errores al efectuar mediciones, y se clasifican de la siguiente manera:

- ➢ **Errores Naturales:** Son causados por variaciones del viento, la temperatura, la humedad, la presión atmosférica, la refracción atmosférica, la gravedad y la declinación magnética. Un ejemplo es una cinta de acero cuya longitud varía con los cambios de temperatura.
- ➢ **Errores Instrumentales:** Estos se deben a imperfecciones en la construcción o ajuste de los instrumentos y del movimiento de sus partes individuales. Por ejemplo, las graduaciones sobre una escala pueden no estar perfectamente espaciadas o la escala puede estar torcida.

El resultado de muchos errores instrumentales pueden reducirse, e incluso eliminarse, adoptando procedimientos adecuados o aplicando correcciones calculadas.

- **Errores Personales:** Estos tienen su origen principalmente en las limitaciones propias de los sentidos humanos, tales como la vista, el oído y el tacto. Por ejemplo, existe un error pequeño en el valor medido de un ángulo horizontal cuando el hilo vertical de la retícula del anteojo de un teodolito no queda perfectamente alineado sobre el objetivo.

2.9 Error real

Por motivos ya expuestos, y por su propia naturaleza, no es posible determinar exactamente un error. En el mejor de los casos, puede llegarse a una estimación de ese error. Se llama error real (Er) a la diferencia entre el valor medido (Vm) y el valor verdadero (Vv) de la respectiva magnitud:

$$Ea = Vm - Vv$$

En la práctica puede tomarse como valor verdadero al hallado a través de un cálculo estadístico de un gran número de mediciones, que se adopta como valor convencional (Vc).

$$Eac = Vm - Vvc$$

De las fórmulas anteriores se desprende que el error absoluto será positivo cuando se mida en exceso y negativo cuando se lo haga en defecto. El valor del error absoluto no nos da una idea clara de la bondad de la medición efectuada. Por ejemplo, es muy distinto cometer un error de 10cm al medir 13200m, que al medir 220m.

Esto implica que la magnitud medida se encuentra en un intervalo con una determinada probabilidad

$$Vm = x \pm \delta\, x(unidad)$$

$$(x - \delta\, x, x + \delta\, x)$$

Con una medida logramos acotar el intervalo de valores en los que se encuentra la magnitud que pretendemos medir, pero siempre con una determinada probabilidad. Es evidente que el error expresado por δx es una magnitud de la misma clase que la medida y se expresa por tanto con la misma unidad. También es claro que en las medidas de calidad normal el error δx debe ser mucho menor que el valor nominal, *x*. Por definición δx es siempre positivo; éste es el que llamamos error absoluto.

2.10 Error relativo

Tiene también interés el error relativo, que se define como la razón entre el número de unidades en el (error absoluto) y el número de unidades en la medida |x|.

$$Er = \frac{\delta\, x}{|x|}$$

Ejemplo:

Se realizo una medida de 14.5 cm, esto nos manifiesta que la precisión de la medida es de 0.1 cm. Por tal motivo el máximo error posible será ½ de 0.1cm entonces el error relativo es igual:

$$Er = \frac{0.05cm}{14.5cm} = 0.003$$

En medidas de una cierta calidad, el error relativo debe ser mucho menor que la unidad. Frecuentemente se expresa multiplicado por 100, con lo que aparece en tanto por ciento del valor medido:

$$Er(\%) = \frac{\delta x}{|x|} \times 100\%$$

2.11 Cifras significativas

Se considera que las cifras significativas de un número son aquellas que tienen significado real o aportan alguna información. Las que no lo son aparecen como resultado de los cálculos y no tienen significado alguno. Las cifras significativas de un número vienen determinadas por su error.

Cuando nos referimos a trabajos de topografía o de otras profesiones donde tengan gran importancias el acotamiento de estos es de gran relevancia esta frase: Son cifras significativas aquellas que ocupan una posición igual o superior al orden o posición del error permisible por la precisión.

