

MODELOS DIGITALES

Compilación

**JHON ALEXANDER GUIOT GAITAN
ANDRES FELIPE LONDOÑO GIRALDO**

**UNIVERSIDAD DEL QUINDIO
FACULTAD DE INGENIERIA
PROGRAMA DE TOPOGRAFIA
ARMENIA – QUINDIO
2005**

MODELOS DIGITALES
Compilación

JHON ALEXANDER GUIOT GAITAN
ANDRES FELIPE LONDOÑO GIRALDO

Proyecto de grado para optar el título de Tecnólogo en Topografía

Director
ING. Iván Rene Galindo Escarria

UNIVERSIDAD DEL QUINDIO
FACULTAD DE INGENIERIA
PROGRAMA DE TOPOGRAFIA
ARMENIA – QUINDIO
2005

CONTENIDO

| | Pág. |
|--|-------------|
| LISTA DE TABLAS | 7 |
| LISTA DE FIGURAS | 8 |
| PRESENTACIÓN | 10 |
| | |
| CAPITULO 1. Conceptualización Básica. Modelos digitales del terreno. Introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales. | |
| FELICÍSIMO, Ángel M.1994..... | 11 |
| | |
| 1.1 Conceptos Básicos de Modelo..... | 12 |
| 1.2 Tipos de Modelo..... | 15 |
| 1.2.1 Modelo Icónico..... | 15 |
| 1.2.2 Modelo Analógico..... | 16 |
| 1.2.3 Modelo Simbólico..... | 17 |
| | |
| CAPITULO 2. Captura de Datos. Surveying. MOFFITT Francis and BOSSLER John. 1998 | 18 |
| | |
| 2.1 Captura de datos altimétricos..... | 19 |
| 2.2 Captura de Datos Directos..... | 20 |
| 2.2.1 Altimetros..... | 20 |
| 2.2.2 Sistema de Posicionamiento Global (GPS)..... | 22 |
| 2.2.3 Estaciones Topográfica..... | 27 |
| 2.3 Captura de Datos Indirectos..... | 28 |
| 2.3.1 Restitución..... | 28 |
| 2.3.2 Digitalización..... | 31 |

| | |
|--|----|
| CAPITULO 3. Interpolación Espacial. Análisis de calidad de un modelo digital de elevación generado con distintas técnicas de interpolación. BARRAGAN MORILLO J. 2002..... | 35 |
| 3.1 Concepto de Interpolación Espacial..... | 36 |
| 3.2 Métodos de Interpolación en Modelos Digitales..... | 37 |
| 3.2.1 Red Irregular de Triángulos (TIN)..... | 38 |
| 3.2.2 Kriging..... | 46 |
| 3.2.3 Gravitacional o Inverso de la Distancia (IDW)..... | 50 |
| 3.2.4 Medias Móviles Ponderadas..... | 53 |
| 3.2.5 Vecinos Naturales..... | 55 |
| 3.2.6 Vecinos Cercanos..... | 60 |
| 3.2.7 Método de Shepards..... | 61 |
| 3.2.8 Función de Base Radial..... | 64 |
| 3.2.9 Curvatura Mínima..... | 66 |
| | |
| CAPITULO 4. Modelo Digital de Elevaciones. Métodos de interpolación para la elaboración de un modelo digital de elevaciones. BOSQUE Joaquín y GARCIA Rosa.2001..... | 71 |
| 4.1 Concepto de Modelo Digital de Elevaciones..... | 72 |
| 4.2 Estructura de datos..... | 74 |
| 4.2.1 Estructura Raster..... | 75 |
| 4.2.2 Estructura Vectorial..... | 77 |
| 4.2.3 Ventajas y desventajas de las estructuras..... | 78 |
| 4.3 Evaluación del Modelo digital de Elevaciones..... | 82 |

CAPITULO 5. Modelo Digital de Terreno. Digital Terrain

| | |
|---|--------|
| Modelling. EL- SHEIMY Naser. 1999..... | 87 |
| 5.1 Concepto de Modelo Digital de Terreno..... | 88 |
| 5.2 Visión Histórica..... | 89 |
| 5.3 Estructura de Datos..... | 90 |
| 5.3.1 Modelos de Triángulos Irregulares..... | 90 |
| 5.3.2 Modelos de Mallas Regulares..... | 93 |
| 5.4 Elementos importantes para un Modelo Digital de Terreno..... | 95 |
| 5.5 Precisión de un Modelo Digital de Terreno..... | 96 |
| 5.6 Fuentes de error..... | 97 |
| CAPITULO 6. Aspectos finales de los Modelos Digitales..... | 99 |
| 6.1 Representación de los Métodos de Interpolación..... | |
| 6.2 Aplicaciones de los Modelos Digitales..... | |
| 6.3 Conclusiones..... | |
| Bibliografía..... | |

LISTA DE TABLAS

| | Pág. |
|---|-------------|
| Tabla 1. Métodos de Captura de Información..... | 19 |
| Tabla 2. Tipos de Error de Topografía con GPS..... | 26 |
| Tabla 3. Comparación relativa entre el Modelo Raster y el Vectorial..... | 81 |
| Tabla 4. Tablas de Koope..... | 96 |

LISTA DE FIGURAS

| | Pág. |
|---|-------------|
| Figura 1. Los Modelos como gran herramienta..... | 13 |
| Figura 2. Maqueta de una superficie terrestre..... | 15 |
| Figura 3. Mapas Topográficos..... | 16 |
| Figura 4. Reconstrucción de un edificio prerrománico..... | 17 |
| Figura 5. Altimetro..... | 20 |
| Figura 6. Altimetro Barométrico..... | 20 |
| Figura 7. Satélite GPS..... | 22 |
| Figura 8. Código Pseudo Aleatorio..... | 24 |
| Figura 9. Señales entre satélites GPS..... | 25 |
| Figura 10. Constelación GPS en orbita..... | 27 |
| Figura 11. Estructura Básica de la Estación Total..... | 31 |
| Figura 12. Mesa Digitalizadora..... | 33 |
| Figura 13. Scanner marca Zeiss..... | 36 |
| Figura 14. Interpolación Espacial..... | 38 |
| Figura 15. Método TIN..... | 40 |
| Figura 16. Polígono de Thiessen..... | 41 |
| Figura 17. Triangulación de Delaunay..... | 43 |
| Figura 18. Diagrama de Voronoi..... | 45 |
| Figura 19. Triangulación optima a partir de circunferencias..... | 50 |
| Figura 20. Ejemplo de IDW..... | 52 |

| | |
|---|----|
| Figura 21. Determinación grafica del exponente optimo..... | 56 |
| Figura 22. Triangulación de Delaunay y Dirichlet..... | 57 |
| Figura 23. Triangulación de Dirichlet..... | 72 |
| Figura 24. Sistema de referencia espacial..... | 88 |
| Figura 25. Ejemplo de MDT..... | 90 |
| Figura 26. Generación de un MDT con el método TIN..... | 94 |
| Figura 27. Ejemplo de una malla cuadrada..... | 95 |
| Figura 28. Ejemplo de una malla triangular | |

PRESENTACION

MODELOS DIGITALES, Compilación, que destaca la relación estrecha que existe entre las Ciencias Básicas, la Informática y su aplicación en el campo de la Topografía. Los presentes estudiantes realizaron este proyecto compilando información actualizada sobre la generación de modelos Digitales y buscando los mejores autores para su desarrollo.

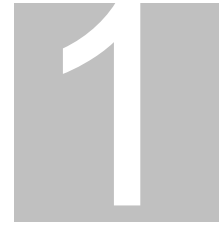
Sabemos que la Topografía en los últimos años ha venido evolucionando vertiginosamente en sus métodos clásicos e instrumentos que permiten obtener información inmediata y precisa, además se vienen desarrollando cada día investigaciones con respecto a la modelación de superficies terrestres.

Con el objetivo de dar a conocer uno de los estados actuales de la Topografía, el texto se estructura en seis capítulos, en los que se describen los principales métodos de captura de datos que soportan el tipo de información para generar un Modelo Digital y posteriormente los métodos de interpolación para su generalización. Existe un capítulo dedicado al concepto, estructura, calidad de un Modelo Digital de Elevaciones y sobre el cual muchos autores presentan sus ideas básicas. El texto concluye con las aplicaciones más representativas que tienen los Modelos Digitales.

Finalmente agradecemos a Dios y a nuestras familias por su apoyo incondicional para la culminación de nuestro proyecto, sin olvidar la colaboración que nos brindaron los docentes del programa de Topografía con su conocimiento.

JHON ALEXANDER GUIOT
ANDRES FELIPE LONDOÑO

CONCEPTUALIZACION BASICA



Modelo: un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones que se utilizan para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica. ¹

El modelo reproduce solamente algunas propiedades del objeto o del sistema original que queda representado por otro sistema de menor complejidad. Tan simplificación se puede llevar a cabo de muchas maneras, en función de los objetivos que sea necesario cubrir al establecerlo.

Los modelos se construyen para conocer o predecir propiedades del objeto real.² La existencia de la relación simétrica entre modelo y realidad permite que un resultado relativo al modelo pueda traducirse en otro relativo al objeto real y permitir que las respuestas derivadas del modelo sean aplicables a la realidad sin perder sentido.

Dado que el modelo representa la realidad con una menor cantidad de información, existe un error inherente al proceso de modelización que puede ser reducido pero no limitado.

La reducción del error puede hacerse por dos caminos complementarios:

- Mayor precisión en la medida y mejor selección de los componentes, sin aumentar la complejidad del modelo.

¹ RÍOS, Sixto. Modelización. Madrid: Alianza Ediciones. AU 822 1995.

² FELICÍSIMO, Ángel M. Modelos digitales del terreno. Introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales. Oviedo: Pentalfa. 1994

- Mayor cantidad de componentes, aumentando de esta manera la complejidad del modelo.

La eliminación del error implicaría la identificación del modelo con el objeto real; en este sentido, debe buscarse un compromiso entre la complejidad del modelo y el error admisible en los resultados.

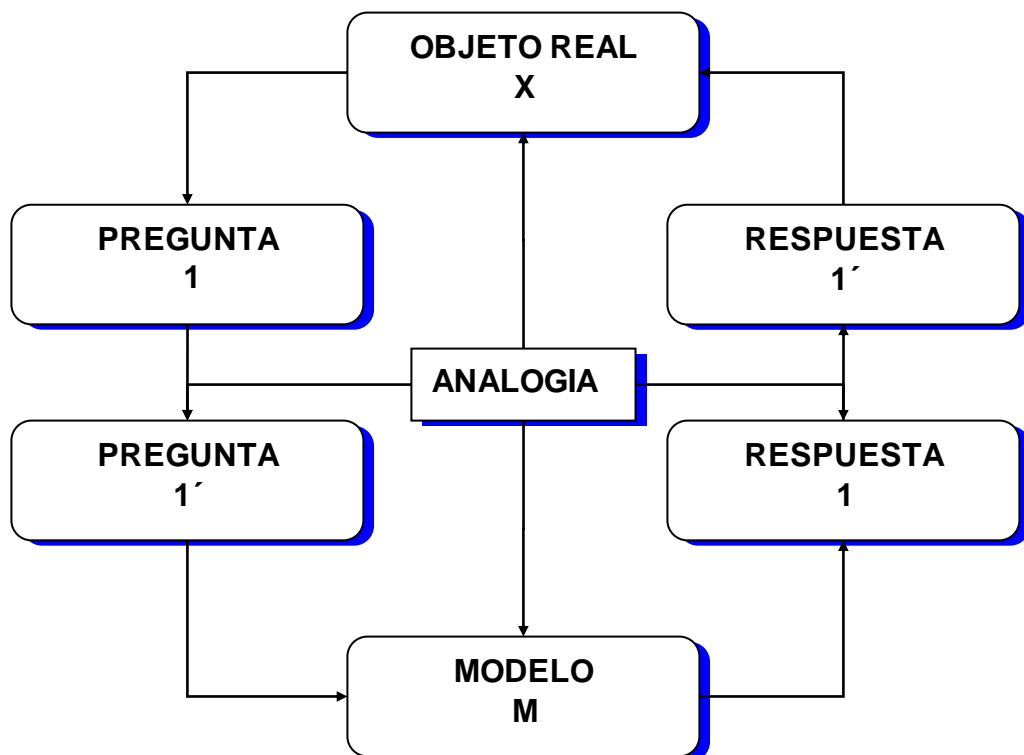


Fig. No 1 Los modelos son una gran herramienta para responder a preguntas sobre la realidad que no serían accesibles mediante la experimentación directa.

Elaboración propia a partir de Felicísimo.

En la figura No 1 establece una relación con la realidad que debe ser equitativa, es decir, la correspondencia entre el objeto real y el modelo deben ser al menos parcialmente cambiante, y debe permitir la traducción de algunas propiedades del modelo a la realidad. La existencia de la relación equitativa

permite que un resultado 1' relativo al modelo pueda traducirse a 1 y de esta forma que la respuesta originada del modelo sean aplicables a la realidad en cualquier sentido.

Modelo Matemático en Topografía

Un modelo matemático en el cálculo de ajustes es una ecuación o un conjunto de ecuaciones que representan o definen una condición de ajuste. Esto puede ser conocido o asumido si el modelo matemático representa la situación física adecuada, los errores pueden ser esperados de acuerdo a la curva de distribución normal. Por ejemplo, un modelo matemático bien conocido es que la suma de los ángulos interiores en un triángulo plano es de 180° . Este modelo es adecuado si la topografía es limitada a una región pequeña.

Sin embargo, si los triángulos son muy largos, este modelo no es considerado para errores sistemáticos causados por la curvatura de la tierra. En este caso el modelo es inadecuado y requiere ser modificado para incluir correcciones por exceso esférico. En poligonación, el modelo matemático de cálculos planos es adecuado para mediciones pequeñas, pero si la extensión de la medición llega a ser demasiado larga, de nuevo el modelo deberá ser cambiado para considerar los errores sistemáticos causados por la curvatura de la tierra.

Esto puede ser realizado por transformación de observaciones dentro de un sistema de mapeo parecido al sistema de coordenadas planas o trabajando con ecuaciones de condición geodésicas. No sobra decirlo, si el modelo no es apto para una condición física, un ajuste incorrecto será el resultado. ³

³ WOLF, Paul and GHILANI, Charles. Adjustment Computations. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1997

TIPOS DE MODELOS

En los modelos hay clasificaciones que los distinguen claramente unos de otros, en Turner (1970:364) se da claridad a tres tipos de modelos básicos: modelo icónico, modelo análogo y modelo simbólico.

- **Modelo Icónico:** la relación de correspondencia se establece a través de las propiedades morfológicas, habitualmente un cambio de escala con conservación del resto de las propiedades topológicas. Un ejemplo de modelo icónico es una maqueta, donde se ha establecido una reducción de tamaño conservando las relaciones dimensionales básicas. Sin embargo, este proceso de modelización tiene implicaciones menos obvias que, según los casos, pueden tener importancia. (Felicísimo, 1994)

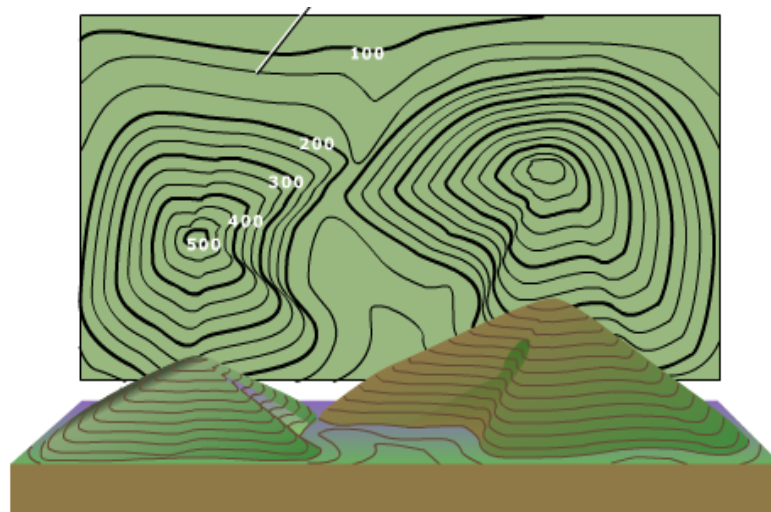


Fig. 2 Maqueta de una superficie terrestre.

- **Modelo Análogo:** poseen algunas propiedades similares a los objetos representados pero sin ser una réplica morfológica de los mismos. Normalmente, para su construcción se utiliza un conjunto de convenciones que sintetizan y codifican propiedades del objeto real para facilitar la lectura o interpretación de las mismas.

Un ejemplo de modelo análogo es un mapa impreso, que se construye mediante un conjunto de convenciones cartográficas relativamente complejas, que conducen a un resultado final claramente distinto del objeto representado. Mediante esta transformación se persigue hacer legibles propiedades tales como las altitudes, distancias, localización física o de objetos geográficos, sus relaciones e importancia. (Felicísimo, 1994)



Fig. 3 Los mapas topográficos permiten conocer la topografía del terreno a través de sombreados, curvas de nivel u otros sistemas de representación gráfica.

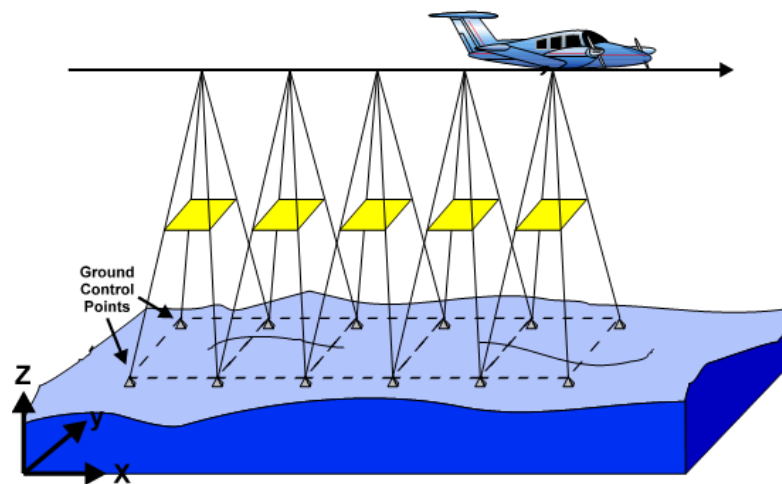
- **Modelos Simbólicos:** se construyen mediante reglas notablemente más abstractas ya que ésta denominación suele aplicarse a los casos en el que el objeto real se representa mediante una codificación matemática (matemática, estadística. etc.).

Un ejemplo de modelo simbólico es la representación de un edificio mediante la identificación y codificación en una estructura geométrica de sus elementos básicos. (Felicísimo, 1994)



Fig.4 Reconstrucción de un edificio prerománico a partir de un levantamiento simulado basado en restos de cimiento y muros. (Felicísimo, 1994)

CAPTURA DE DATOS ALTIMÉTRICOS



2.1 Captura de datos Altimétricos

Los métodos básicos para conseguir los datos de altitudes pueden dividirse en dos grupos: **directos** (primary data) cuando las medidas se realizan directamente sobre el terreno real, e **indirectos** (secondary data) cuando se utilizan documentos analógicos o digitales elaborados previamente.⁴

En la siguiente tabla se puede apreciar cada uno de los métodos básicos de captura de información:

Tabla No 1 Métodos de Captura de Información

| Directos | |
|-------------------|--|
| Altimetría | Altimetro transportado por plataforma aérea. |
| GPS | Sistema de localización mediante satélites. |
| Topografía | Estaciones topográficas con salida digital. |
| Indirectos | |
| Restitución | Digital: imágenes captadas por satélite o radares. |
| | Analógico: pares fotográficos . |
| Digitalización | Manual: mesas digitalizadoras |
| | Automática: scanner |

Fuente: Reynier Fernández de la Torre (2004)

⁴ FELICISIMO Ángel. Modelos digitales del terreno. Introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales. Oviedo: Pentalfa.1994

2.2 Captura de datos directos0

2.2.1 Altímetro

Dispositivo mecánico o eléctrico que se utiliza en las aeronaves para medir la altura a la que se encuentran con respecto a la superficie de la tierra. Hay dos tipos de altímetros: los barométricos y los radioaltímetros.



Fig. No 5 Ejemplo de un Altímetro

Los barométricos se fundamentan en la disminución de la presión atmosférica cuando aumenta la altitud. Consisten en una cápsula aneroide, que es un disco metálico hueco, semivaciado de aire, que se expande y contrae con los cambios de presión atmosférica (es decir, de altitud). Esta cápsula va unida por un sistema de engranajes y palancas al indicador de una esfera graduada.

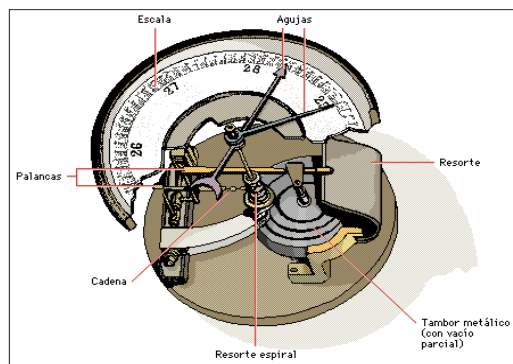


Fig. No 6 Ejemplo de un Altímetro Barométrico

Los radioaltímetros son sistemas de radar modificados para medir únicamente distancias en vertical. Desde el avión se envía un impulso de radiación electromagnética hacia abajo. Una antena del avión recibe las ondas reflejadas por la superficie de la tierra. Midiendo la diferencia de tiempo (t) entre el envío y la recepción de las ondas, se puede averiguar la altitud (h) aplicando la ecuación⁵ :

$$h = tc / 2 \quad (1)$$

Donde c es la velocidad de la luz.

Una antena del avión recibe las ondas reflejadas por la superficie de la tierra. Midiendo la diferencia de tiempo (t) entre el envío y la recepción de las ondas, se puede averiguar la altitud (h) aplicando la ecuación (1).

⁵ Microsoft Corporation. Biblioteca de Consulta Encarta © .2005.

2.2.2 Sistema de posicionamiento global (GPS)

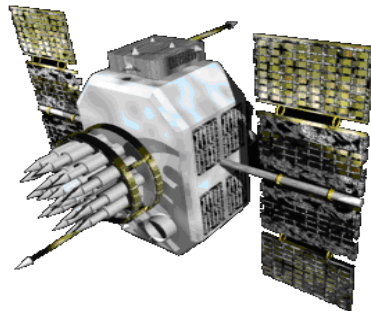


Fig. No 7 Satélite GPS

La navegación, el posicionamiento y el sistema de cronometraje conocido como GPS es una combinación de varios sistemas de navegación satelital y conceptos desarrollados por el Departamento de Defensa de U.S.A (DOD).

El sistema GPS funciona en cinco pasos lógicos, descritos a continuación:

- **Triangulación:** La base del GPS es la triangulación desde los satélites
- **Distancias:** Para triangular, el receptor de GPS mide distancias utilizando el tiempo de viaje de señales de radio.
- **Tiempo:** para medir el tiempo de viaje de las señales, el GPS necesita un control muy estricto del tiempo y lo logra con algunos trucos.
- **Posición:** Además de la distancia, el GPS necesita conocer exactamente donde se encuentran los satélites en el espacio. Orbitas de mucha altura y cuidadoso monitoreo, le permiten hacerlo.
- **Corrección:** Finalmente el GPS debe corregir cualquier demora en el tiempo de viaje de la señal que ésta pueda sufrir mientras atraviesa la atmósfera.

La triangulación de los satélites

El GPS utiliza los satélites en el espacio como puntos de referencia para ubicaciones en la tierra, esto se logra mediante una muy buena medición de la distancia hacia tres satélites como mínimo, lo que nos permite “triangular” la posición en cualquier parte de la tierra.

La idea geométrica es:

Supóngase que se mide una distancia al primer satélite y resulta ser de 11.000 millas (aproximadamente 20.000Km); sabiendo que se está a 11.000 millas de un satélite determinado, no se puede por lo tanto estar en cualquier punto del universo, ya que esto limita la posición a la superficie de una esfera, que tiene como centro el satélite y cuyo radio es de 11.000 millas.

Se mide una distancia a un segundo satélite y se descubre que se está a 12.000 millas del mismo, lo que nos dice que no se está solamente en la primera esfera, correspondiente al primer satélite, sino también sobre otra esfera que se encuentra a 12.000 millas del segundo satélite.

Ahora si se mide una distancia a un tercer satélite y se descubre que se está a 13.000 millas del mismo, esto limita la posición aún más, a los dos puntos en los cuales la esfera de 13.000 millas corta la circunferencia que resulta de la intersección de las dos primeras esferas; entonces midiendo la distancia a tres satélites se limita el posicionamiento a solo dos puntos posibles.

Para decidir cual de ellos es la posición, se podría efectuar una nueva medición a un cuarto satélite, pero normalmente uno de los dos puntos posibles resulta ser muy improbable por su ubicación demasiado lejana de la superficie terrestre y puede ser destacado sin necesidad de mediciones posteriores.

Midiendo las distancias a los satélites

Sabemos ahora que la posición se calcula a partir de la medición de la distancia hasta por lo menos tres satélites. Pero, ¿cómo podemos medir la distancia hacia algo que está flotando en algún lugar en el espacio?, se hace midiendo el tiempo que tarda una señal emitida por el satélite en llegar hasta el receptor de GPS.



Fig. No 8 Señales entre satélites GPS

La idea matemáticamente, es:

Supongamos que un auto viaja a 60 Kilómetros por hora durante dos horas, ¿qué distancia recorrió?

Velocidad (60 Km. /h) x Tiempo (2 horas) == Distancia (120 Km.)

En el caso del GPS se está midiendo una señal de radio, que se sabe que viaja a la velocidad de la luz, alrededor de 300.000 Km. por segundo. Queda el problema de medir el tiempo de viaje de la señal (Que, obviamente, viene muy rápido)

Sincronicemos nuestros relojes

El problema de la medición de ese tiempo es complicado. Los tiempos son extremadamente cortos. Si el satélite estuviera justo sobre nuestras cabezas, a unos 20.000 Km, de altura, el tiempo total de viaje de la señal hacia nosotros sería de algo más de 0.06 segundos. Se estaría necesitando relojes muy precisos.

Pero, aún admitiendo que se tiene relojes con la suficiente precisión, ¿cómo medimos el tiempo de viaje de la señal?

Supongamos que el GPS, por un lado, y el satélite, por otro, generan una señal auditiva en el mismo instante exacto. Supongamos también que nosotros, parados al lado de nuestro receptor de GPS, podamos oír ambas señales (Obviamente es imposible "oír" esas señales porque el sonido no se propaga en el vacío), oiríamos dos versiones de la señal, una de ellas inmediatamente, la generada por nuestro receptor GPS y la otra con cierto atraso, la proveniente del satélite, porque tiene que recorrer alrededor de 20.000 Km, para llegar hasta nosotros. Podemos decir que ambas señales no están sincronizadas.

Si se intenta saber cual es la magnitud de la demora de la señal proveniente del satélite se podría retardar la emisión de la señal del GPS hasta lograr la perfecta sincronización con la señal que viene del satélite.

El tiempo de retardo necesario para sincronizar ambas señales es igual al tiempo de viaje de la señal proveniente del satélite. Supongamos que sea de 0.06 segundos, conociendo éste tiempo, lo multiplicaremos por la velocidad de la luz y ahí obtendremos la distancia hasta el satélite

**Tiempo de retardo (0.06 seg.) * Vel. De la luz (300.000 Km. /seg) = Dist.
(18.000 Km.)**

Así es básicamente, como funciona el GPS.

La señal emitida por el GPS y por el satélite es algo llamado “Código Pseudo Aleatorio” (Pseudo Random Code).

Un Código Aleatorio

Este Código Pseudo Aleatorio es una parte fundamental del GPS. Físicamente solo se trata de una secuencia o código digital muy complicado. O sea una señal que contiene una sucesión muy complicado de pulsos “on” y “off”⁶, como pueden ver:



Fig. No 8 Código Pseudo Aleatorio

La señal es tan complicada que casi parece un ruido eléctrico generado por el azar. De allí su denominación de “Pseudo Aleatorio”.

Hay varias y muy buenas razones para tal complejidad. La complejidad del código ayuda a asegurarnos que el receptor de GPS no se sintonice accidentalmente con alguna otra señal cualquiera (que tenga la misma frecuencia).

Dado que cada uno de los satélites tiene su propio y único Código Pseudo Aleatorio, esta complejidad también garantiza que el receptor no se confunda

⁶ GUTOVNIK, Pedro. Como funciona el GPS en 5 pasos lógicos. Trimble Navigation Limited.1999.

accidentalmente de satélite. De esa manera, también es posible que todos los satélites transmitan en la misma frecuencia sin interferirse uno al otro. Eso también complica a cualquiera que intente interferir el sistema desde el exterior al mismo. El Código Pseudo Aleatorio le da la posibilidad al departamento de defensa de EEUU de controlar el acceso al sistema GPS.

Cuando se empieza a explicar el mecanismo de la emisión de las señales por GPS y el satélite, resulta que ambos comenzaban la emisión de la señal exactamente al mismo tiempo. ¿Pero como puede asegurarse que todo este perfectamente sincronizado?

Control perfecto del tiempo

Si la medición del tiempo del viaje de una señal de radio es clave para el GPS, los relojes que se emplean deben ser muy exactos, dado que si se miden con un desvío de un milésimo de segundo, a la velocidad de la luz, ello se traduce en un error de 300 Km.

Por el lado de los satélites, el timing es casi perfecto porque llevan a bordo los relojes atómicos de increíble precisión.

¿Pero que pasa con los receptores situados en la tierra?

El secreto para obtener un timing tan perfecto es de efectuar una medición satelital adicional; Resulta que si tres mediciones perfectas pueden posicionar un punto en un espacio tridimensional, cuatro mediciones imperfectas pueden lograr lo mismo.

Una medición adicional remedia el desfase del timing.

Si todo fuera perfecto (es decir que los relojes de los GPS lo fueran), entonces todos los rangos (distancias) a los satélites se interceptarían en un único punto (que indica la posición). Pero con relojes imperfectos, una cuarta medición, efectuados como control cruzado. No interceptará con los tres primeros.

De esa manera la computadora que maneja el GPS detectará la discrepancia y atribuirá la diferencia a una sincronización imperfecta con la hora universal.

Dado que cualquier discrepancia con la hora universal afectará a las cuatro mediciones, el receptor buscará un factor de corrección único que siendo aplicado a sus mediciones de tiempo hará que los rangos coincidan en un solo punto.

Dicha corrección permitirá al reloj del receptor ajustarse nuevamente a la hora universal y de esa manera tenemos un reloj atómico en la palma de nuestra mano.

Una vez que el receptor de GPS aplica dicha corrección al resto de sus mediciones, obtenemos un posicionamiento preciso.

Una consecuencia de este principio es que cualquier GPS de alta calidad debe ser capaz de sintonizar al menos cuatro satélites de manera simultánea. En la práctica, casi todos los GPS en venta actualmente, acceden a más de 6, y hasta a 12, satélites simultáneamente.

Ahora bien, con el Código Pseudo Aleatorio como un pulso confiable para asegurar la medición correcta del tiempo de la señal y la medición adicional como elemento de sincronización con la hora universal, tenemos todo lo necesario para medir nuestra distancia a un satélite en el espacio.

Pero, para que la triangulación funcione necesitamos conocer no sólo la distancia, sino que debemos conocer dónde están los satélites con toda exactitud.

Conocer dónde están los satélites en el espacio

A lo largo de esta descripción del GPS hemos estado asumiendo que conocemos dónde están los satélites en sus órbitas y de esa manera como se puede utilizar como puntos de referencia.

¿Pero, cómo podemos saber donde están exactamente? Todos ellos están flotando a unos 20.000 Km de altura en el espacio.

Un satélite a gran altura se mantiene estable

La altura de 20.000 Km. es en realidad un gran beneficio para este caso, porque algo que está a esa altura está bien despejado de la atmósfera. Eso significa que orbitará de manera regular y predecible mediante ecuaciones matemáticas sencillas.

La Fuerza Aérea de los EEUU colocó cada satélite de GPS en una órbita muy precisa, de acuerdo al Plan Maestro de GPS.

En tierra, todos los receptores de GPS tienen un almanaque programado en sus computadoras que les informan donde está cada satélite en el espacio, en cada momento.

El Control Constante agrega precisión

Las órbitas básicas son muy exactas pero con el fin de mantenerlas así, los satélites de GPS son monitoreados de manera constante por el Departamento de Defensa.

Ellos utilizan radares muy precisos para controlar constantemente la exacta altura, posición y velocidad de cada satélite.

Los errores que ellos controlan son los llamados errores de efemérides, o sea evolución orbital de los satélites. Estos errores se generan por influencias gravitacionales del sol y de la luna y por la presión de la radiación solar sobre los satélites.

Estos errores son generalmente muy sutiles pero si queremos una gran exactitud debemos tenerlos en cuenta.

Corrigiendo el mensaje

Una vez que el Departamento de Defensa ha medido la posición exacta de un satélite, vuelven a enviar dicha información al propio satélite. De esa manera el satélite incluye su nueva posición corregida en la información que transmite a través de sus señales a los GPS.

Esto significa que la señal que recibe un receptor de GPS no es solamente un Código Pseudo Aleatorio con fines de timing. También contiene un mensaje de navegación con información sobre la órbita exacta del satélite

Con un timing perfecto y la posición exacta del satélite podríamos pensar que estamos en condiciones de efectuar cálculos perfectos de posicionamiento. Sin embargo debemos resolver otros problemas.⁷

Corrigiendo Errores

Hasta ahora hemos estado tratando los cálculos del sistema GPS de manera muy abstracta, como si todo el proceso ocurriera en el vacío. Pero en el mundo real hay muchas cosas que le pueden suceder a una señal de GPS para transformarla en algo menos que matemáticamente perfecta.

Para aprovechar al máximo las ventajas del sistema un buen receptor de GPS debe tener en cuenta una amplia variedad de errores posibles. Veamos que es lo que debemos enfrentar.

Un Rudo Viaje a través de la atmósfera

En primer lugar, una de las presunciones básicas que hemos estado usando a lo largo de ésta descripción no es exactamente cierta. Hemos estado afirmando que podemos calcular la distancia a un satélite multiplicando el tiempo de viaje de su señal por la velocidad de la luz, Pero la velocidad de la luz sólo es constante en el vacío.

Una señal de GPS pasa a través de partículas cargadas en su paso por la ionosfera y luego al pasar a través de vapor de agua en la troposfera pierde algo de velocidad, creando el mismo efecto que un error de precisión en los relojes.

Hay un par de maneras de minimizar este tipo de error. Por un lado, podríamos predecir cual sería el error tipo de un día promedio. A esto se lo llama

⁷ GUTOVNIK, Pedro. Como funciona el GPS en 5 pasos lógicos. Trimble Navigation Limited.1999.

modelación y nos puede ayudar pero, por supuesto, las condiciones atmosféricas raramente se ajustan exactamente el promedio previsto.

Otra manera de manejar los errores inducidos por la atmósfera es comparar la velocidad relativa de dos señales diferentes. Esta medición de doble frecuencia es muy sofisticada y solo es posible en receptores GPS muy avanzados.

Un Rudo Viaje sobre la tierra

Los problemas para la señal de GPS no terminan cuando llega a la tierra. La señal puede rebotar varias veces debido a obstrucciones locales antes de ser captada por nuestro receptor GPS.

Esté error es similar al de las señales fantasma que podemos ver en la recepción de televisión. Los buenos receptores GPS utilizan sofisticados sistemas de rechazo para minimizar este problema.

Problemas en el satélite

Aún siendo los satélites muy sofisticados no tienen en cuenta minúsculos errores en el sistema.

Los relojes atómicos que utilizan son muy, pero muy, precisos, pero no son perfectos. Pueden ocurrir minúsculas discrepancias que se transforman en errores de medición del tiempo de viaje de las señales.

Aunque la posición de los satélites es controlada permanentemente, tampoco pueden ser controlados a cada segundo. De esa manera pequeñas variaciones de posición o de efemérides pueden ocurrir entre los tiempos de monitoreo.

Algunos ángulos son mejores que otros

La geometría básica por si misma puede magnificar estos errores mediante un principio denominado "Dilación Geométrica de la Precisión", o DGDP

Suena complicado pero el principio es simple. En la realidad suele haber más satélites disponibles que los que el receptor GPS necesita para fijar una posición, de manera que el receptor toma algunos e ignora al resto.

Si el receptor toma satélites que están muy juntos en el cielo, las circunferencias de intersección que definen la posición se cruzarán a ángulos con muy escasa diferencia entre sí. Esto incrementa el área gris o margen de error acerca de una posición.

Si el receptor toma satélites que están ampliamente separados, las circunferencias interceptan a ángulos prácticamente rectos y ello minimiza el margen de error.

Los buenos receptores son capaces de determinar cuales son los satélites que dan el menor error por Dilución Geométrica de la Precisión.

Errores Intencionales

Aunque resulte difícil de creer, el mismo Gobierno que pudo gastar 12.000 Millones de dólares para desarrollar el sistema de navegación más exacto del mundo, está degradando intencionalmente su exactitud. Dicha política se denomina "Disponibilidad Selectiva" y pretende asegurar que ninguna fuerza hostil o grupo terrorista pueda utilizar el GPS para fabricar armas certeras.

Básicamente, el Departamento de Defensa introduce cierto "ruido" en los datos del reloj satelital, lo que a su vez se traduce en errores en los cálculos de posición. El Departamento de Defensa también puede enviar datos orbitales

ligeramente erróneos a los satélites que estos reenvían a los receptores GPS como parte de la señal que emiten.

Estos errores en su conjunto son la mayor fuente unitaria de error del sistema GPS. Los receptores de uso militar utilizan una clave encriptada para eliminar la Disponibilidad Selectiva y son, por ello, mucho más exactos.

La línea final

Afortunadamente todos esos errores no suman demasiado error total, existe una forma de GPS, denominada GPS Diferencial, que reduce significativamente estos problemas.

Topografía con GPS

La mas importante diferencia entre GPS y las técnicas de topografía tradicional son de que un factor del GPS no requiere una línea o señales entre medición de puntos. Estas señales pueden tenerse en cuenta para aumentar la eficacia y productividad de la topografía con GPS ventajosamente.

Una topografía realizada con GPS típica consiste en los siguientes pasos⁸:

- Identificación del sitio y su accesibilidad.
- Reconocimiento de la geometría de obstáculos del sitio de trabajo.
- Observaciones de GPS por mapeo.
- Observaciones de GPS por conducción.
- Longitud en la estimación de la línea base.
- Cumplimiento del ajuste de la red.

⁸ MOFFIT, Francis and BOSSLER, John. Surveying. New York: Addison Wesley Longman. Tenth Edition. 1998.

- Evaluación de los resultados ajustados.
- Cumplimiento del formato de conversión de acuerdo a los requisitos usados.

Comúnmente 25 satélites de GPS están en órbita, si una observación del sitio es evidente de obstáculos, el mapeo no puede ser elaborado porque en este caso el satélite convierte los tiempos que llegan con errores, como si estuvieran bien. La presencia de los obstáculos pueden ser afectados por la visibilidad del satélite y por eso el mapeo se hace necesario para determinar el periodo de mejor cobertura del satélite y para obtener las observaciones de GPS.

Las técnicas ondulatorias son comunes en la topografía GPS. Habitualmente las técnicas más usadas es la mencionada atrás con 3 o más receptores en el modo stop-and-go (pare y siga); en este modo uno de los receptores es colocado en base a una estación preferiblemente, el primero con pocas obstrucciones, el segundo receptor (receptor común) está ubicado sobre los puntos a ser medidos.



Fig. No 9 Constelación GPS en órbita

El receptor posee indicadores internos que determinan la longitud del tiempo requerido para obtener el grado de precisión. Luego las señales con distorsión son determinadas, el resto de los puntos pueden ser medidos, justo en la época de las observaciones, asumiendo que el cierre de 4 satélites con buena geometría son los necesarios para almacenar los datos tomados. Los receptores tienen indicadores informando a los usuarios si un determinado punto podrá ser reobservado por un largo tiempo porque el cierre de un mínimo de 4 satélites no fue almacenado.⁹

TABLA No 2 Tipos de error en la topografía GPS

| Tipo de error | Rango de error (σ) en metros |
|----------------------------------|---|
| Disponibilidad selectiva | 24.0 |
| Retrasos en la atmósfera | |
| ionosfera | 7.0 |
| troposfera | 0.7 |
| Hora y error de las efemérides | 3.6 |
| Recepción del ruido | 1.5 |
| Multipath | 1.2 |
| Error total del rango | 25.3 |
| Precisión del resultado total | 50.00 |
| $\sqrt{\sigma^2_x + \sigma^2_y}$ | |

Fuente: Moffit y Bossler (1998)

⁹ MOFFITT Francis and BOSSLER John. Surveying. New York: Addison Wesley Longman. 1998

2.2.3 Estación Topográfica

Es un instrumento topográfico de última generación, que integra en un solo equipo medición electrónica de distancias (EDM) y ángulos, comunicaciones internas que permiten la transferencia de datos a un procesador interno o externo y que es capaz de realizar múltiples tareas de medición, almacenando datos y cálculos en tiempo real.

Además dispone de los elementos ópticos y mecánicos, imprescindibles en todos los taquímetros.