Por ejemplo, consideremos una medida de longitud que arroja un valor de 5.392,3412 m con un error de 0,6 m. El error es por tanto del orden de décimas de metro. Es evidente que todas las cifras del número que ocupan una posición *menor* que las décimas no aportan ninguna información. En efecto, ¿qué sentido tiene dar el número con precisión de diezmilésimas si afirmamos que el error es de casi 1 metro? Las cifras significativas en el número serán por tanto las que ocupan la posición de las décimas, unidades, decenas, etc, pero *no* las centésimas, milésimas y diezmilésimas.

Cuando se expresa un número debe evitarse siempre la utilización de cifras no significativas, puesto que puede suponer una fuente de confusión. Los números deben redondearse de forma que contengan sólo cifras significativas. Se llama redondeo al proceso de eliminación de cifras no significativas de un número.

Una última forma de expresar el error de un número consiste en afirmar que todas sus cifras son significativas. Esto significa que el error δx es del orden de media unidad de la última cifra que se muestra. Por ejemplo, si el resultado de una medida de longitud es de 5.432,8 m, y afirmamos que todas las cifras son significativas, quiere decirse que el error es del orden de 0,5 m, puesto que la última cifra mostrada es del orden de las décimas de metro.

¿Cómo pueden determinarse las cifras significativas a partir del número que expresa el error?. Hay que tener siempre presente que todo error es una estimación y está por tanto sujeto a su vez a una incertidumbre, generalmente grande. Por esto no tiene sentido especificarlo con excesiva precisión. Salvo casos excepcionales, se expresará con *una sola cifra significativa.*

NOTA: La tendencia a la máxima precisión cuando no es necesaria es también un equivoco porque lleva a la perdida de tiempo y dinero.

2.12 Estimación del error de una medida directa

Cuando realizamos una medida y al repetirla obtenemos el mismo valor, esto no es necesariamente un indicio de que la medida esta bien efectuada. Obtener exactamente el mismo valor al repetir la medida es un indicio de que el instrumento es muy "fiel", pero tanta fidelidad lo que pone de manifiesto es una falta de "sensibilidad" en el instrumento de medida.

La estimación del error de una medida tiene siempre una componente subjetiva. En efecto, es importante que el observador sea experimentado y así pueda estimar con buena aproximación cuál es el grado de confianza que le merece la medida que acaba de tomar. No existe un conjunto de reglas bien fundadas e inalterables que permitan determinar el error de una medida en todos los casos imaginables. Muchas veces es tan importante consignar de donde proviene un error que su propio valor.

Sin embargo, la aplicación de algunos métodos estadísticos permite estimar en gran medida errores aleatorios.

2.13 Valor más probable

Como se hablo cuando se trato el tema del error real, para poder determinar este, es necesario encontrar un valor que remplace el valor verdadero y con tal fin se emplea el valor más probable que se calcula con la media aritmética de los resultados de las mediciones

Si al tratar de determinar una magnitud por medida directa realizamos varias medidas con el fin de minimizar los errores aleatorios, los resultados obtenidos son $x_1, x_2, \ldots x_n$ se adopta como mejor estimación del valor verdadero, el valor medio $\overline{x}$, que viene dado por

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\overline{x}$ = Valor más probable o media ×

n = Número de observaciones

x_i = el valor de cada observación

El valor medio, se aproximará tanto más al valor verdadero de la magnitud cuanto mayor sea el número de medidas, ya que los errores aleatorios de cada medida se va compensando unos con otros. Sin embargo, en la práctica, no debe pasarse de un cierto número de medidas. En general, es suficiente con diez, e incluso podrían bastar cuatro ó cinco.