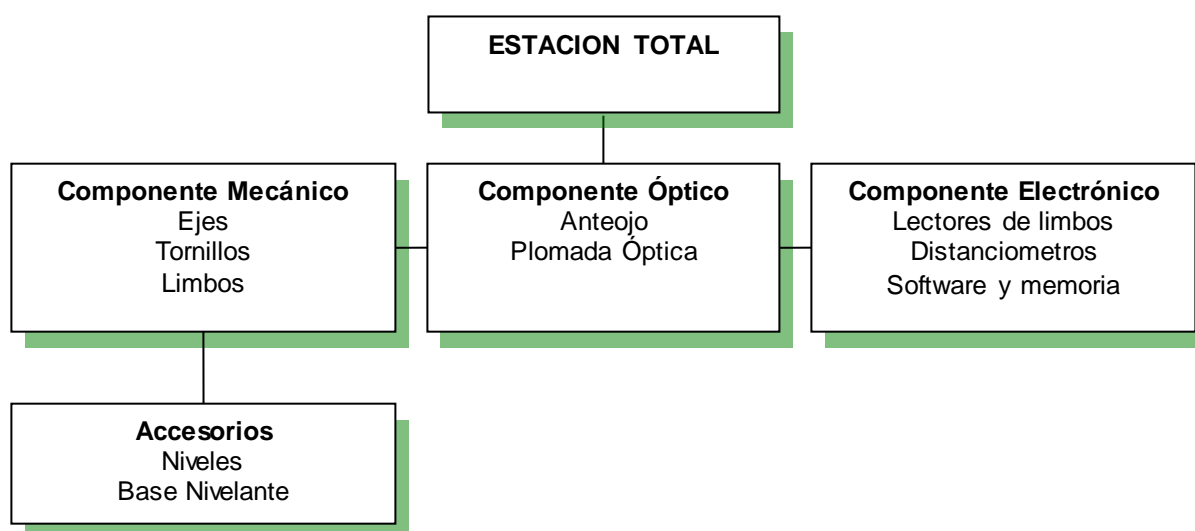


Fig. No 10 Estructura básica de la Estación Total

Elaboración propia

Los componentes óptico y mecánico no difieren de los que llevan los teodolitos y taquímetros clásicos de uso en topografía. La diferencia, y gran ventaja de la Estación Total es la componente electrónica, que posee una memoria interna

para almacenar datos de campo, que la hace más versátil y rápida que los instrumentos clásicos.

2.3 Captura de datos indirectos

2.3.1 Restitución

La restitución es la acción de dibujar en planos y mapas los objetos ó rasgos que aparecen en fotografías, rectificadas dándole escala y posición. ¹⁰

Sistema Fotogrametrico Digital (SFD)

“Conjunto de hardware y software cuyo objetivo es la generación de productos fotogrametricos a partir de imágenes digitales mediante técnicas manuales y automatizadas” (1988, ISPRS).

Estación Fotogramétrica Digital (EFD)

La estación fotogramétrica digital, o también llamado restituidor digital, es el elemento fundamental del sistema fotogrametrico.

Un sistema fotogrametrico digital para aplicaciones cartográficas (para nuestro caso, generación de MDE), debe tener los siguientes elementos elementos:

- Elementos de captura o conversión de imágenes en formato digital.
- Sistema de entrada de datos en forma digital.
- Un sistema grafico de color real con una velocidad de transferencia alta, para posibilitar la realización de trabajos en tiempo real.
- Sistema de medida en 3D de las imagines digitales.

¹⁰ INSTITUTO DE INFORMACIÓN TERRITORIAL DE JALISCO. Glosario de términos.2005.

Las estaciones fotogramétricas digitales se pueden clasificar de acuerdo a la información que se requiera¹¹:

- Estereo: excelente para la restituir, posee un alto sistema de rendimiento que genera un abanico de productos como: modelos digitales, aerotriangulación, etc.
- Mono: extracción de datos planimétricos a partir de ortoimágenes en formato digital, utilizando como información auxiliar el modelo digital de terreno. Se obtiene visión en 3D.
- Obtención de MDT: extracción de MDT a partir de imágenes estereoscópicas generalmente de forma automatizada.

SATÉLITE ASTER

Otro elemento con la condición de restituir es el satélite ASTER (Advance Space-borne Thermal Emission and Reflection Radiometer), diseñado por el gobierno de Japón con el fin de obtener datos geológicos detallados y estudiar fenómenos que pudieran producir un impacto ambiental a nivel global, como por ejemplo la actividad volcánica. ASTER es un sensor satelital de imágenes de alta resolución, transportado por el satélite TERRA, lanzado el 18 de diciembre de 1999.

Este sensor tiene 3 subsistemas que registran datos simultáneamente de las regiones del espectro correspondiente al visible e infrarrojo cercano (VNIR), infrarrojo medio o de onda corta (SWIR) y del infrarrojo termal (TIR). El VNIR tiene 3 bandas con 15 metros de resolución; SWIR registra 6 bandas con 30 metros de resolución; y TIR tiene 5 bandas con 90 metros de resolución.

¹¹ CUARTERO, Aurora. Fotogrametría Digital. Notas de clase. España: Universidad de Extremadura. 2001

En los casos de emergencias (volcanes, inundaciones, incendios, etc.), pueden programarse registros de datos sobre el área afectada cada 2 días, mediante giros laterales del sensor de hasta 24° en el VNIR. El ancho de barrido de ASTER es de 60 Km.

Además de alta precisión geométrica y radiométrica, es posible obtener pares estereoscópicos a lo largo del camino orbital. El ancho de barrido de ASTER es de 60 Km. La revisita es cada 16 días, sin embargo, en caso de emergencias tales como vulcanismo, incendios o inundaciones, se pueden obtener datos cada 2 días en virtud de la posibilidad de reorientar el sensor hasta -24° y $+24^{\circ}$ (VNIR) para registrar imágenes en las órbitas adyacentes.¹²

Este tipo de tecnología permite, entre sus mayores ventajas, identificar la distribución precisa de diferentes minerales de alteración, rocas con distintos contenidos de sílice y también producir un **Modelo Digital de Terreno**.

¹² SEGEMAR. Proyecto GEOSAT-AR. Boletín No 14. Marzo 2003.

2.3.2 Digitalización

2.3.2.1 Digitalización Manual

La digitalización manual se realiza mediante una Mesa digitalizadora, que consiste de una base de plástico grande la cuál contiene una malla de ejes espaciados precisamente y orientados en las direcciones X y Y. Un cursor movible conteniendo un rollo de ejes y un fino retículo es utilizado para apuntar a imágenes en la fotografía, planos o mapas.

La corriente eléctrica en el rollo del cursor genera un campo magnético que se descubre por la cuadrícula de los ejes en la mesa. Basado en la proximidad del rollo al eje más cercano a X y Y dentro de la malla, el campo magnético genera una corriente eléctrica correspondiente que se descubre entonces y convierte las coordenadas X y Y. Estas coordenadas se transfieren seguidamente a una computadora.



Fig. No 11 Mesa Digitalizadora

La tabla digitalizadora generalmente produce una precisión (repetiblemente) de aproximadamente 0.0025 a 0.05mm, y su exactitud varia del gran manejo del fabricante al fabricante y del modelo para el modelo. El nivel de precisión es afectado por errores sistemáticos en los ejes de la malla son alineados como otros factores. El rango de precisión es aproximadamente 0.05mm para una alta calidad de digitalizada, y otro método es de 1mm para los modelos mas económicos.

Utilizando la mesa digitalizadora para medición de coordenadas de las fotografías, planos o mapas, son firmemente montados en la superficie digitalizada. La cinta puede usarse para montar la fotografía, planos o mapas, aunque esto puede producir una acumulación de residuo pegajoso en la superficie. Para evitar esta acumulación, es aconsejable poner una hoja plástica clara encima y fijarla con los ganchos en los bordes.¹³

¹³ WOLF Paul and DEWITT Bon. Elements of Photogrammetry with applications in GIS. New York: McGraw Hill. 3rd Edition. 2000.

2.3.2.2 Digitalización Automática

La digitalización automática se realiza mediante un scanner, el cual es un dispositivo usado para convertir el contenido de fotografías, planos o mapas desde una forma Análoga (una imagen de tono continuo) a una forma Digital (una serie de píxeles con sus niveles grises cuantificados por los valores numéricos).

Una vez la imagen está en la forma digital, la medida de la coordenada puede tener lugar en un ambiente de la computadora, o a través de un proceso manual que involucra a un operador humano que apunta a los rasgos desplegados en una pantalla de la computadora, o a través de imagen automatizada que procesa los algoritmos.



Fig. No 12 Scanner Marca Zeiss

Un número de scanners de calidad están comercialmente disponibles. Ellos varían en los acercamientos tomados en la conversión digital, que es esencial para que tenga suficiente geometría y permita una buena digitalización.

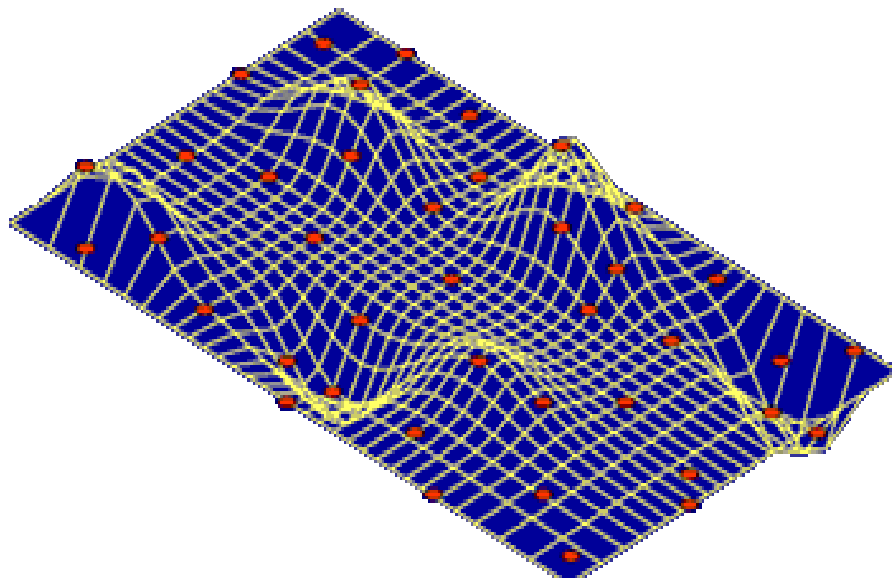
La resolución geométrica o espacial de un scanner es la indicación del tamaño del píxel en el resultante de la imagen, el tamaño del píxel normalmente es pequeño; cualquier detalle puede ser detectado en la imagen. La alta calidad del scanner podrá ser capaz de producir imágenes digitales con un mínimo del tamaño del píxel en el orden de 5 a 15 μm .

La resolución radiométrica de un scanner es la indicación del número de cuantificación de nivel (correspondiendo a las diferencias de densidad de imagen), asociado a un simple píxel. La resolución mínima radiométrica debe ser 256 niveles (8 bit) con un scanner capaz de producir mas de 1024 niveles (10 bit) o superior.

La calidad geométrica de un scanner puede ser expresada por la precisión posicional de un píxel en el resultado de la imagen. Si una imagen digital es producida por un simple nivel de precisión obtenida por imágenes cinematográficas y un comparador, la posición del píxel en la imagen digital necesita estar a la misma exactitud espacial. Por lo tanto, un nivel de 2 a 3 μm es el requerido para una buena geometría posicional del scanner.¹⁴

¹⁴ WOLF Paul and DEWITT Bon. Elements of Photogrammetry with applications in GIS. New York: McGraw Hill. 3rd Edition. 2000.

INTERPOLACIÓN ESPACIAL



3.1 Interpolación Espacial

La interpolación espacial se puede definir como un procedimiento que permite calcular el valor de una variable en una posición del espacio (punto no muestral con valor estimado), conociendo los valores de esa variable en otras posiciones del espacio (puntos muestrales con valores reales)¹⁵. Los métodos de interpolación pueden ser clasificados en el determinístico y geoestadístico.

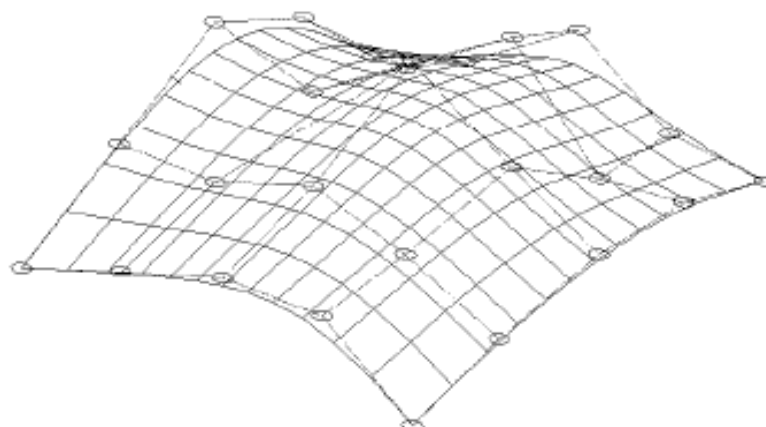


Fig. No 13 Ejemplo de interpolación espacial

El método de Interpolación Determinístico usa las funciones matemáticas para calcular los valores a situaciones desconocidas o basadas en el grado de similitud (por ejemplo IDW) o el grado de aplanamiento (por ejemplo FBR) en relación con los datos de los puntos vecinos. Las técnicas geoestadísticas usan ambos, el modelo matemático y estadístico, para predecir los valores a los lugares desconocidos y proporcionar estimaciones probabilísticas de la calidad

¹⁵ BOSQUE Joaquín. Sistemas de Información Geográfico. Madrid: Ediciones Rialp.1992.

de las interpolaciones basadas en las autocorrelaciones espaciales de la información de los puntos.¹⁶

3.2 Métodos de Interpolación

Los métodos de la interpolación pueden ser clasificados en dos grupos: local y global. Los métodos locales operan dentro de las zonas más pequeñas de mayor extensión del área de estudio alrededor de la posición del punto predecible (vecino natural). Los ejemplos de métodos determinísticos locales son los Inversos de la Distancia (IDW), el polinomio local, y la Función de Base Radial (FBR).

Por otro lado, los métodos de la interpolación global usan todos los puntos disponibles conocidos para generar las predicciones para el área completa de interés. Estos métodos pueden usarse para evaluar y eliminar variaciones globales causadas por las tendencias físicas en los datos; las funciones de la interpolación polinómicas globales son ejemplos de estos métodos.

Además, los métodos de la interpolación pueden ser clasificados en inexacto y exacto. Los interpoladores exactos predicen los valores idénticos de los lugares conocidos. Las predicciones de los interpoladores inexactos son diferentes de los valores medidos a los lugares conocidos. Las estadísticas de las diferencias entre las predicciones y los valores medidos son normalmente usadas como estimación para un modelo de calidad.¹⁷

¹⁶ BURROUGH, P. A., and R. A. McDonnell. Principles of geographical Information systems. Oxford University Press, Oxford.1998.

¹⁷ BURROUGH, P. A., and R. A. McDonnell. Principles of geographical Information systems. Oxford University Press, Oxford.1998.

A continuación se describirán cada uno de los métodos de interpolación más utilizados en la generación de Modelos Digitales, a partir del software que se tiene (SURFER 8.0).¹⁸

3.2.1 TIN (Trianguled Irregular Network)

Es usado directamente como un modelo de la superficie o como la estructura del intermedio para la interpolación. Un valor de la superficie se obtiene por la intersección de una línea vertical con el plano definido por los tres nodos del triángulo. La ecuación general para la interpolación LINEAL de un punto (el x, y, z) en un triángulo es:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

Donde A, B, C, y D son constantes determinadas por las coordenadas de los tres nodos del triángulo.

Por tanto, la solución para generar el modelo digital es encontrar un algoritmo que establezca las relaciones de puntos de vecindad entre los diferentes puntos para formar dichos triángulos.

En este caso, la geometría está constituida por triángulos irregulares, con vértices de coordenadas conocidas, que deben definir todos los cambios significativos en la estructura del terreno para su correcta definición. Por ello, la veracidad del modelo digital dependerá directamente de la selección de datos (puntos y líneas) que se realice en el terreno.

¹⁸ Programa desarrollado por la Empresa Golden Software, para la modelación de superficies.

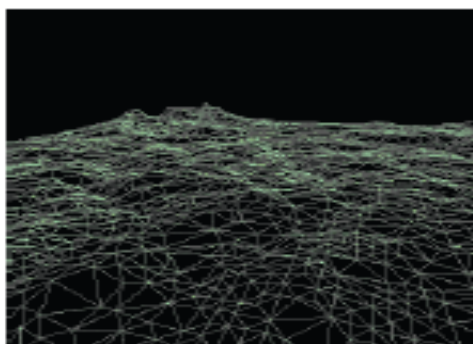


Fig. No 14 Ejemplo del método de TIN

La captura de datos de éste modelo se suele obtener por métodos topográficos y geodésicos, ya mencionados en el capítulo dos, siendo dicho modelo uno de los más adecuados para la determinación de trabajos de ingeniería, dada la precisión y veracidad que se puede conseguir en la definición del relieve.¹⁹

Las aplicaciones más adecuadas del TIN están en el diseño de obras lineales (carreteras, ferrocarriles, canales, etc.), casos en los que es factible conseguir una buena definición del trazo a un costo económico competitivo con otros procedimientos.

Históricamente, el origen de este tipo de modelos, estuvo a mediados del siglo XX, en el interés del climatólogo Thiessen por relacionar datos procedentes de varias estaciones meteorológicas distribuidas no uniformemente. Definió regiones en el plano basadas por conjuntos de puntos (estaciones meteorológicas) de tal forma que las regiones estaban encerradas por la línea entre la estación en consideración y las estaciones de alrededor.

¹⁹ BERNABÉ Miguel Ángel e ITURRIOZ Teresa. Cartografía II .Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Topográfica. Notas de Clase. Marzo 2002.

Basándonos en este enunciado, el término polígono de Thiessen ha sido utilizado en geografía para denotar polígonos definidos por un criterio de proximidad con respecto a un conjunto de puntos; estos polígonos siempre son convexos.

Estos polígonos de Thiessen son de gran utilidad en trabajos en los cuáles es necesario conocer el área de influencia de un determinado punto. Por ejemplo, en trabajos de planeamiento urbanístico, es posible utilizar estos polígonos para analizar como influyen en la estructura urbana determinados puntos.

La red formada por todos los polígonos de Thiessen definidos por un conjunto de puntos es llamada diagrama de Thiessen o diagrama de Voronoi. Pero hay otra interpretación del diagrama de Thiessen y es una triangulación basada en un criterio de proximidad. Delaunay fue el primero en darse cuenta de esta doble relación; de esta forma, el término triangulación de Delaunay es usado para la doble interpretación de los diagramas próximos.

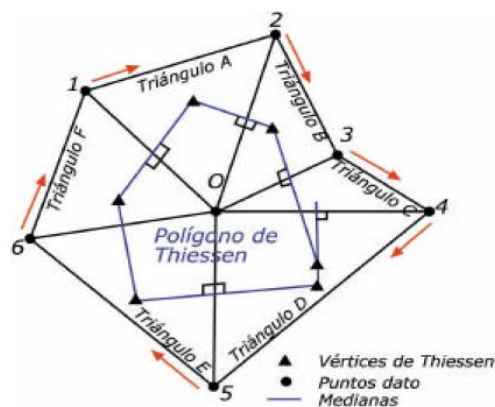


Fig. No 15 Polígono de Thiessen

Triangulación de Delaunay

La triangulación de Delaunay es una de las triangulaciones más interesantes por ser aplicable para la resolución de multitud de problemas aparentemente sin relación entre si, debido a sus propiedades geométricas y por contar con algoritmos bastante eficientes para su cálculo.

Las características más importantes de la triangulación de Delaunay de una forma informal serían:

- Todos los puntos están conectados entre sí y forman el mayor número de triángulos posibles sin que se crucen sus aristas (imprescindible para que se trate de una triangulación).
- Los triángulos se definen de forma que los puntos mas próximos están conectados entre si por una arista.
- Esto implica que los triángulos formados sean lo más regulares posibles, es decir, que se maximicen sus ángulos menores y se minimice la longitud de sus lados.

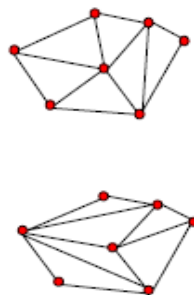


Fig. No 16 Ejemplo de una triangulación de Delaunay sin que se crucen sus aristas.

Estas propiedades hacen que, como se dijo antes, esta triangulación sea interesante en varios campos. El ejemplo más típico es el de **modelar un terreno mediante una superficie poliédrica**:

Se trata de triangular en el plano puntos medidos en un terreno real 3D y después darle elevación a la triangulación.