Cuando la sensibilidad del método o de los aparatos utilizados es pequeña comparada con la magnitud de los errores aleatorios, puede ocurrir que la repetición de la medida nos lleve siempre al mismo resultado; en este caso, está claro que el valor medio coincidirá con el valor medido en una sola medida, y no se obtiene nada nuevo en la repetición de la medida y del cálculo del valor medio, por lo que **solamente será necesario en este caso hacer una sola medida**.

2.14 Dispersión y error. Desviación estándar

De acuerdo con la teoría de Gauss de los errores, que supone que estos se producen por causas aleatorias. Evidentemente, el error de la medida debe estar relacionado con la dispersión de los valores; es decir, si todos los valores obtenidos en la medición son muy parecidos, es lógico pensar que el error es pequeño, mientras que si son muy diferentes, el error debe ser mayor.

Se toma como la mejor y la más apropiada estimación del error, la desviación media, es decir, el valor medio de la diferencia de los datos respecto al valor central. Sin embargo, como los datos difieren tanto por defecto como por exceso del valor medio, tal desviación se aproximaría a cero. Para evitarlo suele tomarse, no el valor medio de las desviaciones, sino el valor medio de las desviaciones al cuadrado. De esta forma todos los sumandos son positivos. Para que la unidad de este número sea homogénea con la de los datos, se extrae la raíz cuadrada. El valor resultante se conoce como **error medio cuadrático** definido por

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{(n-1)}}$$

σ = error medio cuadrático

$\overline{x}$ = Valor más probable o media

n = Número de observaciones

x_i = el valor de cada observación

La identificación del error de un valor experimental con el error cuadrático obtenido de *n* medidas directas consecutivas, solamente es válido en el caso de que el error cuadrático sea mayor que el error instrumental, es decir, que aquél que viene definido por la resolución del aparato de medida. (Tomado del Artículo Teoría de Errores. (Departamento de Física Aplicada, E.U.I.T.I y T.) Universidad del País Vasco.**)**

Es evidente, por ejemplo, tomando el caso más extremo, que si el resultado de las *n* medidas ha sido el mismo, el error cuadrático, de acuerdo con la formula será cero, pero eso no quiere decir que el error de la medida sea nulo. Sino, que el error instrumental es tan grande, que no permite observar diferencias entre las diferentes medidas, y por tanto, el error instrumental será el error de la medida.

Adoptando un criterio pesimista, podría decirse que el error es la semidiferencia entre el valor máximo y el mínimo.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

$$Donde\ (x_i - \overline{x}) = Varianza\ (v)$$

Cuando el número de datos es pequeño, suele preferirse el cálculo de la desviación normal por la ecuación:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{(n-1)}}$$

La primera suele llamarse desviación estándar de población, y la segunda desviación estándar muestral. Uno de los motivos de preferir la segunda, es que cuando medimos una sola vez, el resultado de la ecuación es $S = 0/0$, es decir un número indefinido. Efectivamente, midiendo una magnitud una sola vez, no tenemos información alguna sobre su error, y por lo tanto éste debe permanecer indefinido. Sin embargo la segunda expresión conduciría a un error nulo.

Las dos expresiones se emplean, aunque en la práctica, y si el número de medidas es grande, la diferencia entre emplear una u otra es muy pequeña. La más empleada es la segunda.

2.14.1 Aplicaciones de la desviación estándar en topografía

Las aplicaciones del concepto de desviación estándar en topografía son muchísimas y como sabemos los trabajos topográficos son basados en las medidas de distancias y ángulos, las cuales implican errores de tipo aleatorio por tal motivo se han desarrollado formas de tratarlo empleando dicho concepto, ahora bien en topografía podemos hablar de observaciones de igual valor de certeza u observaciones de diferente valor de certeza, siendo así no podemos tratarlos de igual forma, vemos como se aplica el error medio cuadrático para el tratamiento de las observaciones.