En esta solución, la precisión de la aproximación dependerá de dos factores: el número de puntos que se midan (a más puntos triangulados, mayor parecido con el terreno real) y la forma de los triángulos. En éste segundo factor, y a la igualdad de número de puntos triangulados, los triángulos aproximarán mejor el terreno cuando menor longitud tengan sus aristas y mayores sean sus ángulos.

Por lo tanto, la triangulación de Delaunay en este caso (gran cantidad de puntos a tomar) sería la que más sentido tendría utilizar. Además, si se tiene en cuenta que existen algoritmos optimizados para resolver esta triangulación a gran velocidad para un alto número de puntos, la elección en este caso está clara.

Otra aplicación de esta triangulación es ser la base para el **cálculo de estructuras geométricas** (árboles y grafos), también debido a sus propiedades: a partir de la triangulación de Delaunay, descartando aristas se pueden obtener fácilmente grafos de vecindad relativa de puntos.

DEFINICIÓN

La triangulación de Delaunay puede definir en tres formas:

DEFINICIÓN 1: MAXIMIZAR ÁNGULOS

Dado que todas las posibles triangulaciones sobre un mismo conjunto finito de puntos en el plano cuenta necesariamente con el mismo número de triángulos (y, que por tanto, todos los posibles vectores de ángulos correspondientes a esas triangulaciones, tendrían el mismo número de elementos), podría definirse la triangulación de Delaunay como la que posee el vector de ángulos mayor de entre todas las posibles triangulaciones, entendiéndose que los vectores han sido ordenados mediante orden lexicográfico.

DEFINICIÓN 2: A PARTIR DEL DIAGRAMA DE VORONOI

Otra posible definición de la triangulación de Delaunay podría hacerse partiendo del diagrama de Voronoi.

Básicamente, un diagrama de Voronoi es una subdivisión del plano (en el que se encuentran "n" puntos) en "n" regiones, de forma que cada segmento de línea que sirve de división entre dos regiones es equidistante a los dos puntos recorridos a las regiones (y, por tanto, perpendicular al eje que une esos dos puntos).

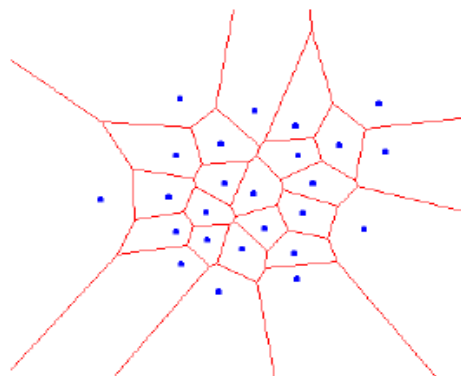


Fig. No 17 Diagrama de Voronoi

Este diagrama posee una serie de propiedades muy interesantes:

- Cada vértice del diagrama de Voronoi debe ser centro de un círculo que contenga al menos tres puntos de la nube en su contorno.
- Cada región definida por este diagrama es convexa.
- El bisector entre dos regiones del plano formará parte del diagrama de Voronoi si y sólo si puede trazarse un círculo con centro en el bisector y que contenga en su contorno a los dos puntos (uno de cada región) sin contener a ningún otro punto en ningún otro lugar.

Estas propiedades hacen que este diagrama pueda servir para conocer el área de influencia de cada punto, encontrar el lugar del plano más alejado de los puntos que actualmente forman la nube, encontrar el punto más cercano a un lugar del plano cualquiera, averiguar donde situar un punto para que su área de influencia sea mayor teniendo en cuenta los puntos ya existentes en el plano. Es evidente que con todas estas características, las posibles aplicaciones en la vida real de este diagrama son incontables y sobre campos muy diferentes.²⁰

Una vez conocido el diagrama de Voronoi, pueden definirse una serie de propiedades que permiten calcular una triangulación de Delaunay a partir de dicho diagrama de forma directa e inequívoca. Es por eso que se dice que el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay son duales:

- La triangulación de Delaunay es el grafo de líneas dual al diagrama de voronoi.

²⁰ ORTEGA, Lidia. Sistema de Información Geográficos. Notas de clase. España. 2004

- Cada triángulo de la triangulación se corresponde con un vértice del diagrama.
- La triangulación y el diagrama tienen el mismo número de aristas y se corresponden entre sí.
- Cada nodo de la triangulación se corresponde con una región del diagrama.
- El contorno de la triangulación es equivalente al cierre convexo de la nube de puntos.
- No es posible encontrar ningún otro punto de la nube en el interior de los triángulos formados por la triangulación.

DEFINICIÓN 3: PROPIEDADES RESPECTO A CIRCUNFERENCIAS

La tercera definición de la triangulación de Delaunay podría efectuarse indicando sus propiedades:

- Tres puntos de la nube de puntos son vértices de un mismo triángulo de la triangulación de Delaunay si y sólo si puede trazarse un círculo cuyo contorno contenga esos tres puntos y no contenga otros puntos de la nube en su interior.
- Dos puntos de la nube definen una arista de la triangulación si y sólo si es posible trazar un círculo cuyo contorno contenga a éstos dos puntos pero en su interior no contenga ningún otro punto de la nube.

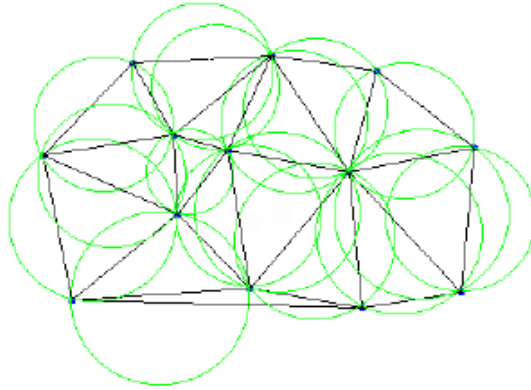


Fig. No 18 Triangulación Óptima a partir de circunferencias

Con estas propiedades podríamos diferenciar la triangulación de Delaunay de una nube de puntos respecto a otras triangulaciones de ésta forma: **una triangulación de un conjunto de puntos es de Delaunay si y sólo si la circunferencia circunscrita de cualquier triángulo de la triangulación no contiene puntos del conjunto.**

3.2.2 Kriging

Esta técnica indica que la distancia y dirección de los puntos muestrales refleja una correlación espacial que puede utilizarse para explicar la variación del atributo (altitud) en la superficie.

Es un método de interpolación exacta y local que pondera, al igual que los demás contemplados en este estudio, el peso de cada punto muestral en el valor interpolado en un punto no muestral, según una función estocástica de la distancia entre dichos puntos. Su fundamento conceptual deriva de la teoría de las variables, su fundamento conceptual deriva de la teoría de las variables regionalizadas, tratándose, en esencia, de un método geoestadístico consistente en la búsqueda de unos interpoladores óptimos que producen unos residuos insesgados y con mínima varianza.²¹

La teoría de las variables regionalizadas asume que la variación espacial de una variable Z, por ejemplo la cota de un terreno, puede ser expresada como la suma de tres componentes.²²

El valor de la altura del punto vendrá definido por:

²¹ CARVAJAL, Fernando; AGUILAR, Fernando. Interpolación espacial en entorno CAD. Aplicación del método de krigeado". Logroño-Pamplona (España): XI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. 1999.

²² BURROUGH, Paul, and McDonnell, R. Principles of geographical Information systems. Oxford University Press, Oxford.1998.

$$Z(\rho_0) = \sum_{i=1}^n w_i * Z(\rho_i) \quad (3)$$

Donde:

W_i = es el peso de la cota en el punto a interpolar.

$Z(\rho_i)$ = es la cota del punto conocido.

ρ_0 = punto a interpolar

En este caso los pesos están en función no sólo de la distancia a los vecinos, sino de la relación espacial entre los puntos medidos. La asignación de estos pesos se va a realizar en dos fases:

1. Se averigua la interrelación espacial de los puntos, ajustando su variograma teórico.
2. Predicción del atributo del punto

El variograma sería la curva de análisis que relaciona las distancias con la media de las diferencias de cotas al cuadrado, de un punto al resto de los medidos; estos datos empíricos nos permiten definir y ajustar lo que denominamos el semivariograma teórico, a partir del cual podemos calcular los distintos pesos de los puntos. ²³

²³ BARRAGAN Morillo J. Análisis de calidad de un modelo digital de elevación generado con distintas técnicas de interpolación. Santander, España: XIV congreso internacional de ingeniería grafica. 2002.

3.2.3 IDW (Inverse Distance Weighting)

El IDW es una técnica de interpolación determinística local exacta. IDW asume que el valor de un lugar desconocido es el promedio distancia-peso de valores a los puntos conocidos sin un vecino definido alrededor del punto desconocido.²⁴ La coordenada Z del punto a interpolar se estima asignando los pesos a los datos del lugar en relación a la distancia inversa; los puntos más cercanos consiguen así mas peso en los cálculos.

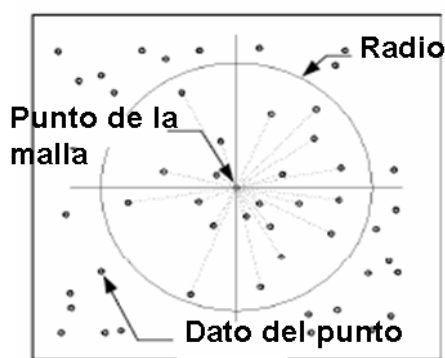


Fig. No19 Un radio se genera alrededor de cada punto de la malla donde los datos del punto son seleccionados para usarse en el cálculo.

Es un método exacto que estima el valor de la variable para un punto que no pertenece a la muestra, usando la siguiente expresión:

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i * Z(s_i) \quad (4)$$

Donde:

²⁴ BURROUGH, Paul, and. McDonnell, R. Principles of geographical Information systems. Oxford University Press, Oxford.1998.

$\hat{Z}(s_0)$ es el valor predicho en el lugar desconocido S_0 .

n : es el número de puntos conocidos medidos, sin los vecinos definidos por S_0 .

λ_i : es la distancia-pesos asociados dependientes de cada uno de los puntos de la muestra.

(S_i) : es el lugar conocido

$Z(S_i)$: es el valor observado del lugar S_i .

Los pesos son calculados usando:

$$Z_j = \frac{\sum_{i=1}^n 1/d^{p_{ij}} * Z(x_i)}{\sum_{i=1}^n 1/d^{p_{ij}}} \quad (5)$$

Donde:

d_{ij} : es la distancia euclidiana en medio de cada dato conocido y el punto a interpolar.

p : es el peso exponente. (Se utiliza 2)

El error medio cuadrático (emc) del punto a interpolar es calculado para determinar el valor del exponente óptimo. El exponente óptimo (p), su valor es

determinado minimizando la raíz cuadrada del error del punto a interpolar (raíz cuadrada del emc).²⁵

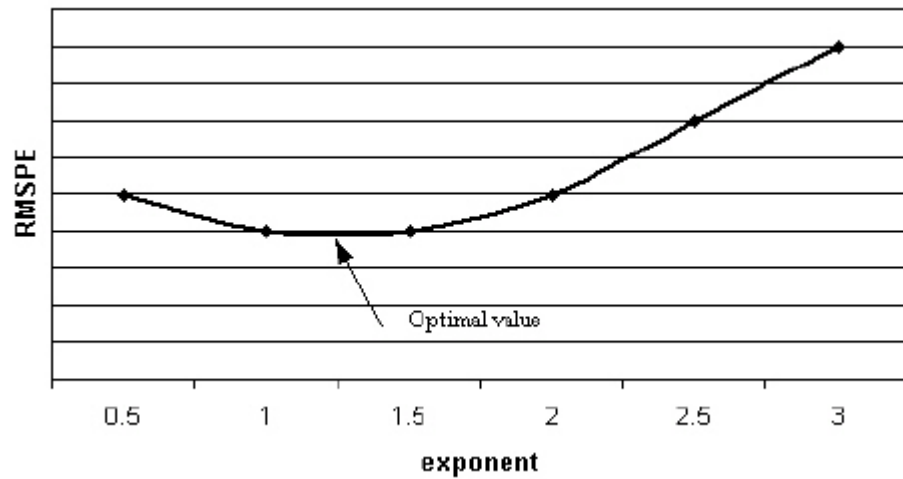


Fig. No20 Determinación gráfica del exponente óptimo. (García, 2004)

²⁵ GARCIA, Juan. A methodological proposal for improvement of digital surface models generated by automatic stereo matching of convergent image network. España: Universidad Politécnica de Cartagena. 2004.

3.2.4 Medias Móviles Ponderadas

El método de interpolación de medias móviles ponderadas por la distancia es ampliamente usado en la modelación de superficies. Se basa en la idea intuitiva de que las observaciones más cercanas deben tener más peso en la determinación del valor interpolado en un punto X_0 . Se trata de un método exacto y local que estima el valor de la variable Z en un punto no muestral X_0 a partir de la siguiente expresión:

$$Z(x_0) = \frac{\sum_{i=1}^n w(d_i) * Z(x_i)}{\sum_{i=1}^n w(d_i)} \quad (6)$$

Donde:

$w(d)$: denota a la función de peso de los “n” puntos muestrales que intervienen en el cálculo.

d_i : representa la distancia de cada punto a X_0 . Con la restricción de que $w(d)$ tienda a “∞” y si d tiende a cero, las funciones de ponderación adoptan la forma general $w = d^{-u}$. Los valores del exponente son $u = 1$ y $u = 2$ son los más usuales²⁶, aunque algunos autores establecen que el exponente 2 suele ofrecer unos resultados empíricos más satisfactorios, además de requerir un

²⁶ LAM, Nina S. Spatial interpolation methods: A review. The American Cartographer, v. 10, nº 2, 1983.

menor esfuerzo computacional²⁷. Obviamente el uso de exponentes elevados implica dar menos peso relativo a puntos más alejados de X_0 y viceversa.

²⁷ DECLERCQ, Franky A. N. Interpolation methods for scattered sample data: accuracy, spatial patterns, processing time. *Cartography and Geographic Information Systems*. v. 23, nº 3, 1996.

3.2.5 Vecinos Naturales

La interpolación del vecino natural usa un promedio del peso rodeando los datos de los puntos para computar el punto interpolado. Aunque similar al método de Shepard's la diferencia fundamental es en cómo los pesos se asignan a los puntos de los datos vecinos.

Para definir el peso del dato del punto vecino, Sibson introduce la idea de coordenadas locales. Las coordenadas locales definen el peso o cantidad de influencia cualquier punto de los datos, llevará el valor de la función computada a un punto interpolado.

El peso es completamente dependiente en el área o el volumen de influencia del dato del punto circundante. El área o volumen de influencia se representan por el polígono de Thiessen o el diagrama de Voronoi. La red de polígonos de Thiessen para un conjunto de datos de los puntos es la triangulación de Dirichlet y complemento de la triangulación de Delaunay como se muestra en la figura de abajo.

La triangulación de Delaunay se forma por la triangulación de datos de los puntos dispersos para mantener el criterio de que el vértice opuesto de un triángulo adyacente nunca se contiene dentro del círculo inscrito en cualquier triángulo en la red.

La red de triángulos forma una red irregular de triángulos (TIN). Los vértices del polígono de Thiessen son los centroides de las circunferencias de los triángulos definiendo la triangulación de Delaunay.

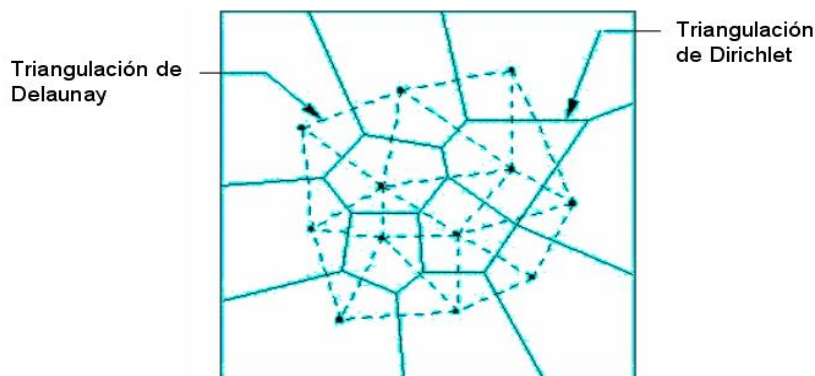


Fig. No 21 La triangulación de Delaunay y Dirichlet de un conjunto de datos esparcidos

Las coordenadas locales del vecino natural son ilustradas en la figura No 22. Los puntos 1 – 10 son datos de puntos esparcidos donde el valor de Z es conocido y P_n es un punto donde se podría interpolar un valor de Z .

Temporalmente insertando P_n dentro de la triangulación de Delaunay causará la triangulación de Dirichlet para cambiar el resultado de las medidas de las áreas de Thiessen en los polígonos de los vecinos de P_n . Las líneas punteadas muestran la triangulación de Dirichlet antes que P_n se agregue temporalmente a TIN y las líneas continuas muestran la triangulación de Dirichlet después que P_n es agregado. Solo esos datos de puntos cuyos polígonos de Thiessen serán cambiados, se utilizaran en el computo del punto interpolado.

En este caso solo los puntos 1, 4, 5,6 y 9 serán usados. La coordenada local, $\lambda_m(n)$ para cada uno de estos puntos con respecto a P_n se define como el área compartida por el polígono de Thiessen establecido por P_n y este polígono definido proporcionalmente a los datos de los puntos antes de ser agregados a P_n . La mayor área común, es la más grande coordenada local resultante y la mayor influencia del punto interpolado.

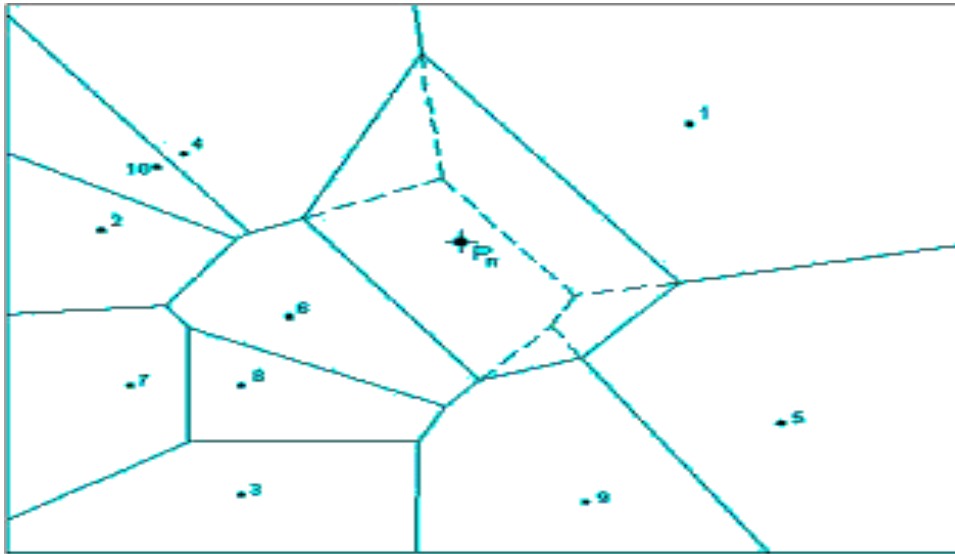


Fig. No 22 Triangulación de Dirichlet de un conjunto de puntos esparcidos antes que P_n es agregado

Está claro que el $\lambda_m(n)$ será un número entre el cero y la unidad. Si P_n está en el mismo lugar como P_m entonces $\lambda_m(n)$ será la unidad. La coordenada local también tiene la propiedad que la suma de todas las coordenadas locales λ_m para cualquier interpolante P_n será 1.0. Similar a los esquemas de la Distancia Inversa, en general, la mayor distancia relativa P_m es desde P_n , la distancia más pequeña también influye en el valor de la función interpolada final, sin embargo, los pesos son también dependientes en las relaciones espaciales de los datos de los puntos influenciados con respecto a otros.

Los puntos de los datos vecinos involucrados en la interpolación de P_n son esos puntos que definen los triángulos en la triangulación de Delaunay que es adyacente al P_n temporalmente insertado.

Si nosotros definimos $K(n)$ como el área de Thiessen de P_n y $K_m(n)$ como la diferencia en el área de Thiessen de los datos de puntos vecinos, P_m , antes de y después de que P_n se inserta, entonces el $\lambda_m(n)$ de la coordenada local se define como:

$$\lambda_m(\mathbf{n}) = \mathbf{K}_m(\mathbf{n}) / \mathbf{K}(\mathbf{n}) \quad (7)$$

Habiendo definido el punto interpolado del vecino natural, hay varios problemas que deben resolverse para llevar a cabo tal un esquema. Éstos son divididos en las categorías siguientes:

1. Definiendo la Triangulación de Delaunay: Para definir las coordenadas locales para un dato del punto, sus polisuperficie de Voronoi deben definirse. El paso preliminar a esto es primero definir la triangulación de Delaunay para todos los datos de los puntos. El cumplimiento de la Triangulación de Delaunay comprende la red polisuperficies de Voronoi pueden definirse entonces.

2. Definiendo las Polisuperficies de Voronoi y sus áreas o volúmenes: La geometría de cada polisuperficie de Voronoi se define usando los centros del circuncírculo o circun-esfera que comprende sencillamente la triangulación de Delaunay. Se presentan algoritmos para computar el área o volumen de la polisuperficie resultante. Las coordenadas locales, $\lambda_m(\mathbf{n})$, para cada dato del punto vecino puede computarse entonces de la ecuación 6.

3. Estimación de las pendientes: Se presentan métodos para la estimación de pendiente que es consistente con la interpolación del Vecino Natural que mejorará la continuidad de la función resultante.²⁸

²⁸ OWEN, Steven. **Subsurface Characterization with Three-Dimensional Natural Neighbor Interpolation.** Department of Civil and Environmental Engineering, Brigham Young University, Provo, Utah, U.S.A. 1993

3.2.6 Vecinos Cercanos

Con este método se genera una triangulación de Delaunay con los puntos muestrales, cumpliéndose la condición de que la circunferencia circunscrita en los vértices de cada triángulo, no incluye ningún otro vértice, con lo que la red de triángulos es prácticamente equilátera. El algoritmo selecciona aquellos puntos más cercanos que generan polígonos de Voronoi convexos alrededor del punto en cuestión.

Los pesos de estos puntos son proporcionales al área de estos polígonos. Esta técnica de interpolación tiene la ventaja de que no necesita la introducción de ningún parámetro adicional, y los resultados son aceptables en puntos muestrales con una distribución irregular. Esta eventual comodidad para el proceso, puede ser un inconveniente, si tenemos en cuenta el escaso número de parámetros de decisión que emplea la técnica.²⁹

²⁹ BARRAGAN Morillo J. Análisis de calidad de un modelo digital de elevación generado con distintas técnicas de interpolación. Santander, España: XIV congreso internacional de ingeniería gráfica. 2002.

3.2.7 Método de Shepard

La forma más simple de interpolación conocida como la Distancia Inversa de los Pesos es también llamada Método de Shepard. La ecuación usada es la siguiente:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i f_i \quad (8)$$

Donde:

n: es el número de puntos dispersos en el conjunto.

f_i: es la función preescrita de valores de los puntos dispersos.

w_i: son las funciones de peso asignadas a cada punto disperso.

La forma clásica de la función de peso es:

$$W_i = h_i^{-p} / \sum_{i=1}^n h_i^{-p} \quad (9)$$

Donde:

p es un número real positivo arbitrario llamado exponente del peso y tiene un valor predefinido de 2. El exponente del peso puede ser modificado por encendido del Uso de la opción de función de peso clásica

h_i es la distancia desde el punto disperso al punto interpolado ó:

$$h_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (10)$$

Donde:

(X, Y): son las coordenadas de la interpolación

(Xi, Yi): son las coordenadas de cada punto disperso.

La función de peso varía de un valor de unidad al punto disperso a un valor próximo cero como la distancia del incremento al punto disperso. Las funciones de peso se normalizan para que los pesos sumen a la unidad.

Aunque la función del peso mostrada anteriormente es la forma clásica de la función del peso en la interpolación Distancia Inversa, la siguiente ecuación es también usada:

$$W_i = \{R-h_i/Rh_i\}^2 / \sum_{i=1}^n \{R-h_j/Rh_j\}^2 \quad (11)$$

Donde:

h_i : es la distancia desde el punto interpolado al punto disperso **i**.

R : es la distancia desde el punto interpolado a la mayor distancia del punto disperso.

n : es el número total de puntos dispersos.

Esta ecuación se ha encontrado para dar los resultados superiores a la ecuación clásica.³⁰

³⁰ FRANKE, Richard and NIELSON Greg. Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 15. 1980

La función de peso es una función de distancia Euclidiana y es radialmente simétrico sobre cada punto disperso. Como resultado, la superficie interpolada es algo simétrica sobre cada punto y tiende hacia el valor malo del punto disperso entre los puntos dispersos. El método de Shepard se ha usado extensivamente debido a su simplicidad.

Interpolación en 3D

La ecuación en 3D para el método de Shepard's es idéntica a la ecuación en 2D excepto que las distancias usadas se computan:

$$h_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \quad (12)$$

Donde:

(X, Y, Z): son las coordenadas del punto interpolado.

(Xi, Yi, Zi): son las coordenadas de cada punto disperso.

3.2.8 Función de Base Radial (FBR)

La FBR comprende un amplio grupo de interpoladores que emplean una ecuación de base dependiente de la distancia entre el punto interpolado y los puntos muestrales vecinos³¹. Generalmente hablando, el valor de la variable (punto a obtener), en general, el valor de la variable Z en un punto no muestral X_0 viene dado por la siguiente expresión:

$$Z_j = \sum_{i=1}^n a_i * F(d_{ij}) \quad (13)$$

Donde:

d: es la distancia entre los puntos (punto fijo y el punto a interpolar)

F (d_{ij}): es la función de base radial

a_i : es el coeficiente que será calculado, resolviendo un sistema lineal de “n” ecuaciones

n: es el numero de la muestra de los vecinos involucrados en la obtención .

Z_j : es la cota del punto a interpolar.

Entre las diversas FBRs que podemos encontrar se recomienda la función multicuadrática como la que mejores resultados obtiene en términos de evaluación estadística y visual de la superficie modelizada.

³¹ JOHNSTON, K et al. Using ArcGIS Geostatistical Analyst. ESRI. Redlands. 2001

Dicha función presenta la siguiente formulación:

$$F(d_{ij}) = \sqrt{d_{ij}^2 + r^2} \quad (14)$$

El parámetro r es denominado factor de suavizado. No hay un método universalmente aceptado para introducir el factor de suavizado, por lo que debe ser ensayado previamente por el usuario. Conviene observar que un factor de suavizado elevado producirá una superficie muy suavizada que probablemente se alejará sensiblemente de la geometría de la superficie real.³²

³² AGUILAR Manuel Ángel. Evaluación de diferentes técnicas de interpolación espacial para la generación de modelos digitales del terreno agrícola. Mapping Interactivo. No 74. Noviembre 2001.

3.2.9 Curvatura Mínima

De acuerdo con su nombre, este método de interpolación trata de producir la superficie continua de mínima curvatura sobre la cual todos los puntos de observación están anclados. Superficies aún menos curvadas son por ejemplo las superficies de tendencia basadas en una regresión polinomial de mínimos cuadrados o bien las superficies planas producidas por TIN. Sin embargo, las superficies de tendencia no tratan de reproducir los valores observados con exactitud, razón por la cual no se les considera como procedimientos de interpolación *strictu sensu*³³; mientras que las superficies en RTI no son superficies con continuidad matemática.

El método de la mínima curvatura está inspirado por el principio de las reglas flexibles ("thin plates) en las cuales la presión ejercida en un punto dado produce una reacción (deformación) que afecta un ambiente local determinado por ciertos puntos fijos o fronteras. En el espacio 2D, este ambiente local es conocido como una placa o pieza que formando parte del mosaico total de la superficie interpolada. La unión entre las diferentes placas del mosaico debe definir una superficie continua, derivable al primer y al segundo grados (pendiente y curvatura).

³³ Las superficies de tendencia, así como aquellas producidas por las series de Fourier son consideradas métodos de interpolación globales, en los cuales la superficie interpolada es una aproximación grosera de la totalidad de los valores Z medidos. Se les distingue de los métodos de interpolación locales (el Krigeado, los splines, el inverso de la distancia, etc.), que utilizan la información de un subconjunto (el vecindario) de puntos de muestreo.

El método de la mínima curvatura es de algún modo un método híbrido puesto que realiza primero una interpolación global, pero a continuación acerca las estimaciones a través de un proceso iterativo que toma en cuenta los residuos locales.

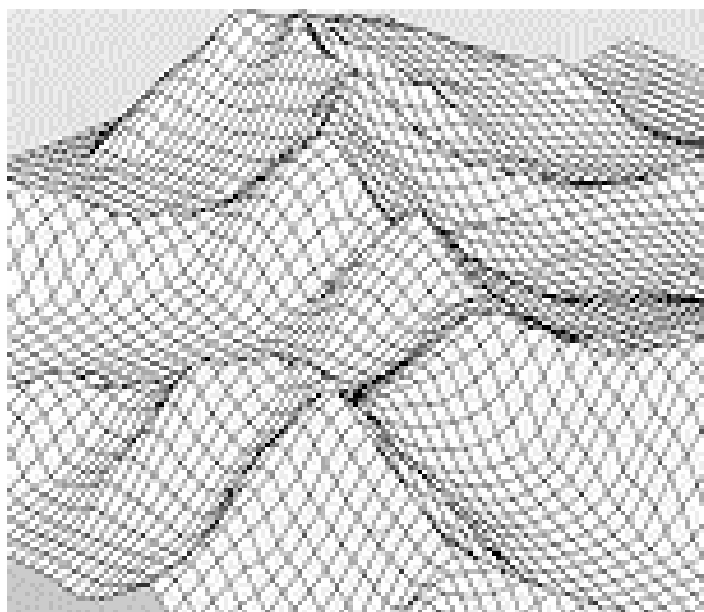
La aproximación de una superficie tal es una extensión de las funciones splines, equivalentes matemáticas de las reglas flexibles utilizadas por los dibujantes.

Son funciones polinomiales seccionadas en las cuales aquellas de tercer grado reproducen bastante bien las deformaciones de las reglas flexibles.

El método es conocido bajo el nombre de splines en tensión completamente regularizadas. Fue elaborado para llenar las exigencias de los análisis topográficos cuando se trata de producir estimaciones fiables de la pendiente y de la curvatura del relieve. Con este método, las derivadas de todo orden son válidas, contrario a las soluciones tradicionales que son limitadas a aquella de segundo orden.³⁴

³⁴ MESÉN Rafael Arce. Interpolación Espacial. Escuela de Geografía. Universidad de Costa Rica. Junio. 2001.

MODELO DIGITAL DE ELEVACIONES



4.1 Concepto de Modelo Digital de Elevación

Un modelo digital de elevaciones (MDE) es una representación discreta de una superficie topográfica. En algunas literaturas un MDE es referido a un MDT (modelo digital de elevaciones) o a un MDET (modelo digital de elevaciones de terreno). Dos formas comunes de MDEs, son mallas regulares y redes irregulares trianguladas, conocidas como TIN.³⁵

El elemento básico de información de un MDE es un valor de altura Z , al que acompañan los valores proporcionados de X e Y , que representados en un sistema de proyección geográfica permiten una precisa referenciación espacial.

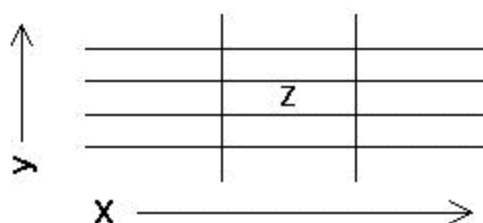


Fig. 23 Sistema de referencia espacial

Dos configuraciones básicas geométricas son normalmente usadas en el campo para recolectar datos de un MDE: el método de la malla y el método irregular. En los dos casos, el modelo se puede generar a partir de datos puntuales de una muestra de datos repartidos aleatoriamente en el plano; otra posibilidad, es recoger una muestra de las altitudes reales empleando las curvas de nivel existentes en el mapa fuente y obtener el MDE a partir de esa fuente.³⁶

³⁵ WOLF, Paul and DEWITT, Bon. Elements of photogrammetry, Singapore: 3 rd Edition. McGraw Hill. 2004. 298p.

³⁶ BOSQUE Joaquín y GARCIA Rosa. Métodos de interpolación para la elaboración de un modelo digital de elevaciones. Estudios Geográficos. No 245. 2001.

A partir de los datos anteriores se debe realizar un proceso de interpolación espacial, para el cual es posible emplear procedimientos muy diferentes, en nuestro caso los algoritmos a utilizar fueron seleccionados del programa informático disponible (SURFER 8.0) y a la posibilidad de combinar métodos simples con un enfoque mas avanzado dado el caso.

Existen varias formas de representar estos modelos de elevación de acuerdo a la estructura y organización de los datos. Clásicamente dos formas son las más comunes de presentar los modelos (Felicísimo, 1994):

Vectorial: basado en entidades u objetos geométricos definidos por las coordenadas de sus nodos y vértices.

Raster: basado en las localizaciones espaciales sobre una retícula regular de puntos a los cuales se les asigna el valor de elevación.

Los anteriores tipos de modelos presentan variantes que permiten la evolución a nuevas estructuras de organización de los datos, pero conservando la forma clásica de representación de los datos. Los más comunes corresponden a:

- Red irregular de triángulos (TIN, triangulated irregular network)
- Matrices regulares (URG, uniform regular network)
- Matrices jerárquicas (quadrees)

Por lo general, los ficheros de entrada se realizan por dos vías: isohipsas y ficheros de puntos, que son procesados en la construcción del MDE mediante algún método de interpolación válido para el caso y que después de obtenidos pueden transferirse a una estructura raster. ³⁷

³⁷ FERNANDEZ DE LA TORRE Reyner y GELER Tatiana. Modelo Digital de Elevación de la zona emergida del ecosistema Sabana Camaguey, Cuba. Mapping interactivo. No 94. Mayo 2004.

4.2 Estructura de Datos

De forma general, la unidad básica de información en un MDE es un punto acotado, definido como una terna compuesta por un valor de altitud, z , al que acompañan los Valores correspondientes de x e y , expresados en un sistema de proyección geográfica para una precisas referenciación espacial.

Las variantes aparecen cuando estos datos elementales se organizan en estructuras que representan las relaciones espaciales y topológicas.

Mientras que los mapas impresos usan casi exclusivamente una única convención, las curvas de nivel, para la representación de la superficie del terreno, en los MDE se han utilizado alternativas algo más variadas.

Históricamente, las estructuras de datos en los sistemas de información geográfica y, por extensión, en los modelos digitales del terreno, se han dividido en dos modelos de datos en función de la concepción básica de la representación de los datos: vectorial y raster.

En el modelo vectorial los atributos del terreno se representan mediante puntos acotados, líneas o polígonos. Los puntos se definen mediante un par de valores de coordenadas con un atributo de altitud, las líneas mediante un vector de puntos de altitud única o no y los polígonos mediante una agrupación de líneas.

En el modelo raster, los datos se interpretan como el valor medio de unidades elementales de superficie no nula que cubren el terreno con una distribución regular, sin solapamiento y con recubrimiento total del área representada.

Dentro de estos dos modelos básicos, son posibles diversas variantes de organización de la información, denominadas **estructuras de datos**. La práctica y el tiempo han reducido las potenciales variantes de a unas pocas; las más utilizadas son una estructura vectorial: la red irregular de triángulos TIN (sigla en inglés) y una estructura raster: la matriz regular.³⁸

4.2.1 Estructura Raster

Su característica básica es la creación de una trama de celdas o píxeles en la que cada una de ellas tiene una única propiedad espacial. En este modelo lo que interesa es la propiedad espacial más que los límites exactos. Utiliza una base teórica similar a la teledetección por lo que la integración de la información geográfica obtenida a través de las imágenes satélites es más sencilla y directa.

Los datos del raster frecuentemente se usan para descomponer y modelar el espacio geográfico. Un espacio del raster es referenciado por las filas numeradas y columnas, una serie o reja de $N \times N$, eso delimita un área localizada en la superficie de tierra. Generalmente la célula del raster o la unidad mínima especifica la resolución espacial: las unidades de la malla más pequeña, la resolución más fina; las unidades de la malla más grandes, la resolución más tosca. La topología no es una consideración explícita en un raster-basado en SIG.

La celda es el elemento básico de este modelo. Generalmente su forma es cuadrada o rectangular y todas tienen el mismo tamaño formando un entramado regular. Con su tamaño se determina la escala de la imagen que se está introduciendo, lógicamente cuanto más pequeña sea ésta mayor será la

³⁸ FELICISIMO Ángel Manuel. La utilización de los MDT en los estudios del medio físico. Universidad de Extremadura. España. 1999.

escala de resolución que se obtenga. Hay excepciones a la regularidad del tamaño de la celda en modelos complejos cuyos ejemplos más significativos son el *quadtree* y *octree* ³⁹

Durante los años un conjunto robusto de algoritmos modelados cartográficos se ha desarrollado para facilitar el planeamiento espacial usando los formatos del raster. Se usan algoritmos de mapa-álgebra basados en la lógica Booleana para analizar los fenómenos espaciales y visualizar las distribuciones geográficas. Los conjuntos de datos de raster son abundantes porque se graban tremendos volúmenes de datos geográficos usando instrumentación que colecciona los datos espaciales en los formatos del raster. Ejemplos de conjuntos de datos de raster incluyen imágenes satelitales, fotografía digital y rendimiento del raster digital generado por tecnología examinada (gráficas de raster digital).⁴⁰

En el modelo raster, los límites no quedan recogidos de forma explícita sino que se deben suponer de la delimitación de las celdas que forman la tesela. La información se estructura en capas que contienen elementos de una misma variable.

³⁹ Estructura de datos jerárquica basada en el principio de la descomposición recursiva del espacio en cuadrantes y octantes, resultando en una determinada estructura de árbol. Se emplea con el objetivo de reducir el espacio de almacenamiento y el tiempo de procesamiento de los datos. Cuando la descomposición es en cuadrante se denomina *quadtree* y cuando lo es en octantes *octree* (COMAS y RUIZ, 1993).

⁴⁰ MOFFIT Francis and BOSSLER John. *Surveying*. New York: Addison Wesley Longman. Tenth Edition. 1998.

4.2.2 Estructura Vectorial

Cada entidad geográfica se representa a partir de tres elementos básicos: puntos, líneas y polígonos. Las propiedades de las entidades constituyen el criterio de diferenciación. En este caso los límites de los objetos están representados de forma explícita. Según algunos autores este método se acerca más a la forma de percepción que tiene el ser humano. Es, quizás también, el modelo más intuitivo a la hora de introducir la información.

El uso de información de un vector es quitado comúnmente con un mapeo digital, el punto localizado es representado por un solo plano de coordenadas X y Y, una línea por un conjunto lineal e inmediato de pares de XY en el plano, y áreas por serie de pares inmediatos de XY que son encerradas en una unidad en el plano de área.

Los puntos son usados para especificar lugares de objetos como las esquinas de construcciones, esquinas de límites y figuras de un punto, tales como postes de teléfono. Las líneas son usadas para representar los bordes de las vías, líneas férreas, límites y otros. Las áreas o polígonos muestran atributos comunes de regiones tales como pantanos, bosques, límites de propiedades y otros.

La topología en un vector se basa en un SIG que ayuda para asegurar que los datos sean correctos. El almacenamiento de atributos descriptivos en un modelo vectorial se logra por construcción de un conjunto de tablas de base de datos unidas a las coordenadas XY definiendo las dimensiones espaciales del objeto geográfico.

Un conjunto de tablas es construido y unido para que los atributos descriptivos correspondan a cada punto, línea, o el área sea encontrable. las tablas contienen toda la información descriptiva sobre el tipo de figura decodificada por el usuario.

El conjunto de información vectorial es más común hoy en día que en los años pasados. Estas son razones severas para el desarrollo de este cambio, el costo de hardware y software son designados por la colección de información del vector que tienen un costo significativamente bajo, y las técnicas de digitalización del vector son mejoradas, adicionalmente el vector basado en modelos analíticos se van volviendo mas sofisticados.

El modelo del vector proporciona análisis geográficos y un largo sistema de herramientas analíticas. El análisis de la red y el mapeo son dos tipos de análisis facilitados por un modelo de información del vector. La razón es que la información del vector es usado topológicamente.⁴¹

4.2.3 Ventajas y desventajas de los modelos raster y vectorial

En los últimos años la mayor parte de los SIG comerciales han ido integrando en sus programas los módulos adecuados para poder utilizar las mejores cualidades de cada uno de los modelos. A pesar de esto, aún, muchos usuarios de SIG se plantean este dilema en el momento de adquirir un software concreto. Se ha intentado hacer una valoración de las distintas opiniones existentes en la tabla 3.0 que compara una serie de funciones y capacidades de ambos. Se explicará brevemente los resultados:

⁴¹ MOFFIT Francis and BOSSLER John. Surveying. New York: Addison Wesley Longman. Tenth Edition.1998.