2.14.1.1 Observaciones de igual valor de certeza

Error de la serie:

En topografía se realizan diferentes tipos de medidas y como se ha dicho en párrafos anteriores ninguna está libre de error, como por ejemplo las distancias de una poligonal que como ideal debíamos expresarlas con su magnitud y error respectivamente; si queremos el error total aplicamos el concepto de error que es la suma de todos los errores de una serie de datos obtenidos, este concepto puede ser expresado en forma matemática de la siguiente forma:

$$E_{suma} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ x_n^2}$$

En el caso en que se puedan considerar que todos los datos de la serie poseen un mismo error o σ, esto quiere decir que las medidas son homogéneas y es posible expresarlas matemáticamente de la siguiente forma:

$$E_{suma} = E\sqrt{n}$$

Veamos el ejemplo más común que es el de una poligonal de la cual conocemos sus cinco ángulos y que determinamos que para cada medida se hace presente un error de 1’, se podría decir que el error de la suma es igual a:

$$E_{suma} = 1’\sqrt{5} = 2.2’$$

Error de la media

Como se ha hablado en partes anteriores para determinar el valor mas probable de una serie de medidas u observaciones repetidas se emplea la media aritmética, debiéndose tener en cuenta que esta media también tiene errores, ya que al realizar la sumatoria de las medidas, para luego dividirla en el número de observaciones. Se tiene en cada una de ellas un error, se puede decir que el error de la media es igual a tomar el error de suma de los datos y dividirla en el número de repeticiones hechas.

Luego reemplazando en error de la suma por su equivalencia en el error de la serie, se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$Emc\bar{x} = \frac{Emc}{\sqrt{n}}$$

La importancia del error de la media radica en que nos permite estimar la calidad del error medio cuadrático de los resultados obtenidos de las medidas.

2.14.1.2Observaciones de diferente valor de certeza

Anteriormente tratamos las observaciones que presentaban la característica de tener un mismo valor de certeza; pero existe una gran cantidad de operaciones realizadas por los topografos que no cumplen esta condición por lo tanto para estimar o determinar elementos como el valor mas probable y error medio cuadrático se deben integrar a los conceptos anteriormente visto la idea del peso de las observaciones.

Peso de las medidas

Podemos definir como peso de una observación, el valor numérico que se le asigna a los resultados de una cantidad de medidas para indicar la precisión o calidad con que fueron obtenidas cada una de ellas, esto nos indica que para este caso las medidas son heterogéneas.

El peso se expresa con un número positivo inversamente proporcional a un factor que nos permite inferir la precisión de las observaciones, siguiendo con ésta idea se puede afirmar que el mejor factor empleado es el error medio cuadrático.

Donde µ es un valor teórico de la magnitud real desconocida, por tal motivo el peso de una o varias mediciones heterogéneas se expresa así:

$$P = w = \frac{\mu}{Emc^2}$$

Donde C es igual a un número entero constante, de unidades iguales al error medio cuadrático, si las magnitudes son del mismo genero; en un caso contrario no poseen unidades. En la mayoría de las ocasiones este valor es reemplazado por 1.

$$P = w = \frac{1}{Emc^2}$$

Media ponderada

Como ya se ha hablado, en caso de las medidas heterogéneas de cualquier magnitud es menester también determinar el valor mas probable de un conjunto de medidas, pero dicho valor depende en este momento del peso que posea cada una de estas, ya que al hacerse presente el concepto de peso este causa el valor mas probable se encuentre mas cercano en un rango determinado a la medida que presente mayor peso.

Ya que es necesario tener en cuenta los pesos de las observaciones para calcular la media esta queda expresada matemáticamente así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n}{n}$$

Error de la media ponderada

Al igual que en las observaciones de igual valor de certeza existe un error y la forma de determinarlo, en las observaciones o en las medidas heterogéneas también se puede determinar este valor empleando la siguiente formula, en la cual también se tiene en cuenta los pesos.

$$Emp = \sqrt{\frac{\sum \left(Pv^2\right)}{\sum P(n-1)}}$$