- **Estructura de datos.** Por un lado la estructura raster es más simple y por tanto más sencilla de comprender pero por otro lado la vectorial es más compacta y permite unas capacidades de análisis mayores.
- **Introducción de datos.** De igual modo cada una adquiere diferente dificultad en función del origen de los datos. El modelo raster admite mejor la información procedente de las imágenes satélites o la información adquirida a través de un barredor digital. Por otro lado la información de pantalla o la recogida a partir de mesas digitalizadoras se adaptan mejor al modelo vectorial. La introducción directa alfanumérica es mucho más pesada en el modelo raster.
- **Almacenamiento.** A pesar de las mejoras alcanzadas en el modelo *raster*, sus necesidades de espacio de almacenamiento son mayores que para el vectorial. A un mismo número de entidades geográficas el espacio ocupado por la información raster puede doblar a la vectorial. Debido a ello la operatividad y versatilidad de los programas vectoriales es bastante mayor.
- **Gestión de datos:** En el modelo vectorial las características de las entidades pueden ser consultadas como objeto individual o en conjunto. En el raster sólo se pueden consultar las características de cada celdilla y no las entidades en su conjunto.
- **Representación topológica.** En el raster, a veces, algunas relaciones topológicas son difíciles de representar mientras que el vectorial genera una codificación eficiente de la topología.
- **Integración de imágenes satélites.** El formato en bit de las imágenes satélites hace más eficiente al raster a la hora de integrar estas imágenes como información geográfica y su facilita el análisis posterior.

- **Análisis de redes.** Como ya se expuso anteriormente el modelo vectorial es más eficaz a la hora de asumir algunas de las relaciones topológicas y por ello esta estructura es la más adecuada para trabajar en el análisis de redes.
- **Análisis poligonal.** Por el contrario la regularidad de la celdilla del modelo raster favorece el análisis poligonal. Por ejemplo la superposición de mapas es una tarea que cumplen con mayor rigor los programas cuyo modelo es el raster.
- **Análisis estadístico.** La estructura *raster* facilita en alguna medida el análisis estadístico y gráfico, sobre todo el poligonal.
- **Salida cartográfica.** Parece consensuado que las capacidades de salida cartográfica son mayores en los programas vectoriales que en los *raster*. Los mapas generados por formatos vectoriales se asemejan en gran medida a los realizados manualmente.

Por último sólo advertir que este análisis comparativo es altamente relativo pues en una parte importante depende del software que se utilice y de las necesidades que se tenga que cubrir con el Sistema de Información Geográfica. Si se atiende a la media final puede parecer que el modelo vectorial es algo superior en prestaciones al raster pero si la preocupación se centra en el análisis poligonal o en la integración de imagen satélite está percepción puede variar por completo.

Tabla No 3 Comparación relativa entre el modelo raster y vectorial

| Función / capacidad | Raster | Vectorial |
|-----------------------------|---------------|------------------|
| Estructura de datos | 2 | 2 |
| Introducción de datos | 2 | 2 |
| Almacenamiento | 1 | 3 |
| Gestión de datos | 2 | 2 |
| Representación topológica | 1 | 3 |
| Integración imagen satélite | 3 | 2 |
| Análisis lineal o de redes | 1 | 3 |
| Análisis poligonal | 3 | 2 |
| Análisis estadístico | 3 | 2 |
| Salida cartográfica | 2 | 3 |
| CAPACIDAD TOTAL | 2 | 2.5 |

0: sin capacidad 1: poca capacidad 2: capacidad media 3: alta capacidad

Fuente: Navarro Pedreño y otros (2000).

4.4 Evaluación del Modelo Digital de Elevaciones

Los errores groseros o equivocaciones se eliminan siguiendo el criterio de 3 veces el EMC, y los errores sistemáticos se separan de los accidentales (aleatorios), analizando el sesgo de la curva de distribución de errores.

Los estadísticos recomendados según varios autores (Li, Z. 1991 y Yang et al, 2000) para la medida del error serían el error medio (EM), y la desviación estándar (s) que coincide con el error medio cuadrático (EMC) cuando la distribución no es sesgada.

$$EM = \sum_{i=1}^n 1/n (Z_1^{\text{estimado}} - Z_1^{\text{real}}) \quad (15)$$

$$EMC = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1/n (Z_1^{\text{estimado}} - Z_1^{\text{real}})^2} \quad (16)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1/n ((Z_1^{\text{estimado}} - Z_1^{\text{real}}) - EM)^2} \quad (17)$$

Cuando todos los errores son aleatorios, y el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, podemos considerar el error medio (EM) como cero, siendo entonces idénticos la desviación estándar de los errores (s) y el error medio cuadrático (EMC).

Todos estos estadísticos del error que definen la precisión del modelo, lo hacen bajo una serie de condiciones que definen los parámetros que intervienen en ese cálculo. Parece razonable indicar que el número de puntos de control, la calidad de los mismos (en principio libres de error), y la distribución de estos, nos van a proporcionar un nivel de seguridad en la estima de la precisión del error.

En este contexto se define **la fiabilidad (F)**, como el grado de corrección con el que se obtiene la precisión del modelo (Li, 1991), o en otras palabras el error en la estimación del error (Felicísimo, 1994). El nivel de confianza sería el porcentaje del tiempo que podemos esperar encontrar nuestro error estimado dentro de un intervalo marcado por **la desviación estándar (s)** y **el coeficiente de confianza (z)**, según la expresión $\pm z*s$.

El coeficiente de precisión esta relacionado con los niveles de confianza, con los valores siguientes en una distribución normal canónica:

$$Z (0.95\%) = 1.960 \quad Z (0.98\%) = 2.326 \quad Z (0.99\%) = 2.576$$

4.4.1 Influencia del número de puntos de control.

Parece evidente que cuantos más puntos de control utilicemos, mayor será la fiabilidad de los estadísticos calculados.

Ley (1986) en sus ensayos realizados para evaluar el número de puntos necesarios, estableció que con 150 puntos (para grandes modelos) la garantía de la precisión en los modelos obtenidos fluctuaba en un 10% de la desviación estándar obtenida.

Posteriormente LI (1991) demostró estadísticamente que la fiabilidad de esa desviación estándar para 150 puntos muestrales era algo inferior, un 6%.

4.4.2 Influencia del número de puntos de control en la estimación de la media

Para analizar el comportamiento de un modelo en función del número de puntos elegidos para su contraste, nos encontramos en el supuesto estadístico de una distribución de muestreo, en este caso de medias. Por lo tanto estamos descomponiendo la población en un subconjunto de muestras.

La desviación estándar de la media de esas muestras, se relacionan con la desviación estándar de la población mediante,

$$\sigma_{EM} = \sigma / \sqrt{n} \quad (18)$$

Para un nivel de confianza fijado, la media muestral fluctúa en un intervalo,

$$EM \pm z * \sigma_{EM} = EM \pm z * C \quad (19)$$

Si denominamos **S**, al valor en que fluctúa esa media,

$$S = z * \sigma / \sqrt{n} \quad (20)$$

Luego el tamaño de muestra necesario, para una determina variación de la media será:

$$n = z^2 * \sigma^2 / S^2 \quad (21)$$

El concepto de **fiabilidad de la media (EM)** definido por LI (1991) sería,

$$F(EM) = S / \sigma = Z / \sqrt{n} \quad (22)$$

4.4.3 Influencia del número de puntos de control en la estimación de la desviación estándar

La desviación estándar también se ve afectada por estas variaciones en el número de puntos, y sigue el comportamiento estadístico de una distribución de la desviación estándar, relacionándose en este caso la desviación estándar muestral con la poblacional mediante la fórmula:

$$\sigma_2 = \sigma / \sqrt{2n} \quad (23)$$

Por lo que los límites de confianza de una población de desviación estándar s , en una muestra de desviación estándar s , serán:

$$S \pm z * \sigma_s = S \pm z * \sigma / \sqrt{2n} \quad (24)$$

Si se utiliza como estimación de s ,

$$\bar{s} = \sigma = (n-1 / n) * S \quad (25)$$

La variación de la desviación estándar de la muestra es,

$$\pm Z * S / \sqrt{2(n-1)} = Z * F(S) * S \quad (26)$$

Esta cantidad expresada en términos de porcentajes de la estimación de la desviación estándar, define la fiabilidad de la desviación estándar.

$$F(s) = (1 / \sqrt{2(n-1)}) * 100\% \quad (27)$$

4.4.4 Influencia de la calidad de los puntos de control en la estimación de la precisión.

Se había supuesto hasta ahora que los puntos con GPS no tenían ningún tipo de error, pero resultan evidentes los errores en función del equipo GPS utilizado.

Este error, por pequeño que sea, va a repercutir en la fiabilidad de los estimadores del error. La diferencia de altitud (la llamaremos DA) real será la contrastada con el GPS (la llamaremos DG), más un error (E), y existe la siguiente relación entre la desviación estándar:

$$K = \sigma_E / \sigma_{DA} = \sqrt{2 (n-1)} \quad (28)$$

El límite de los errores sería,

$$\sigma_E = \sigma_{DA} / \sqrt{2 (n-1)} \quad (29)$$

Cuando K aumenta, porque disminuye en número de puntos, lo hace a costa de que disminuya la dispersión de las diferencias GPS, y que aumente la influencia del error de esos puntos de control.

$$\sigma_E = K * \sigma_{DA} = \sigma_{DA} / \sqrt{2 (n-1)} \quad (30)$$

Siempre que no se rebase el límite anterior en los errores del GPS, su influencia en la fiabilidad de la estimación de la desviación estándar será despreciable, en otro caso, habrá que estimarla según la ecuación:

$$F (s) = (K / \sqrt{1-K^2}) * 100\% \quad (31)$$

MODELO DIGITAL DE TERRENO



El Modelo Digital de Terreno (MDT) se puede establecer como un análisis estadístico de las coordenadas del terreno (X, Y, Z), en donde la variable Z se pueda interpolar en función de X y Y ⁴² por consiguiente es una representación numérica de las características topográficas que definen el terreno, en un sistema de proyección cartográfica.

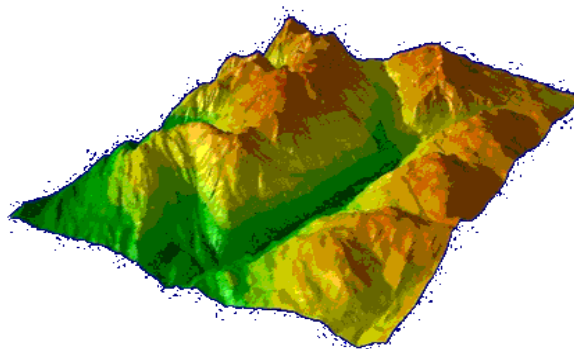


Fig. No 24 Ejemplo de un MDT

Fundamentalmente en topografía el MDT es utilizado para cumplir dos funciones primordiales a través de un algoritmo, estas son:

- Obtener la cota de cualquier punto del terreno.
- Crear las respectivas curvas de nivel.

A partir de estas dos funciones es posible conseguir otras funcionalidades que usualmente aportan este modelo; los datos de partida para que el Modelo Digital de Terreno pueda realizar sus funciones son los puntos del terreno que se hayan levantado por cualquiera de los métodos topográficos clásicos.

⁴² BANNISTER Arthur and RAYMOND Stanley. Surveying. Hong Kong: Sixth edition. Longman Scientific & Technical. 1992.

La calidad de estos datos será fundamental para conseguir un modelo digital de terreno aceptable, sirva como indicación que la distribución de los puntos levantados deberá ser, en general uniforme y con mayor densidad en aquellas zonas del terreno donde se puedan producir mayores indeterminaciones.⁴³

5.2 Visión Histórica

Los Modelos Digitales del Terreno nacieron en la década de los 50 como solución a una creciente necesidad de tratamiento digital de problemas tecnológicos relacionados con el conocimiento de la estructura del terreno.

Se planteaba el problema de generar una serie de algoritmos que automatizara trabajos de ingeniería (cálculo de pendientes, perfiles, áreas o volúmenes) que precisaban de datos del terreno, adquiridos principalmente por restitución fotogramétrica cuya cantidad de información era masiva y crítica, dada la escasa capacidad de almacenamiento de los computadores de la época.

Existen en la actualidad una gran variedad de programas informáticos que permiten un tratamiento digital de la cartografía, basándose en filosofías y planeamientos algorítmicos diferentes, dando solución al mismo problema: la representación numérica del relieve.⁴⁴

⁴³ MARTINEZ Rubén, GONZALES Francisco. Análisis de las metodologías habituales para la generación de modelos digitales del terreno. Mapping Interactivo. No. 71. Julio 2001.

⁴⁴ BERNABÉ Miguel Ángel e ITURRIOZ Teresa. Cartografía II .Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Topográfica. Notas de Clase. Marzo 2002.

5.3 Estructura de datos

La estructura de los Modelo Digitales de Terreno de igual forma que los SIG se clasifican en dos grupos en función de la concepción de la representación de los datos; la unidad básica de información es el punto, definido con la terna de coordenadas X, Y, Z.

5.3.1 Modelos de triángulos Irregulares

El modelo de la red irregular triangular es la alternativa significativa al raster regular de un DEM y ha sido adoptado en numerosos SIG, cartografía automatizada y paquetes de computadora.

El modelo TIN ha sido desarrollado a inicios de los 1970's como simplemente la manera de construir una superficie de un conjunto de puntos irregularmente distribuidos. Varios sistemas de prototipo usan esta estructura de datos que fueron desarrollados en 1970s y los sistemas comerciales usaron el TIN empezaron a aparecer en los 1980s como paquetes de contorno (algunas veces incluidos en SIG).

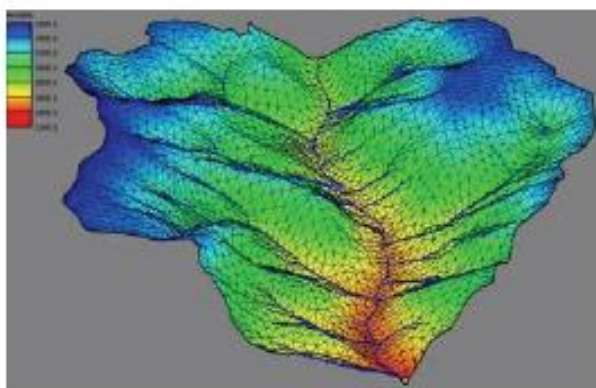


Fig. No 25 Generación de un MDT con TIN

La muestra de puntos irregularmente distribuidos puede ser adoptada al terreno, con más puntos de terreno áspero y menos en las áreas de terreno liso.

Una muestra irregularmente espaciada es por lo menos más suficiente en la representación de una superficie que una muestra regularmente espaciada como una base-malla del modelo digital. En un modelo TIN, la muestra de puntos son conectados por líneas para formar triángulos y dentro de cada triángulo la superficie es usualmente representada por un plano. Usando los triángulos, se asegura que cada pieza del mosaico de la superficie encaje con los pedazos de las piezas vecinas. Así la superficie será continua, como cada triángulo de la superficie podrá ser definido por las elevaciones de las esquinas de los 3 puntos.

Los polígonos que son más completos pueden ser también usados como baldosas del mosaico, pero pueden siempre ser rotos en los triángulos. Para un vector SIG, TIN puede verse como polígonos que tienen atributos de ladera, aspectos y área con tres vértices teniendo atributos de elevación y tres bordes con laderas y atributos de la dirección.

El modelo TIN es atractivo debido a su simplicidad y economía. Algunos tipos de terreno son muy eficazmente divididos en los triángulos con las caras del plano (por ejemplo los paisajes fluviales y desgastados). Otro paisaje, sin embargo, no se representa bien por los triángulos llanos. Los triángulos trabajan mejor en áreas con rupturas repentinas en laderas, donde los bordes del TIN pueden alinearse con las rupturas, por ejemplo a lo largo de cordilleras o cauces.⁴⁵

Las ventajas y desventajas de la estructura de datos TIN es señala abajo.

⁴⁵ EI- SHEIMY Naser. Digital Terrain Modelling. Department of Geomatics Engineering. University of Calgary. 1999

Ventajas:

- Puede incluir los puntos más altos y más bajos; pueden incrementar probándose en zonas de relieve alto. Son conveniente para superficie de tendencia

Pueden ser directamente representadas como TIN

Elementos del TIN

El modelo de información TIN está compuesto de los nodos, bordes, triángulos y topología:

Nodos: son fundamentales para la construcción de bloques en el TIN, los nodos son originados por los puntos y son vértices contenidos en las fuentes de datos de entrada. Cada nodo es incorporado en la triangulación TIN, cada nodo en la superficie del modelo TIN tiene un valor en la variable Z.

Bordes: cada nodo es unido con sus vecinos cercanos para formar triángulos que satisfagan el criterio de Delaunay. Cada borde tiene dos nodos, pero un nodo puede tener dos o más bordes porque los nodos tienen un nodo con el valor de Z, esto es posible para calcular la pendiente de la ladera el borde desde un nodo hacia el otro.

Triángulos: cada cara del triángulo describe el comportamiento de una porción de la superficie TIN's. Los valores de las coordenadas X, Y, Z de un triángulo, tres nodos lo pueden usar para derivar información acerca de las caras, como la ladera, aspectos, área de superficie y longitud de la superficie. Considerando el conjunto entero de triángulos como uno solo, esto es posible para derivar información adicional acerca del volumen, perfiles de la superficie, visibilidad, análisis y vistas de la superficie.

Porque cada cara resume la información de la superficie, esto es importante para asegurar que los puntos probados son aceptables para encontrar la mejor superficie posible, el modelo TIN puede tener resultados pésimos si una importante región de la superficie está por debajo de la muestra.

Topología: la estructura topológica de TIN se define manteniendo información que define cada nodo del triángulo, número de bordes y el tipo, adyacentes a otros triángulos. Para cada triángulo, los registros de TIN son:

- El número del triángulo
- El número del triángulo adyacente
- Los tres nodos que definen el triángulo
- Las coordenadas (X, Y) de cada nodo
- El valor de la superficie Z en cada nodo

5.3.2 Modelos de mallas regulares

Los modelos basados en estructuras regulares se construyen superponiendo una retícula sobre el terreno y extrayendo la altura media de cada celda. Normalmente, la retícula es una red regular de malla cuadrada, siendo la localización espacial de cada dato determinado de forma explícita en su situación en la matriz.

La matriz vendrá simplemente definida por un origen y un valor de intervalo entre filas y columnas. Al estar los datos estructurados en una malla, la relación topológica entre ellos está en la propia definición de esta, implicando una falta de flexibilidad en el modelo; presenta la ventaja de ser una estructura muy simple, en general, la relación costo- precisión no es buena, excepto en terrenos uniformes.

La matriz regular es muy usada para construir modelos digitales debido a su cómodo manejo informático y a su simplicidad estructural. Debido a la necesidad de fidelidad en la representación del terreno, en ciertos terrenos, se podrá variar el intervalo de la malla, aunque no todos los programas los admiten. En zonas de mayor relieve se necesitara una alta densidad de puntos para obtener una buena precisión resultando, un método poco económico.

No obstante, es muy difícil obtener una correcta definición del relieve mediante estructuras geométricas regulares. El complemento indispensable para obtener un adecuado ajuste, es capturar los puntos notables del relieve, así como la adición de aquellas líneas circulares que representan cambios en la pendiente del terreno.

Las principales aplicaciones de este tipo de modelo residen en el área de la fotogrametría digital, donde se aplican a procesos automáticos de rectificación diferencial para obtener ortofotografías.

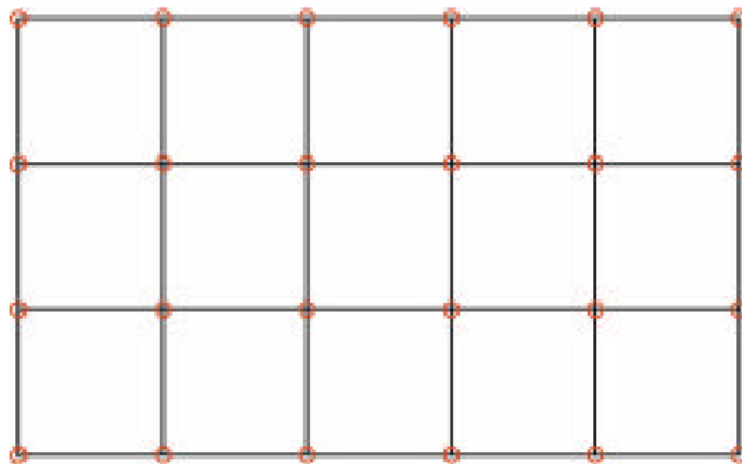


Fig. No 26 Ejemplo de una malla cuadrada

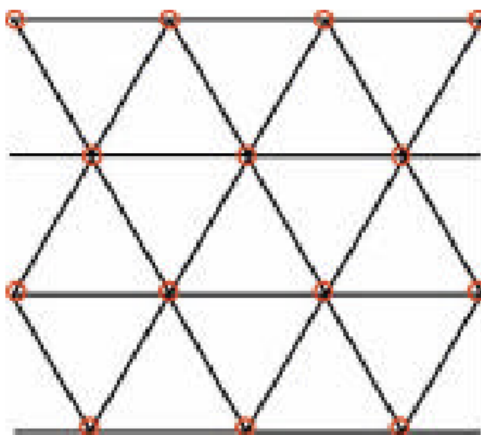


Fig. No 27 Ejemplo de una malla triangular

5.4 Elementos importantes para un Modelo Digital de Terreno

Los elementos necesarios para la construcción de un Modelo Digital de Terreno son aquellos que son importantes para la definición altimétrica de una zona. Así, se podrán incorporar curvas de nivel, puntos acotados y datos auxiliares de diversos tipos.

En general, las entidades pueden ser:

- Curvas de nivel
- Puntos acotados singulares: cumbres de picos, collados, fondos de depresiones, etc.
- Líneas de ruptura (Breaklines), que definen la posición de elementos lineales sin valores de altitud explícitos que rompen la continuidad de la superficie.
- Zonas de altitud constante: polígonos que encierran una superficie de altitud única, por ejemplo, lagos.
- Líneas que definen los límites externos del MDT o zonas donde no se desea tener información, por ejemplo, zonas inhibidas o anegadas.

5.6 Precisión del Modelo Digital de Terreno

Los estándares definidos para la cartografía convencional pueden, en principio, ser válidos para aplicarlos a los modelos digitales. Para ello, se pueden utilizar las tablas de Koope, que se basan en una relación entre la escala, equidistancia y pendiente de la siguiente forma:

$$\sigma_h = \pm (A+B \cdot \tan \alpha) \quad (40)$$

$$\sigma_p = \pm (B+A \cdot \cot \alpha) \quad (41)$$

Donde α es el valor de la pendiente del terreno expresado en grados sexagesimales, A y B son coeficientes que toman los siguientes valores para escalas y equidistantes más usuales.

Tabla No 4 Tablas de Koope

| Escala | Eg | σ_h (m) | σ_p (m) |
|--------|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1000 | 1 | $0.1+0.3 \cdot \tan \alpha$ | $0.3+0.1 \cdot \cot \alpha$ |
| 5000 | 5 | $0.4+3 \cdot \tan \alpha$ | $3+0.4 \cdot \cot \alpha$ |
| 10000 | 10 | $1+5 \cdot \tan \alpha$ | $5+1 \cdot \cot \alpha$ |
| 25000 | 10 | $1+7 \cdot \tan \alpha$ | $7+1 \cdot \cot \alpha$ |
| 50000 | 20 | $1.5+10 \cdot \tan \alpha$ | $10+1.5 \cdot \cot \alpha$ |

Fuente: Bernabé e Iturrioz (2002).

La determinación de la precisión de un MDT se puede realizar por comparación de una malla de control superpuesta sobre la generada por el modelo digital y obtenida la primera por métodos de Fotogrametría Analítica o mediciones de

campo. Tal comparación proporcionará la base para la evaluación de los errores en los canevas de puntos.

5.7 Fuentes del error Modelo Digital de Terreno

Los errores de los MDT pueden ser separados en dos categorías:

- Los errores posicionales implican una deficiente localización geográfica de la cota o de la curva de nivel y afectan, por tanto, a la situación en el plano XY.
- Los errores de cota que suponen una asignación imprecisa de la altitud asociada a la cota o a la curva e implican a las coordenadas en el eje Z.

Estos dos tipos de error han sido denominados también, de forma más genérica, Cartográficos (error en la localización de elementos) y temáticos (error en el atributo cartografiado).

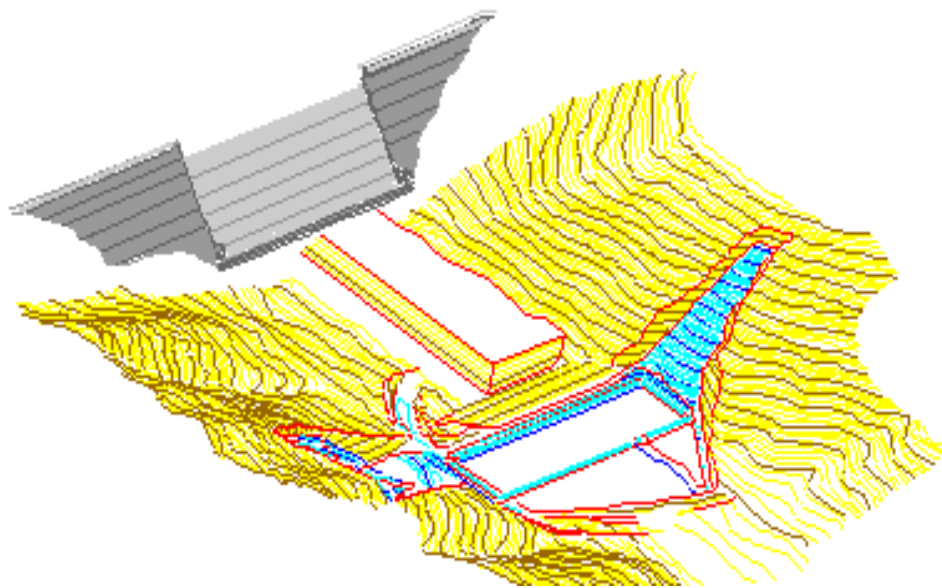
Los errores posicionales afectan a los modelos vectoriales, como los basados en redes de triángulos, que manejan entidades geométricas. Los modelos Raster, basados en localizaciones definidas implícitamente no se ven afectados por errores de posición.

Los errores atributivos afectan tanto a los modelos vectoriales como raster. En el primer caso suele tratarse de errores en sentido más básico de la palabra (Blunders), es decir, fallos groseros y locales en la asignación de la altitud. En el caso de las matrices regulares, en el origen del error suele estar en múltiples operaciones geométricas implicadas en la construcción del MDT.

En este caso, el error es de naturaleza estadística y global, pudiendo considerarse un atributo que define y caracteriza el MDT.⁴⁶

⁴⁶ FELICISIMO Ángel. Modelos digitales del terreno. Introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales. Oviedo: Pentalfa.1994

ASPECTOS FINALES DE LOS MODELOS DIGITALES



6.1 Representación de los Métodos de Interpolación

La representación de los métodos de interpolación se realizó con el programa SURFER 8.0, que posee los nueve métodos de interpolación descritos en el capítulo tres. Las siguientes son las coordenadas de los puntos para interpolar:

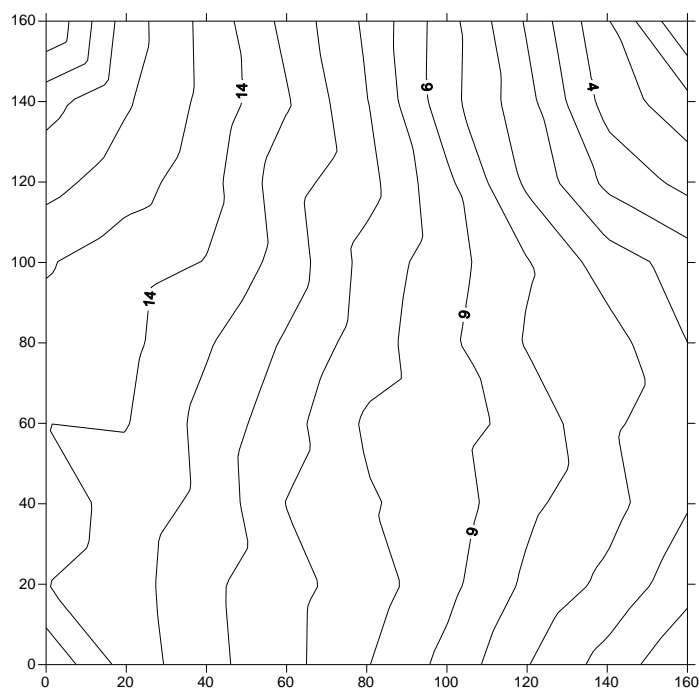
| NORTE | ESTE | COTA |
|--------------|-------------|-------------|
| 0.00 | 0.00 | 15.84 |
| 0.00 | 20.00 | 13.61 |
| 0.00 | 40.00 | 12.30 |
| 0.00 | 60.00 | 11.31 |
| 0.00 | 80.00 | 10.06 |
| 0.00 | 100.00 | 8.71 |
| 0.00 | 120.00 | 7.05 |
| 0.00 | 140.00 | 5.62 |
| 0.00 | 160.00 | 4.13 |
| 20.00 | 0.00 | 14.01 |
| 20.00 | 20.00 | 13.45 |
| 20.00 | 40.00 | 12.22 |
| 20.00 | 60.00 | 11.33 |
| 20.00 | 80.00 | 10.51 |
| 20.00 | 100.00 | 9.30 |
| 20.00 | 120.00 | 7.81 |
| 20.00 | 140.00 | 6.76 |
| 20.00 | 160.00 | 5.37 |
| 40.00 | 0.00 | 14.62 |
| 40.00 | 20.00 | 13.54 |
| 40.00 | 40.00 | 12.75 |
| 40.00 | 60.00 | 10.97 |
| 40.00 | 80.00 | 10.11 |
| 40.00 | 100.00 | 9.55 |
| 40.00 | 120.00 | 8.20 |
| 40.00 | 140.00 | 7.38 |
| 40.00 | 160.00 | 6.08 |
| 60.00 | 0.00 | 14.00 |
| 60.00 | 20.00 | 14.06 |
| 60.00 | 40.00 | 12.66 |
| 60.00 | 60.00 | 11.39 |
| 60.00 | 80.00 | 9.84 |
| 60.00 | 100.00 | 9.36 |
| NORTE | ESTE | COTA |

| | | |
|--------------|-------------|-------------|
| 60.00 | 140.00 | 7.14 |
| 60.00 | 160.00 | 6.53 |
| 80.00 | 0.00 | 14.64 |
| 80.00 | 20.00 | 14.27 |
| 80.00 | 40.00 | 13.12 |
| 80.00 | 60.00 | 11.86 |
| 80.00 | 80.00 | 10.50 |
| 80.00 | 100.00 | 9.21 |
| 80.00 | 120.00 | 7.91 |
| 80.00 | 140.00 | 7.45 |
| 80.00 | 160.00 | 6.00 |
| 100.00 | 0.00 | 15.09 |
| 100.00 | 20.00 | 14.38 |
| 100.00 | 40.00 | 13.96 |
| 100.00 | 60.00 | 12.58 |
| 100.00 | 80.00 | 10.65 |
| 100.00 | 100.00 | 9.42 |
| 100.00 | 120.00 | 8.07 |
| 100.00 | 140.00 | 6.52 |
| 100.00 | 160.00 | 5.57 |
| 120.00 | 0.00 | 16.36 |
| 120.00 | 20.00 | 15.45 |
| 120.00 | 40.00 | 14.42 |
| 120.00 | 60.00 | 12.37 |
| 120.00 | 80.00 | 11.36 |
| 120.00 | 100.00 | 9.23 |
| 120.00 | 120.00 | 6.80 |
| 120.00 | 140.00 | 4.75 |
| 120.00 | 160.00 | 3.68 |
| 140.00 | 0.00 | 17.36 |
| 140.00 | 20.00 | 16.12 |
| 140.00 | 40.00 | 14.73 |
| 140.00 | 60.00 | 13.11 |
| 140.00 | 80.00 | 11.05 |
| 140.00 | 100.00 | 8.37 |
| 140.00 | 120.00 | 6.33 |
| 140.00 | 140.00 | 3.59 |
| 140.00 | 160.00 | 2.32 |
| 160.00 | 0.00 | 20.00 |
| 160.00 | 20.00 | 16.51 |
| 160.00 | 40.00 | 14.69 |
| 160.00 | 60.00 | 12.69 |
| 160.00 | 80.00 | 10.81 |
| NORTE | ESTE | COTA |

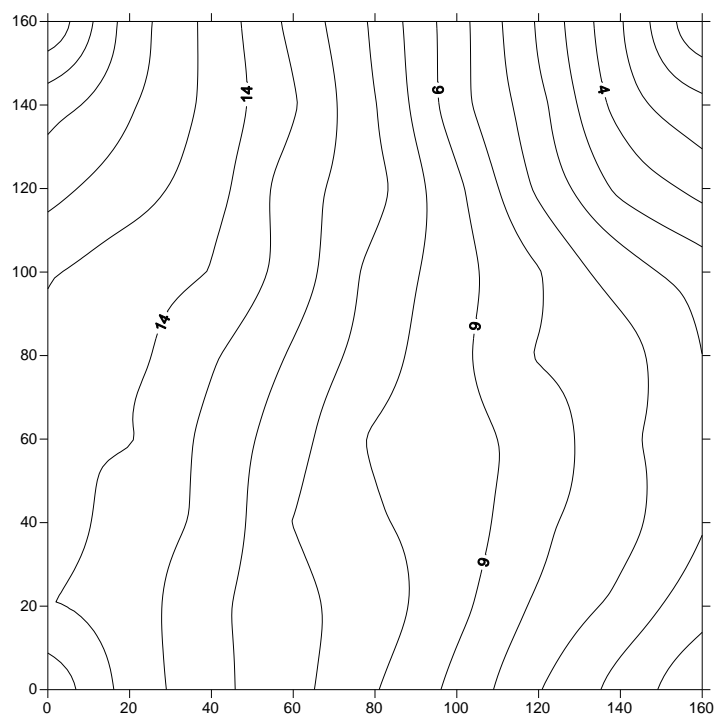
| | | |
|--------|--------|------|
| 160.00 | 100.00 | 8.41 |
| 160.00 | 120.00 | 5.87 |
| 160.00 | 140.00 | 3.10 |
| 160.00 | 160.00 | 0.00 |

A partir de estas coordenadas procedemos a interpolar estos puntos con cada uno de los métodos a través del software y analizaremos de una forma gráfica como se comportan los métodos de interpolación frente a la topografía original.

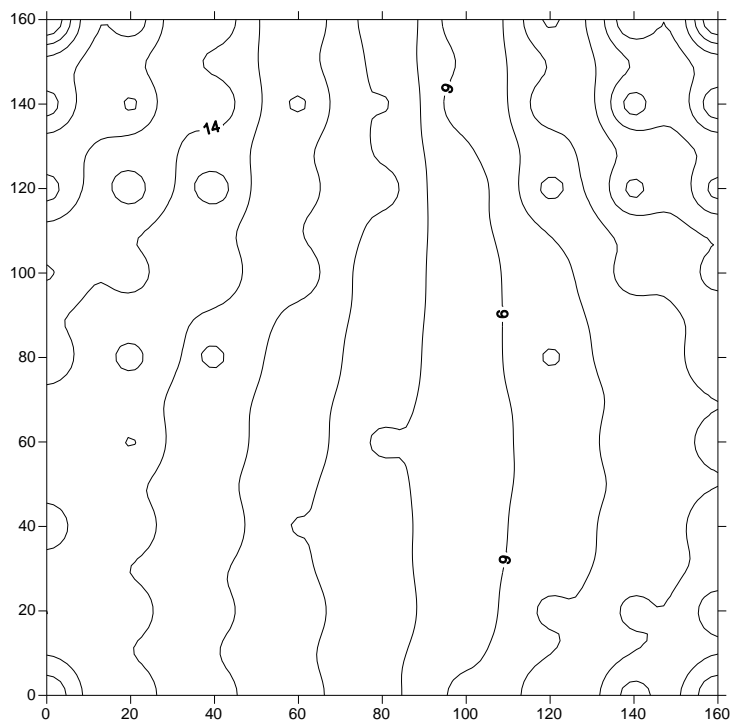
Interpolación realizada con TIN



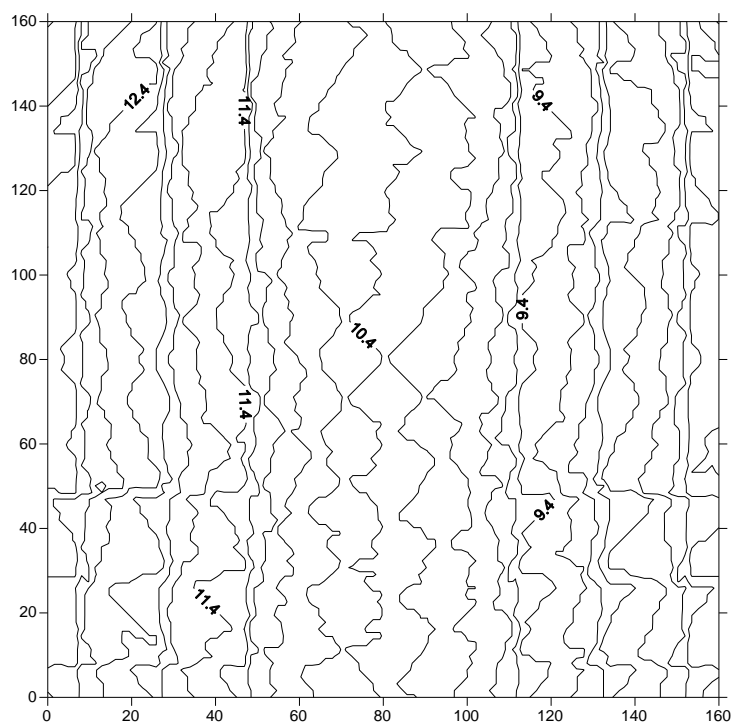
Interpolación realizada con Kriging



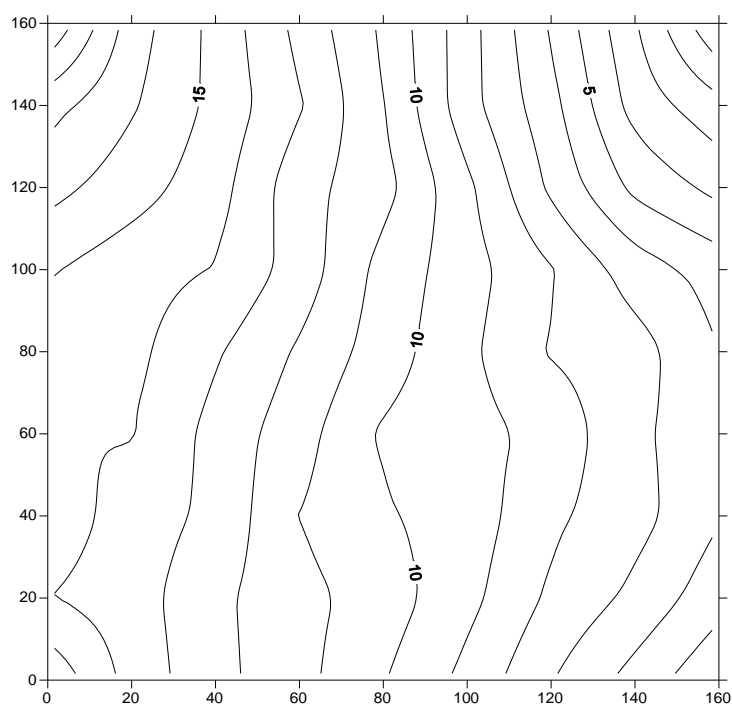
Interpolación realizada con IDW



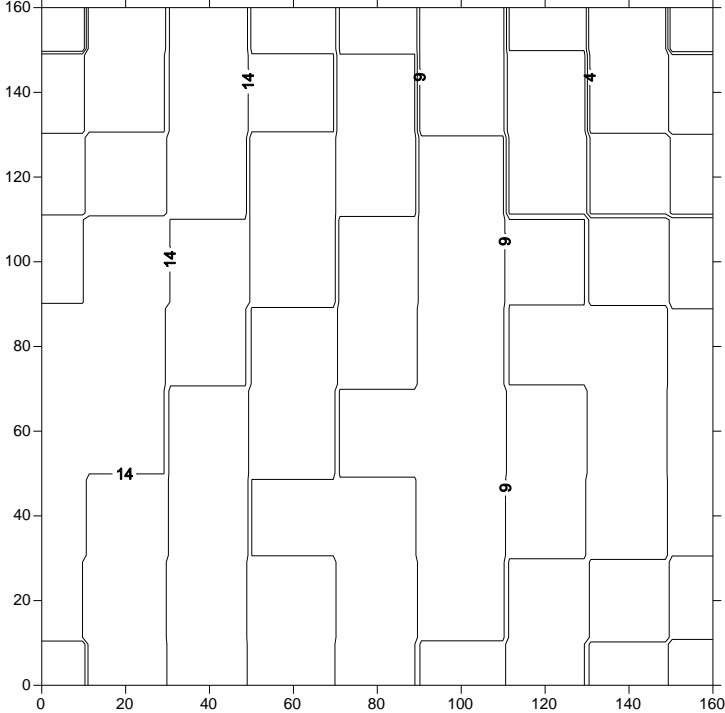
Interpolación con Medias Móviles Ponderadas



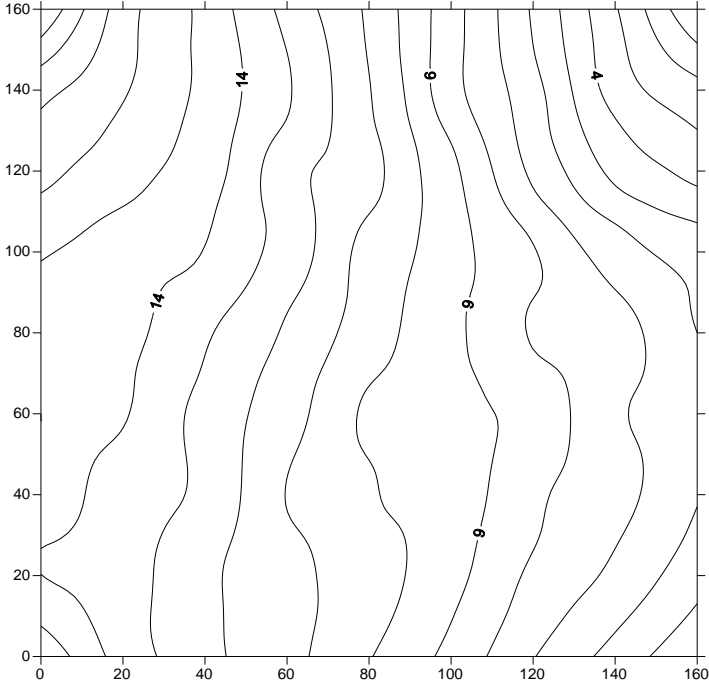
Interpolación con Vecinos Naturales



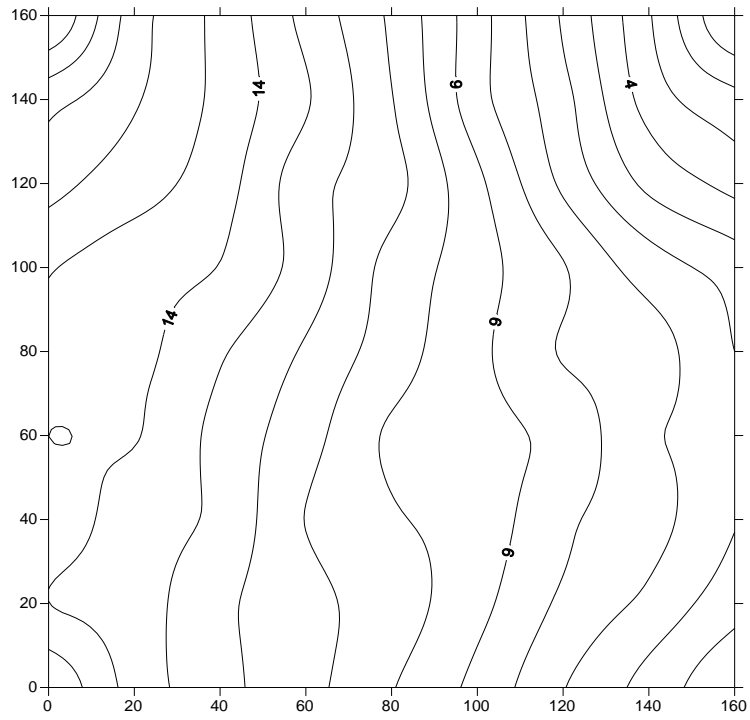
Interpolación con Vecinos Cercanos



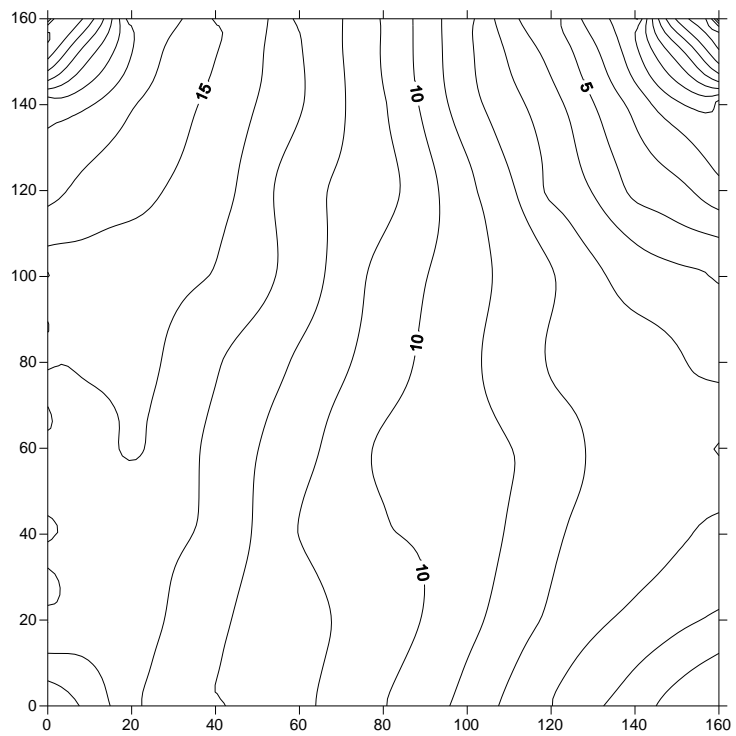
Interpolación con el método de Shepard



Interpolación con Función de Base Radial



Interpolación con Curvatura Mínima



Análisis Grafico

Interpolación con TIN: es el interpolador que mejores resultados arrojo, puesto que es ideal para terrenos heterogéneos y de cambios bruscos de topografía, se observa en la coordenada 0.00, 60.00 y de cota 14.00 que cambia notoriamente como viene la curva, interpolando así ése punto.

Interpolación con Kriging: También es un buen interpolador y arrojo buenos resultados, a diferencia del TIN es ideal para terrenos homogéneos ya que en el punto de la coordenada 0.00, 60.00 y de cota 14.00, no lo asumió y siguió normalmente el trazo de la curva, como es estadístico no maneja datos atípicos.

Interpolación con IDW: Éste interpolador no arrojó buenos resultados, ya que generó dentro de las curvas, otras curvas, obteniendo huecos que realmente no existen en el terreno original.

Interpolación con Medias Móviles Ponderadas: La interpolación fue pésima, generó curvas irregulares, mostrando una topografía totalmente caótica con referencia a la original, no arrojo resultados favorables.

Interpolación con Vecinos Naturales: Para éste análisis, arrojo buenos resultados, interpoló semejante a kriging; trabaja la misma condición del terreno ser homogéneo.

Interpolación con Vecinos Cercanos: Con referencia con Vecinos Naturales, presente un notorio cambio; generó curvas ortogonales (curvas a 90°), y cada curva lleva un trazo en zigzag, que no tienen nada que ver con el terreno original.

Interpolación con el método de Shepard: presenta una buena interpolación, se asemeja demasiado al terreno original, pero con la excepción que en curvas prolongadas, las extiende un poco más de lo que son realmente.

Interpolación con Función de Base Radial: al igual que el método de Shepard extiende aun más las curvas por su concepto radial, no maneja valores atípicos y si los encuentra genera curvas dentro del punto como un círculo, como sucedió en el punto de coordenadas 0.00 , 60.00 y de cota 14.00 (no aparece en el terreno original ese círculo).

Interpolación con Curvatura Mínima: algunas curvas las interpoló bien (12, 11, 10, 9, 8), las demás presentaron cambios notorios en su recorrido, como la 7 que se desvió en dirección este, como si estuviera tratando de buscar la curva 6. Al igual que los métodos que interpolaron mal (llamados así porque no se asemejan a la topografía original), presentó problemas con la curva 14.00 .

6.2 APLICACIONES DE LOS MODELOS DIGITALES

Una de las más representativas aplicaciones de los Modelos Digitales es la parte ambiental, donde sus posibilidades de análisis son amplias y abarcan campos muy diversos.

En primer lugar estarían los que podríamos denominar aspectos topográficos. Así el Modelo Digital nos ayudará a hallar la variación de altitud, la orientación, la pendiente, calculo de perfiles topográficos, etc.

Desde el punto de vista hidrológico los ejemplos, también, son abundantes. Entre ello destacarían los análisis de cuenca hidrográfica, sobre todo en la búsqueda de los límites. Además se podrán hallar las cuencas de drenajes, de recepción, prever el movimiento y acumulación de flujos de aguas, etc.

Un aspecto muy interesante a destacar es el análisis paisajístico. Este tipo de análisis facilita conocer qué puntos son visibles y cuáles no desde diferentes posiciones. De igual modo podremos saber la visibilidad o no de implantaciones ajenas a un espacio concreto desde diferentes posiciones.

Otros temas de interés, que son abordados por los MD, pueden ser los procesos de difusión y dispersión de la contaminación debido sobre todo a las características orográficas y climáticas.

Es además destacable su uso en los estudios para la realización de las obras de grandes infraestructuras. Su utilización se produce tanto antes de comenzar las obras como durante todo el proceso de construcción e incluso en el posterior control de la infraestructura (carreteras, ferrocarril, aeropuertos, puentes, embalses, etc.).

Por último debemos señalar cómo los Modelos Digitales se han convertido en una herramienta muy útil en los estudios de impacto ambiental por su capacidad de modelización y predicción. También es primordial la fuerza visual que un Modelo Digital puede tener en el momento de defender un proyecto o una propuesta teórica.

A continuación una lista de la utilización que se puede tener de un Modelo Digital:

- Problemas de corte y lleno en diseño de vías y otros proyectos de Ingeniería.
- El almacenamiento de datos de elevación para los mapas topográficos digitales
- Imágenes en tercera dimensión de terreno para el manejo del modelo y diseño y planeamiento del paisaje.
- Análisis de la visibilidad en campo traviesa.
- Planeando de rutas de los caminos y condiciones de los diques.
- Análisis de laderas y aspectos cartográficos para ayudar a estudios geomorfológicos y estimar erosión
- Aplicaciones Militares para determinar condiciones en campos de batalla.

6.3 SINTESIS

- Existen diferentes tipos de modelos en virtud de su correspondencia con la realidad: icónicos, análogos y simbólicos.
- Se reconoce como digitalización a la técnica que utiliza una mesa digitalizadora u otro instrumento que haga de tal para construir un fichero gráfico digital.
- Un escáner no es más que un instrumento óptico que transforma una imagen en un fichero digital.
- Existen dos grandes formulas para estructurar la información real en un sistema informático, esto es el modelo vectorial y el modelo raster.
- El modelo raster se caracteriza por la creación de una trama de celdas o píxeles en la que cada una de ella tiene una única propiedad espacial.
- En el modelo vectorial cada entidad geográfica se representa a partir de tres elementos básicos: puntos, líneas y polígonos.
- Los Modelos Digitales de Terrenos son una estructura numérica de datos que representa la distribución espacial de una variable cuantitativa.
- La interpolación puede ser definida como un procedimiento que permite calcular el valor de una variable en una posición del espacio conociendo los valores de esa variable en otras posiciones del espacio.

- Las posibilidades de los MDT para el análisis ambiental son muy amplias y abarcan campos muy diversos. Tanto los modelos raster como los vectoriales nos capacitan para obtener una serie de datos que ayudan al análisis medioambiental.
- El método de Shepard's es similar al la distancia inversa (IDW), pero el uso de mínimos cuadrados locales elimina o reduce la apariencia de los "ojo de toro" de los contornos generados.
- La Curvatura mínima genera una superficie más lisa, mientras que intenta que la calidad de los datos se eleve lo más posible, la Curvatura mínima no es un interpolador exacto.
- El método Medias Móviles Ponderadas asigna los valores a los nodos de la malla promediando los datos buscando dentro de la elipse el nodo de la malla. Para usar el método Medias Móviles Ponderadas, una elipse de la búsqueda debe definirse y el número mínimo de datos para usar, se especifica.
- El método de TIN es uno de los más exactos en la interpolación de superficies y funciona bien, en donde la topografía cambia drásticamente o donde se han hecho labores de excavación. Normalmente se utiliza en terrenos heterogéneos.
- El método de Kriging al igual que TIN es muy exacto pero difiere con él, ya que es un método geoestadístico que trabaja con la media de los datos tomados, por lo tanto, los cambios bruscos de topografía lo afecta bastante; es ideal para terrenos homogéneos.

- El método de Función de Base Radial es un grupo diverso de métodos de interpolación de datos, son interpoladores exactos en la interpolación de terrenos a gran escala.

GLOSARIO

Algoritmo: método de resolución de problemas que emplean una secuencia mecánica de pasos.

Aneroide: instrumento para medir la presión atmosférica, es decir, la fuerza por unidad de superficie ejercida por el peso de la atmósfera.

Canónica: Que se ajusta exactamente a las características de un modelo regla prefijada.

Codificación: Transformar mediante las reglas de un código la formulación de un mensaje.

Código: Conjunto de normas legales sistemáticas que regulan unitariamente una materia determinada.

Desviación Estándar: es la raíz cuadrada de la varianza, considerada siempre con signo positivo.

Determinístico: Teoría que supone que la evolución de los fenómenos está completamente establecida por las condiciones iniciales.

Efemérides: Libro en que se anotan anualmente las coordenadas de los planetas y de las estrellas fijas, respecto a la Eclíptica y al Ecuador, así como los eclipses, distancias lunares, ecuaciones de tiempo y otros elementos necesarios para los cálculos puramente astronómicos y para los marinos de situación.

Electromagnética: onda producida por la oscilación o la aceleración de una carga eléctrica.

Empírica: forma de deducir las cosas sin fundamento científico, se basa netamente en la experiencia.

Equilátero: Dicho de una figura, especialmente de un triángulo: Que tiene todos sus lados iguales entre sí.

Fiabilidad: Probabilidad de buen funcionamiento de algo.

Fluvial: Pertenece o relativo al río.

Geoestadístico: Estudio de la influencia de la geografía en la estadística.

GPS: siglas de Global Positioning System, es un sistema de navegación basado en 24 satélites, que proporcionan posiciones en tres dimensiones, velocidad y tiempo, las 24 horas del día, en cualquier parte del mundo y en todas las condiciones climáticas

Ionosfera: Conjunto de capas de la atmósfera que están por encima de los 80 km. Presentan fuerte ionización causada por la radiación solar, y afectan de modo importante a la propagación de las ondas radioeléctricas.

Lexicográfico: Técnica de componer léxicos o diccionarios.

Matriz: Una matriz es una tabla rectangular de números. Una de las principales aplicaciones de las matrices es la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas

M.D.E: siglas de Modelo Digital de Elevaciones.

M.D.T: siglas de Modelo Digital de Terreno.

Morfología: Parte de la biología que trata de la forma de los seres orgánicos y de las modificaciones o transformaciones que experimenta. OJO

Multicuadrática: función caracterizada por varias ecuaciones de segundo grado.

Nodo: Cada uno de los puntos que permanecen fijos en un cuerpo vibrante. En una cuerda vibrante son siempre nodos los extremos, y puede haber varios nodos intermedios.

Píxel: Superficie homogénea más pequeña de las que componen una imagen, que se define por su brillo y color.

Poliédrica: es la porción de espacio determinada por varias (tres o más) semirrectas con origen común, dadas en un cierto orden. Las semirrectas se llaman aristas del ángulo poliédrico y el punto común es su vértice. Cada dos aristas consecutivas forman un ángulo que se llama cara

Proyección: Figura que resulta, en una superficie, de proyectar en ella todos los puntos de un sólido u otra figura.

S.I.G: siglas de sistemas de información geográfica

Sistemático: Conjunto de reglas o principios sobre una materia racionalmente enlazados entre sí.

Software: Conjunto de programas, instrucciones y reglas informáticas para ejecutar ciertas tareas en una computadora.

Taquímetro: Instrumento que sirve para medir a un tiempo distancias y ángulos horizontales y verticales.

Topología: rama de las matemáticas que estudia ciertas propiedades de las figuras geométricas.

Urbanístico: Conjunto de conocimientos relativos a la planificación, desarrollo, reforma y ampliación de los edificios y espacios de las ciudades.

Varianza: es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, con respecto a su media. Se simboliza por S^2 .

BIBLIOGRAFIA

AGUILAR Ángel Manuel; AGUILAR Fernando. Efectos de la morfología del terreno, densidad muestral y métodos de interpolación en la calidad de los modelos digitales de elevaciones. Universidad de Almería. España. 2002.

AGUILAR Manuel. Evaluación de diferentes técnicas de interpolación espacial para la generación de modelos digitales del terreno agrícola. Mapping Interactivo. No74. Noviembre 2001.

ARCE, Rafael. Interpolación Espacial. Escuela de geografía. Universidad de Costa Rica .Costa Rica. Junio 2001.

BANNISTER Arthur and RAYMOND Stanley. Surveying. Hong Kong: Sixth edition. Longman Scientific & Technical.1992.

BARRAGAN Morillo J. Análisis de calidad de un modelo digital de elevación generado con distintas técnicas de interpolación. Santander, España: XIV congreso internacional de ingeniería grafica. 2002.

BERNABÉ Miguel Ángel e ITURRIOZ Teresa. Cartografía II .Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Topográfica. Notas de Clase. Marzo 2002.

BOSQUE Joaquín. Sistemas de Información Geográfico. Madrid: Ediciones Rialp.1992

BOSQUE Joaquín y GARCIA Rosa. Métodos de interpolación para la elaboración de un modelo digital de elevaciones. Estudios Geográficos. No 245. 2001.

BURROUGH, P. A., and R. A. McDonnell. Principles of geographical Information systems. New York: Oxford University Press, Oxford.1998.

CARVAJAL, Fernando; AGUILAR, Fernando. Interpolación espacial en entorno CAD. Aplicación del método de krigeado. Logroño-Pamplona (España): XI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. 1999.

COMAS Y RUIZ. Fundamentos de los Sistemas de Información Geográfica. Barcelona: Ariel Geografía.1993

DECLERCQ, Franky A. N. Interpolation methods for scattered sample data: accuracy, spatial patterns, processing time. *Cartography and Geographic Information Systems*, v. 23, nº 3, 1996.

EI- SHEIMY Naser. *Digital Terrain Modelling*. Department of Geomatics Engineering. University of Calgary. 1999

FELICISIMO Ángel Manuel. *La utilización de los MDT en los estudios del medio físico*. Universidad de Extremadura. España. 1999.

FELICÍSIMO, Ángel M. *Modelos digitales del terreno. Introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales*. Oviedo: Pentalfa. 1994

FERNANDEZ DE LA TORRE Reyner y GELER Tatiana. *Modelo Digital de Elevación de la zona emergida del ecosistema Sabana Camaguey, Cuba*. *Mapping interactivo*. No 94. Mayo 2004.

FRANKE, Richard and NIELSON Greg. *Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol 15. 1980.

GARCIA Juan. *A methodological proposal for improvement of digital surface models generated by automatic stereo matching of convergent image networks*. Universidad Politécnica de Cartagena. España. 2004.

JOHNSTON, K et al. *Using ArcGIS Geostatistical Analyst*. ESRI. Redlands. 2001.

LAM, Nina S. *Spatial interpolation methods: A review*. *The American cartographer*, v. 10, nº 2, 1983.

LEY R Accuracy assessment of digital terrain models Proceedings. London, Autoto Carto.1986

LI Zhilin. Effects of check points on the reliability of DTM accuracy estimates obtained from experimental tests In Photogrametric Engineering & Remote Sensing, vol 47, nº 10, 1991.

MARTINEZ Rubén, GONZALES Francisco. Análisis de las metodologías habituales para la generación de modelos digitales del terreno. Mapping Interactivo. No. 71.Julio 2001.

MESÉN Rafael Arce. Interpolación Espacial. Escuela de Geografía. Universidad de Costa Rica. Junio 2001.

MOFFITT Francis and BOSSLER John. Surveying. New York: Addison Wesley Longman. 1998.

NAVARRO PEDREÑO, J y otros. Sistemas de Información Geográfico y el medio ambiente. Cuaderno 2º. Introducción a los SIG y Teledetección. Universidad Miguel Hernández de Elche. España. 2000

RÍOS, Sixto. Modelización. Madrid: Alianza Ediciones. AU 822 1995.

OWEN, Steven. Subsurface Characterization with Three-Dimensional Natural Neighbor Interpolation. Department of Civil and Environmental Engineering, Brigham Young University, Provo, Utah, U.S.A. 1993

TURNER, J.C.: Matemática moderna aplicada. Probabilidades, estadística e investigación operativa. Madrid: Alianza Editorial. 1970

WEBER, Dennis & ENGLUND, Evan. Evaluation and comparison of spatial interpolators II. *Mathematical Geology, International Association for Mathematical Geology*, Vol 26, No 5.1994.

WOLF Paul and DEWITT Bon. *Elements of Photogrammetry with applications in GIS*. New York: McGraw Hill. 3rd Edition. 2000.

WOLF, Paul and GHILANI, Charles. *Adjustment Computations*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1997.